Einführung in die Logik

Skript zur Vorlesung
von
Thomas Piecha

Wintersemester 2015/16

Universität Tübingen
Philosophisches Seminar und
Fachbereich Informatik

Skript zur Vorlesung für Studenten der Philosophie, gehalten im Wintersemester 2015/16.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Unter *Logik* versteht man im Wesentlichen die Lehre vom gültigen Schließen. Die Beantwortung der Frage, was ein gültiger Schluss ist, wird ein Hauptgegenstand der “Einführung in die Logik” sein.
Im Folgenden werden anhand von Beispielen Begriffe wie *(gültiger) Schluss*, *Argument*, *Aussage* und *logische Konstante* vorgestellt, mit denen wir uns dann später genauer auseinandersetzen werden.

Logik

Beispiel. Folgendes ist ein gültiger Schluss:

> Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.

Er enthält die beiden *Prämissen* “Alle Menschen sind sterblich” und “Sokrates ist ein Mensch”, sowie die *Konklusion* “Sokrates ist sterblich”. Das “Also” zeigt an, dass es sich um die Konklusion handelt (man sagt stattdessen z. B. auch “Folglich . . . ”, “Deshalb . . . ” oder “Daher . . . ”).

Prämissen
Konklusion

Statt von Schlüssen spricht man auch von Argumenten.

Definition 1.1 Ein *Schluss*, bzw. *Argument*, besteht aus einer Menge von Aussagen (den Prämissen) und einer als Konklusion gekennzeichneten Aussage.

Schluss
Argument

Schematisch werden Schlüsse auch unter Verwendung eines Schluss-Strichs dargestellt:

$$\begin{array}{l} \text{Alle Menschen sind sterblich.} \\ \text{Sokrates ist ein Mensch.} \\ \hline \text{Sokrates ist sterblich.} \end{array}$$

Die Prämissen stehen über dem Schluss-Strich, die Konklusion darunter.
Im Allgemeinen hat ein Schluss die Form

$$\begin{array}{c} \langle\text{Prämisse}_1\rangle \\ \vdots \\ \langle\text{Prämisse}_n\rangle \\ \hline \langle\text{Konklusion}\rangle \end{array}$$

wobei $n \geq 0$ (d. h. n ist eine nichtnegative ganze Zahl). Ein Schluss hat genau eine Konklusion. Die Anzahl der Prämissen ist hier endlich; es könnten aber auch unendlich viele Prämissen zugelassen werden.
Ein Schluss kann auch aus nur einer Prämisse und einer Konklusion, oder aus einer Konklusion allein bestehen. Beispiele gültiger Schlüsse dieser Art sind

$$\begin{array}{c} \text{Sokrates ist sterblich.} \\ \hline \text{Sokrates ist sterblich.} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{c} \\ \hline \text{Sokrates ist sterblich oder Sokrates ist nicht sterblich.} \end{array}$$

Oft werden Prämissen, die für die Gültigkeit eines Schlusses notwendig sind, stillschweigend vorausgesetzt. Der Schluss

$$\frac{\text{Kant ist ein Mensch.}}{\text{Kant ist ein Eukaryot.}}$$

mag Biologen gültig erscheinen, da sie wissen, dass alle Menschen Eukaryoten sind. Ohne dieses Wissen wird man den Schluss für ungültig halten. Einen davon unabhängig gültigen Schluss erhält man, indem man die vorher implizit verwendete Prämisse, dass alle Menschen Eukaryoten sind, explizit macht:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Alle Menschen sind Eukaryoten.}\\ \text{Kant ist ein Mensch.}\end{array}}{\text{Kant ist ein Eukaryot.}}$$

Die Gültigkeit des vervollständigten Schlusses erkennt man ohne biologisches Wissen (auch wenn man nicht weiß, was Menschen und Eukaryoten sind, bzw. was oder wer Kant ist, wird man den Schluss für gültig halten). Dies ist möglich, da es für die Gültigkeit eines Schlusses lediglich auf seine Form ankommt.
Für die Gültigkeit eines Schlusses ist es nicht maßgeblich, ob alle in ihm vorkommenden Aussagen wahr sind. Im folgenden Schluss kommen nur wahre Aussagen vor (dass Sokrates nicht mehr lebt, sei unerheblich):

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Einige Menschen sind Philosophen.}\\ \text{Sokrates ist ein Mensch.}\end{array}}{\text{Sokrates ist ein Philosoph.}}$$

Es handelt sich jedoch nicht um einen gültigen Schluss. Halten wir an der Form dieses Schlusses fest, ersetzen aber “Philosoph(en)” durch “Ägypter”, so erhalten wir folgenden ungültigen Schluss:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Einige Menschen sind Ägypter.}\\ \text{Sokrates ist ein Mensch.}\end{array}}{\text{Sokrates ist ein Ägypter.}}$$

Die Ersetzung hat dazu geführt, dass zwar die beiden Prämissen wieder wahre Aussagen sind, die Konklusion nun aber eine falsche Aussage ist. Die Ersetzung hat den Effekt einer Uminterpretation des Wortes “Philosoph(en)”: Statt der Standardinterpretation, in der das Wort “Philosoph(en)” Menschen bezeichnet, die philosophieren, bezeichne es nun Menschen, die in Ägypten leben. Diese neue Interpretation haben wir durch die Ersetzung explizit vorgenommen.

Bemerkung. Die Ersetzung, bzw. Uminterpretation, wurde hierbei einheitlich auf den ganzen Schluss angewandt. Das heißt, Gleiches wurde durch Gleiches ersetzt, und nicht etwa nur eine Ersetzung in der Prämisse oder nur in der Konklusion vorgenommen. Uneinheitliche Ersetzungen lassen wir nicht zu, da diese die Form des Schlusses verändern würden.

Eine Präzisierung dessen, was wir einen gültigen Schluss nennen, kann damit wie folgt lauten:

Präzisierung 1.2 Ein Schluss ist *gültig*, falls es keine Interpretation gibt, für die zwar die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist.

gültiger Schluss

Mit anderen Worten: Ein Schluss ist *gültig*, falls für jede Interpretation, für welche die Prämissen wahr sind, auch die Konklusion wahr ist.

Beispiel. Der Schluss

$$\begin{array}{l} \text{Alle Menschen sind sterblich.} \\ \text{Sokrates ist ein Mensch.} \\ \hline \text{Sokrates ist sterblich.} \end{array}$$

ist gemäß dieser Präzisierung gültig.

Wahrheitskonservierung

Man spricht auch von *Wahrheitskonservierung*, da sich die Wahrheit von den Prämissen auf die Konklusion "überträgt", und in diesem Sinne erhalten bleibt. Bei dieser *wahrheitstheoretischen Konzeption* ist der Begriff *Wahrheit* primär gegenüber dem Begriff *Schluss*. Eine Alternative zur wahrheitstheoretischen Konzeption stellt die *beweistheoretische Konzeption* dar, bei welcher der Begriff *Schluss* (bzw. der Begriff *Begründung* oder *Beweis*) primär gegenüber dem Begriff *Wahrheit* ist: Aussagen sind wahr, wenn sie das Ergebnis einer korrekten Folge von Schlüssen sind. Die beweistheoretische Konzeption ist von hoher philosophischer Relevanz. In der Vorlesung werden wir uns allerdings auf die wahrheitstheoretische Konzeption beschränken.

Bemerkungen. (i) Wenn ein Schluss gültig ist, und alle Prämissen wahr sind, dann ist auch die Konklusion wahr.

(ii) Daraus, dass alle Prämissen und die Konklusion eines Schlusses wahr sind, folgt jedoch nicht, dass der Schluss auch gültig ist.

(iii) Ein gültiger Schluss kann falsche Prämissen enthalten. In diesem Fall kann auch die Konklusion eine falsche Aussage sein.

Bei einer Interpretation von "Mensch(en)" als Philosoph(en), "sterblich" als Eukaryot(en) und "Sokrates" als Kant ergibt sich der (ebenfalls gültige) Schluss

$$\begin{array}{l} \text{Alle Philosophen sind Eukaryoten.} \\ \text{Kant ist ein Philosoph.} \\ \hline \text{Kant ist ein Eukaryot.} \end{array}$$

Dieser Schluss enthält ausschließlich wahre Aussagen (soweit wir wissen).
Für die Interpretation von "Mensch(en)" als Eukaryot(en), "sterblich" als Philosoph(en) und "Sokrates" als Kant, ergibt sich der Schluss

$$\begin{array}{l} \text{Alle Eukaryoten sind Philosophen.} \\ \text{Kant ist ein Eukaryot.} \\ \hline \text{Kant ist ein Philosoph.} \end{array}$$

In diesem Schluss ist die erste Prämisse falsch (denn nicht alle Eukaryoten sind Philosophen). Dies schließt jedoch nicht aus, dass der Schluss gemäß unserer Präzisierung 1.2 gültig ist. Denn eine Interpretation, für die nicht alle Prämissen wahr sind, ist für die Frage nach Interpretationen, für welche die Prämissen wahr sind, die Konklusion jedoch falsch ist, irrelevant.

Bemerkung. Schlüsse mit widersprüchlichen Prämissen sind stets gültig, da es in diesem Fall keine Interpretation geben kann, für die alle Prämissen wahr sind.

Definition 1.3 (i) Eine Aussage heißt *kontradiktorisch*, falls sie für keine Interpretation wahr ist. *kontradiktorisch*

(ii) Eine Menge von Aussagen heißt *kontradiktorisch*, falls es keine Interpretation gibt, für die alle Aussagen der Menge wahr sind.

(iii) Ist eine Aussage, bzw. eine Menge von Aussagen, nicht kontradiktorisch, so ist sie *konsistent*. (Dies ist genau dann der Fall, wenn es mindestens eine Interpretation gibt, für welche die Aussage, bzw. alle Aussagen in der Menge, wahr sind.) *konsistent*

Bemerkung. Ein ungültiger Schluss kann einfach dadurch in einen gültigen Schluss verwandelt werden, dass man die Menge der Prämissen zu einer kontradiktorischen Menge erweitert. Zum Beispiel erhalten wir aus dem ungültigen Schluss

$$\frac{\text{Kant ist ein Mensch.}}{\text{Kant ist ein Eukaryot.}}$$

durch Hinzufügen der Prämisse “Kant ist kein Mensch” den gültigen Schluss

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Kant ist kein Mensch.}\\ \text{Kant ist ein Mensch.}\end{array}}{\text{Kant ist ein Eukaryot.}}$$

Allerdings ist auch folgender Schluss gültig:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Kant ist kein Mensch.}\\ \text{Kant ist ein Mensch.}\end{array}}{\text{Kant ist kein Eukaryot.}}$$

Er verwendet dieselben Prämissen, aber die Konklusion widerspricht der des vorherigen Schlusses.
Die beiden gültigen Schlüsse sind Beispiele für das Prinzip *ex contradictione (sequitur) quodlibet* (auch: *ex falso (sequitur) quodlibet*).

Um nachzuweisen, dass ein Schluss gültig ist, müssen wir für jede Interpretation, für welche die Prämissen wahr sind, zeigen, dass für sie die Konklusion ebenfalls wahr ist. Eine Interpretation, bei der dies nicht der Fall ist (für die also die Prämissen wahr sind, und die Konklusion falsch ist), ist ein Gegenbeispiel zur Gültigkeit des Schlusses.
Da für die Gültigkeit eines Schlusses beliebige Interpretationen zu betrachten sind, können wir von konkreten Prämissen und Konklusionen abstrahieren, und stattdessen zu Variablen P, Q, C übergehen. Für den eingangs behandelten Schluss erhalten wir dann:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Alle } P \text{ sind } Q.\\ C \text{ ist } P.\end{array}}{C \text{ ist } Q.}$$

Die Gültigkeit eines Schlusses beruht somit allein auf der Form des Schlusses. Egal welche konkreten Einsetzungen wir für P, Q und C vornehmen, es darf nie der Fall einer Einsetzung eintreten, bei der die Prämissen wahr sind und die Konklusion falsch ist.
Zu beachten ist, dass wir in den in einem Schluss vorkommenden Aussagen nur bestimmte Komponenten uminterpretieren, bzw. Einsetzungen nur an bestimmten Stellen (hier P,

Q und C) zulassen. Hingegen haben wir z. B. “Alle” konstant beibehalten, und nicht etwa durch “Einige” oder etwas anderes ersetzt. “Alle” und “Einige” sind Beispiele für *logische Konstanten*; sie haben eine festgelegte Bedeutung. Hingegen stehen die *Variablen* P, Q und C jeweils für Ausdrücke, die unterschiedliche Bedeutungen haben können.

logische Konstanten

Die *Quantifikatoren* “Alle” und “Einige”, kurz: *Quantoren*, werden in der *Quantorenlogik* (auch: *Prädikatenlogik* oder *Logik erster Stufe*, engl. *first-order logic*) behandelt. Damit beschäftigen wir uns im zweiten Teil der “Einführung in die Logik”.

Quantoren

Im ersten Teil wird es um die *Aussagenlogik* (engl. *propositional logic*; auch: *Junktorenlogik*) gehen. In ihr werden Aussagen behandelt, die mit *Konnektiven* (*Junktoren*) zu komplexeren Aussagen zusammengesetzt sein können. Beispiele für Konnektive sind die *Konjunktion* “und”, die *Disjunktion* “oder” und die *Implikation* “Wenn . . . , dann . . . ”; auch die *Negation* “nicht” wird als Konnektiv behandelt. Die Konnektive sind die logischen Konstanten der Aussagenlogik.

Konnektive

Beispiele. Die Aussagen

> Die Sonne scheint.

und

> Die Tafel ist grün.

können z. B. zu den Aussagen

> Die Sonne scheint, *und* die Tafel ist grün.

oder

> *Wenn* die Tafel grün ist, *dann* scheint die Sonne.

zusammengesetzt werden.
Unter Verwendung der Negation kann z. B. die Aussage

> Die Sonne scheint *nicht*.

bzw. gleichbedeutend die Aussage

> *Es ist nicht der Fall, dass* die Sonne scheint.

gebildet werden.

In der klassischen Aussagenlogik setzt man voraus, dass eine Aussage entweder wahr oder falsch ist. Man sagt auch, dass eine Aussage immer genau einen der beiden *Wahrheitswerte wahr* (bzw. “das Wahre”) oder *falsch* (bzw. “das Falsche”) hat. Diese Voraussetzung bezeichnet man als *Bivalenzprinzip*.

Wahrheitswerte

Bivalenzprinzip

Bemerkung. Das Bivalenzprinzip impliziert weder, dass wir Kenntnis des Wahrheitswerts einer Aussage haben, noch, dass wir in jedem Fall entscheiden können, welchen Wahrheitswert eine Aussage hat. Falls jedoch etwas nicht genau einen der beiden Wahrheitswerte hat, kann es keine Aussage im Sinne des Bivalenzprinzips sein.

Der Wahrheitswert von mit Konnektiven aus Aussagen zusammengesetzten Aussagen hängt sowohl von den Wahrheitswerten der Teilaussagen als auch von der Bedeutung der verwendeten Konnektive ab. (Zumindest wird dies bei den in der Aussagenlogik behandelten Konnektiven immer der Fall sein.)

Beispiel. Die Aussage

Sokrates ist Ägypter.

ist falsch. Die Aussage

Menschen sind sterblich.

ist wahr. Die zusammengesetzte Aussage

Sokrates ist Ägypter, *und* Menschen sind sterblich.

hat dann aufgrund der Bedeutung von “und” den Wahrheitswert *falsch*. Die Aussage

Sokrates ist Ägypter, *oder* Menschen sind sterblich.

hat hingegen den Wahrheitswert *wahr*.

Bemerkung. Der auch als “Lügner” bezeichnete Satz

Dieser Satz ist falsch.

ist keine Aussage gemäß dem Bivalenzprinzip, da er weder den Wahrheitswert *wahr* noch den Wahrheitswert *falsch* haben kann:
Angenommen der Satz ist eine Aussage. Dann muss der Satz entweder wahr sein oder er muss falsch sein.

1. Fall: Angenommen der Satz ist wahr. Dann ist es wahr, dass der Satz falsch ist. Also ist der Satz falsch. Widerspruch zur Annahme. Folglich ist der Satz nicht wahr.
2. Fall: Angenommen der Satz ist falsch. Dann ist es falsch, dass der Satz falsch ist. Also ist der Satz nicht falsch. Widerspruch zur Annahme. Folglich ist der Satz nicht falsch.

Somit ist der Satz weder wahr noch falsch, im Widerspruch zur Annahme, der Satz sei eine Aussage. Also ist der Satz keine Aussage.

Neben der Untersuchung semantischer Eigenschaften, wie der Gültigkeit von Schlüssen oder den Wahrheitswerten von Aussagen, sind Kalküle von großer Bedeutung. In der Vorlesung werden wir den *Kalkül des natürlichen Schließens* behandeln. Dieser besteht aus Regeln, mit denen wir von Aussagen schrittweise zu neuen Aussagen übergehen können. Ob eine bestimmte Regel auf gegebene Aussagen angewendet werden kann, hängt dabei nicht von semantischen Eigenschaften (z. B. den Wahrheitswerten) der Aussagen ab, sondern lediglich von deren logischer Form. Im Kalkül kann so eher die Struktur tatsächlicher Argumentationen abgebildet werden.

Kalkül des natürlichen Schließens

Literatur

Es gibt eine Vielzahl von einführenden Lehrbüchern zur Logik, von denen hier nur die beiden folgenden genannt seien:

- V. Halbach, *The Logic Manual*, Oxford University Press, 2010.
- W. Hodges, *Logic*, Penguin, 2001.

Das Skript bedient sich verschiedener Quellen (siehe Literaturverzeichnis). Es wird darauf verzichtet, die Verwendung dieser Quellen immer kenntlich zu machen.

Bei der Behandlung der Quantorenlogik werden wir verstärkt mengentheoretische Notation verwenden. Erläuterungen dazu finden sich im Buch von Halbach, §§ 1.1-1.4. Für Weiteres siehe z. B. §§ 1-8 in P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, Springer, 1974.

2 Die formale Sprache der Aussagenlogik

Um Sätze auszuschließen, die keine Aussagen im Sinne des Bivalenzprinzips darstellen, werden wir für die Aussagenlogik eine künstliche, formale Sprache einführen. Deren Ausdrucksstärke ist zwar gegenüber natürlichen Sprachen stark eingeschränkt; für die formale Sprache kann aber sichergestellt werden, dass jede in ihr formulierte Aussage genau einen Wahrheitswert hat.

Die Übersetzung natürlichsprachlicher Sätze oder Argumente in die formale Sprache der Aussagenlogik (*Formalisierung*) kann eine Präzisierung bedeuten, und die Anwendung von Methoden und Resultaten der Aussagenlogik ermöglichen. Falls die Übersetzung adäquat ist, kann dann z. B. von der Gültigkeit des formalisierten Arguments auf die Gültigkeit des natürlichsprachlichen Ausgangsarguments zurückgeschlossen werden. Unser Hauptaugenmerk wird sich jedoch auf die Untersuchung der formalen Sprache selbst richten.

Da die formale Sprache der Aussagenlogik den Gegenstand unserer Untersuchung darstellen wird, spielt sie die Rolle der *Objektsprache*. Die Untersuchung selbst erfolgt in der sogenannten *Metasprache*. In unserem Fall ist dies die (mathematisch angereicherte) natürliche Sprache. Es wird also eine Trennung in Objekt- und Metasprache vorgenommen. “Objektsprache” und “Metasprache” sind keine absoluten Begriffe. Eine Objektsprache kann selbst als Metasprache relativ zu einer anderen Objektsprache fungieren, und eine Metasprache kann relativ zu einer anderen Metasprache die Objektsprache sein (*Sprachstufenhierarchie*).

Objektsprache
Metasprache

In der Metasprache *erwähnt* man Ausdrücke der Objektsprache durch *Verwendung* von Ausdrücken der Metasprache.

Verwendung und Erwähnung von Ausdrücken

Um über etwas zu reden, muss man Ausdrücke (d. h. sprachliche Objekte) *verwenden*. Die Gegenstände, über die man redet, werden dabei *erwähnt*.

Beispiel. In dem Satz

> Tübingen liegt am Neckar.

wird der Ausdruck “Tübingen” verwendet, um etwas über die Stadt Tübingen zu sagen. Die Stadt Tübingen wird hierbei erwähnt.

Um über Ausdrücke zu reden (d. h., um sie zu erwähnen), verwendet man *Anführungsnamen*. Charakteristisch für Anführungsnamen ist, dass sie das, was sie erwähnen, als Bestandteil enthalten.

Anführungsnamen

Beispiele.

(i) In dem Satz

$$\overbrace{\text{“}\underbrace{\text{Tübingen}}_{\text{erwähnt}}\text{”}}^{\text{verwendet}}\text{ hat 8 Buchstaben.}$$

wird ein Anführungsname verwendet. Erwähnt wird nicht die Stadt Tübingen, sondern der Ausdruck “Tübingen”, d. h. eine Zeichenkette mit 8 Buchstaben, die mit “T” beginnt und mit “n” endet.

(ii) Es gilt:

  - Die Stadt Tübingen ist nicht Bestandteil des Ausdrucks “Tübingen”.
  - Der Ausdruck “Tübingen” ist Bestandteil des Ausdrucks ““Tübingen””.

Ausdrücke können auch ohne Verwendung eines Anführungsnamens erwähnt werden:

Beispiele.
(i) Es gilt:

> Der aus dem 21., 8. und 21. Buchstaben des Alphabets (in dieser Reihenfolge) gebildete Ausdruck ist ein Palindrom.

(ii) Sei “ABCD” ein Name für “Uhu”. Dann gilt:

> ABCD ist ein Palindrom.

Die Unterscheidung von Verwendung und Erwähnung von Ausdrücken ist insbesondere bei der Einführung einer Sprache wichtig. Um z. B. festzulegen, wie aus zwei Sätzen mit dem Konnektiv “oder” ein neuer Satz gebildet wird, kann man sagen

> Wenn A und B Sätze sind, dann ist auch “A oder B” ein Satz.

Ist A der Satz “Die Sonne scheint” und B der Satz “die Tafel ist grün”, dann ist nach dieser Festlegung auch “Die Sonne scheint oder die Tafel ist grün” ein Satz. Nun sei A der Satz “Die Sonne scheint oder die Tafel ist grün” und B wieder der Satz “die Tafel ist grün”; dann ist auch “Die Sonne scheint oder die Tafel ist grün oder die Tafel ist grün” ein Satz. Es können also beliebig lange Sätze gebildet werden.
Zu beachten ist, dass der Ausdruck “A oder B” selbst kein Satz ist, da die Ausdrücke “A” und “B” als solche keine Sätze sind. Nur wenn “A” und “B” durch Sätze ersetzt werden, ist auch “A oder B” (nach dieser Ersetzung) ein Satz. Die Ausdrücke “A” und “B” werden hier als *metasprachliche Variablen* (d. h. als Variablen in der Metasprache), verwendet, die für Ausdrücke der Objektsprache stehen (gemäß der “Wenn”-Bedingung in unserer Festlegung sind diese Ausdrücke hier Sätze).

metasprachliche Variablen

Ohne Verwendung von metasprachlichen Variablen kann obige Festlegung wie folgt formuliert werden:

> Ein Satz gefolgt von “ oder ”, gefolgt von einem weiteren Satz, ist ebenfalls ein Satz.

Bei der Untersuchung formaler Sprachen ist die Verwendung von metasprachlichen Variablen jedoch vorzuziehen, da sich dadurch metasprachliche Aussagen einfacher formulieren lassen.
Eine weitere Vereinfachung ergibt sich durch die Konvention, Ausdrücke der Objektsprache als *autonym* zu behandeln. Namen von Ausdrücken der Objektsprache sind hierbei die Ausdrücke selbst. Um einen Ausdruck zu erwähnen, kann dieser dann einfach verwendet werden; auf Anführungsnamen kann also verzichtet werden.

autonym

Beispiel. Statt

> “$(p \to q)$” ist ein Ausdruck der Objektsprache.

kann man dann sagen:

> $(p \to q)$ ist ein Ausdruck der Objektsprache.

Durch die Verschiedenartigkeit von objekt- und metasprachlichen Ausdrücken sollten Missverständnisse hierbei ausgeschlossen sein.

Nach diesen Vorbemerkungen führen wir nun die formale Sprache der Aussagenlogik ein. Dazu legen wird zunächst ein Alphabet fest, und definieren dann, welche Ausdrücke über diesem Alphabet wir als Elemente der Sprache zulassen wollen. Eine solche Definition bezeichnet man auch als *Syntax*. Die so eingeführte Sprache ist die Objektsprache; die zu ihrer Einführung verwendete Metasprache ist die natürliche Sprache.

Syntax

Definition 2.1 Das *Alphabet der Sprache der Aussagenlogik* besteht aus folgenden Zeichen:

Alphabet

(i) *Aussagesymbole*: $p, q, r, \ldots$, auch mit Indizes: $p_0, p_1, p_2, \ldots$.
Es sei AS $= \{p, q, r, \ldots\}$ die *Menge der Aussagesymbole*.

Aussagesymbole

(ii) *Konnektive* (*logische Konstanten*, *Junktoren*): $\top$ (Verum), $\bot$ (Falsum), $\neg$ (Negation), $\wedge$ (Konjunktion), $\vee$ (Disjunktion), $\rightarrow$ (Implikation) und $\leftrightarrow$ (Biimplikation).

Konnektive

(iii) Klammern: (,)

Definition 2.2 Die (*aussagenlogischen*) *Formeln* über AS $= \{p, q, r, \ldots\}$ sind wie folgt definiert:

Formeln

(i) Jedes Aussagesymbol in AS ist eine Formel. $\top$ und $\bot$ sind ebenfalls Formeln.

(ii) Wenn A eine Formel ist, dann auch $\neg A$.

(iii) Wenn A und B Formeln sind, dann auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ und $(A \leftrightarrow B)$.

Die *Sprache der Aussagenlogik* ist die Menge aller (aussagenlogischen) Formeln. Diese Menge bezeichnen wir auch mit FORMEL.

Sprache der Aussagenlogik

Bemerkung. Wir fassen die Klauseln (i)-(iii) als Regeln zur Erzeugung von Formeln auf, so dass Formeln genau die mit diesen Regeln erzeugbaren Ausdrücke sind. Wir verzichten daher auf die weitere Bedingung, dass nichts sonst eine Formel sei, oder dass die Menge der Formeln gemäß (i)-(iii) die kleinste derartige Menge sei. (Wir werden das so auch bei anderen Definitionen entsprechender Form handhaben.)

Bemerkung. Die logischen Konstanten haben noch keine Bedeutung erhalten; dies geschieht erst später, in der Semantik der Aussagenlogik. Um Formeln besser mitteilen oder lesen zu können, verwenden wir aber jetzt schon natürlichsprachliche Ausdrücke:

Formel(schema)	*lies/sprich*
$\top$	Verum; das Wahre
$\bot$	Falsum; das Falsche
$\neg A$	nicht A; Negation A
$(A \wedge B)$	A und B; A Konjunktion B
$(A \vee B)$	A oder B; A Disjunktion B
$(A \rightarrow B)$	wenn A, dann B; A impliziert B; A Pfeil B
$(A \leftrightarrow B)$	A genau dann, wenn B; A biimpliziert B; A Doppelpfeil B

Dabei soll jedoch nicht vorausgesetzt werden, dass die logischen Konstanten dieselbe Bedeutung wie die verwendeten natürlichsprachlichen Ausdrücke hätten.

Beispiele. Die folgenden Ausdrücke sind aussagenlogische Formeln:

(i) p_{176}

(ii) $(\bot \to \top)$

(iii) $\neg\neg\neg q$

(iv) $(((p_0 \land \neg p_1) \lor p_2) \to p_3)$

Folgende Ausdrücke sind hingegen *keine* Formeln:

(i) $(\to\bot)$ (das Vorderglied der Implikation fehlt);

(ii) $p \leftrightarrow q$ (die Außenklammern fehlen);

(iii) $(\neg p)$ (Klammern zu viel);

(iv) $(p_0 \lor p_1 \lor p_2)$ (es fehlen Klammern).

Bemerkungen. (i) Die Sprache der Aussagenlogik ist unsere *Objektsprache*. In ihr kommen ausschließlich Zeichen des Alphabets gemäß Definition 2.1 vor. Wir verwenden $A, B, C, \ldots$ (ggf. mit Indizes) als *metasprachliche Variablen* (auch: *Metavariablen*) für in der Objektsprache ausgedrückte Formeln.

metasprachliche Variablen

(ii) Die Aussagesymbole werden auch als *atomare Formeln*, kurz: *Atome*, bezeichnet. Ebenso $\top$ und $\bot$.

atomare Formel

(iii) Nicht-atomare Formeln heißen *komplex*.

komplexe Formel

(iv) Aussagenlogische Formeln werden im Folgenden auch einfach als *Aussagen* bezeichnet.

Aussagen

Bemerkung. Zur *Klammerersparnis* gelten folgende Regeln:

Klammerersparnis

(i) Außenklammern können weggelassen werden.

(ii) *Bindungsstärke*: $\neg$ bindet am stärksten, $\land$ und $\lor$ binden stärker als $\to$ und $\leftrightarrow$.

Bindungsstärke

(iii) Wir verwenden bei Iterationen von $\land$, bzw. $\lor$, *Linksklammerung*. Das heißt

Linksklammerung

- $(A_1 \land A_2 \land A_3 \land \ldots \land A_n)$ steht für $(\ldots((A_1 \land A_2) \land A_3)\ldots) \land A_n)$,
- $(A_1 \lor A_2 \lor A_3 \lor \ldots \lor A_n)$ steht für $(\ldots((A_1 \lor A_2) \lor A_3)\ldots) \lor A_n)$.

Beispiele. (i) Die Formel mit Klammerersparnis $p \to q \land r$ steht für $(p \to (q \land r))$.

Die (Außen-)klammern in $(q \land r)$ können weggelassen werden, da $\land$ stärker bindet als $\to$ (dies schließt aus, dass $p \to q \land r$ für $((p \to q) \land r)$ stehen kann). Durch Weglassen der Außenklammern in $(p \to q \land r)$ erhält man $p \to q \land r$.

(ii) $p \lor q \lor r$ steht für $((p \lor q) \lor r)$.

Wegen Linksklammerung steht $p \lor q \lor r$ für $(p \lor q) \lor r$, was wegen Weglassung der Außenklammern für $((p \lor q) \lor r)$ steht.

(iii) Die Formel mit Klammerersparnis

$$q \land p_1 \land p_7 \land p_2 \to q \lor p_1 \lor p_7 \lor p_2$$

steht für die Formel

$$((((q \land p_1) \land p_7) \land p_2) \to (((q \lor p_1) \lor p_7) \lor p_2))$$

Bemerkung. Bei einer mit den Regeln zur Klammerersparnis erzeugten Formel muss immer *eindeutig* ersichtlich sein, welche Formel gemäß Definition 2.2 der so erzeugten Formel zugrunde liegt.
Die Formel $((p \vee q) \vee (p \vee r))$ kann nach den Regeln zur Klammerersparnis zu $p \vee q \vee (p \vee r)$ abgekürzt werden, aber nicht zu $p \vee q \vee p \vee r$, da letztere Formel wegen Linksklammerung für $(((p \vee q) \vee p) \vee r)$ steht.

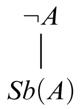
Definition 2.3 Die Erzeugung von Formeln kann als *Strukturbaum* dargestellt werden. Dieser ist rekursiv definiert wie folgt:

Strukturbaum

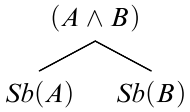
(i) Der Strukturbaum $Sb(A)$ einer atomaren Formel A ist der Knoten

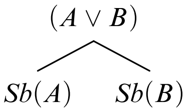
$$A$$

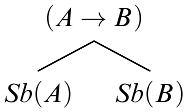
(ii) Der Strukturbaum $Sb(\neg A)$ einer negierten Formel $\neg A$ ist

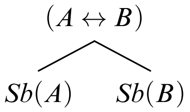


(iii) Die Strukturbäume $Sb((A \wedge B))$, $Sb((A \vee B))$, $Sb((A \rightarrow B))$ bzw. $Sb((A \leftrightarrow B))$ von Formeln $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ bzw. $(A \leftrightarrow B)$ sind









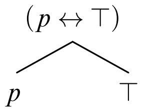
Bemerkung. *Sb* ist also eine Funktion, die Formeln auf (nach unten verzweigende) binäre Bäume abbildet. Der Wurzelknoten ist jeweils die Formel selbst; die Blätter sind die in der Formel vorkommenden atomaren Formeln.

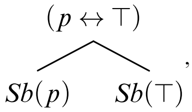
Beispiele. (i) Der Strukturbaum der Formel $\bot$ ist:

$$\bot$$

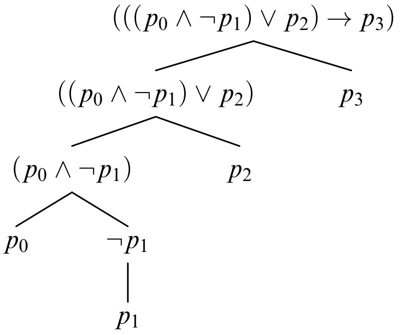
(Denn $\bot$ ist eine atomare Formel; der Strukturbaum $Sb(\bot)$ ist somit der Knoten $\bot$.)

(ii) Der Strukturbaum der Formel $(p \leftrightarrow \top)$ ist:



(Denn es ist $Sb((p \leftrightarrow \top)) =$  , wobei $Sb(p) = p$ und $Sb(\top) = \top$.)

(iii) Der Strukturbaum der Formel $(((p_0 \wedge \neg p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3)$ ist:



Definition 2.4 (i) A ist *unmittelbare Teilformel* von $\neg A$.

unmittelbare Teilformel

(ii) A und B sind *unmittelbare Teilformeln* von $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$ und $(A \leftrightarrow B)$.

(iii) A ist *Teilformel* von B, falls A und B identisch sind, oder A Teilformel einer unmittelbaren Teilformel von B ist.

Teilformel

Bemerkungen. (i) Im Strukturbaum von A sind die unmittelbaren Teilformeln von A die direkt auf den Wurzelknoten folgenden Knoten. Die Teilformeln von A sind die Knoten, einschließlich des Wurzelknotens.

(ii) Teilformeln A von B, die nicht identisch mit B sind, bezeichnet man auch als *echte Teilformeln* von B.

echte Teilformel

Beispiele. (i) Die unmittelbaren Teilformeln von $(((p_0 \land \neg p_1) \lor p_2) \to p_3)$ sind $((p_0 \land \neg p_1) \lor p_2)$ und p_3. Die Teilformeln sind

- $(((p_0 \land \neg p_1) \lor p_2) \to p_3)$,
- $((p_0 \land \neg p_1) \lor p_2)$,
- $(p_0 \land \neg p_1)$,
- $\neg p_1$,
- p_0, p_1, p_2, p_3.

Die echten Teilformeln von $(((p_0 \land \neg p_1) \lor p_2) \to p_3)$ sind $((p_0 \land \neg p_1) \lor p_2)$, $(p_0 \land \neg p_1)$, $\neg p_1$, p_0, p_1, p_2, p_3.

(ii) Die Menge der Teilformeln von $(p \lor \neg p)$ ist $\{(p \lor \neg p), \neg p, p\}$. Die Formel $(p \lor \neg p)$ enthält zwei Vorkommen der Teilformel p.

Definition 2.5 Das *Hauptkonnektiv* einer Formel A ist das bei der Erzeugung von A zuletzt eingeführte Konnektiv. (Im Strukturbaum von A ist dies das nur im Wurzelknoten vorkommende Konnektiv.)

Hauptkonnektiv

Beispiele. (i) Das Hauptkonnektiv der Formel $(((p_0 \land \neg p_1) \lor p_2) \to p_3)$ ist $\to$.

(ii) Das Hauptkonnektiv von $(p \land (q \land r))$ ist das linke Vorkommen von $\land$.

(iii) Das Hauptkonnektiv von $p \land q \land r$ ist das rechte Vorkommen von $\land$. Denn wegen Linksklammerung steht die Formel mit Klammerersparnis $p \land q \land r$ für die Formel $((p \land q) \land r)$.

3 Semantik der Aussagenlogik

In der *Semantik* einer Sprache wird jedem Ausdruck der Sprache eine Bedeutung zugewiesen. Die Semantik stellt also eine Interpretation der Sprache dar.

Semantik

In der Semantik der Aussagenlogik werden die Aussagesymbole durch Wahrheitswerte interpretiert. Dies geschieht durch Bewertungen, die jedem Aussagesymbol einen der beiden Wahrheitswerte w ("wahr"; als Gegenstand: *das Wahre*) oder f ("falsch"; als Gegenstand: *das Falsche*) zuordnen.

Die Bedeutung der logischen Konstanten $\top$, $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ wird durch Funktionen von Wahrheitswerten festgelegt (*Wahrheitsfunktionalität*). Für $\top$ und $\bot$ sind dies konstante Funktionen. Im Fall der Konnektive $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ ist der Wahrheitswert der mit dem jeweiligen Konnektiv als Hauptkonnektiv gebildeten komplexen Formel eine Funktion der Wahrheitswerte der unmittelbaren Teilformeln. Als Funktionswerte sind ebenfalls nur die beiden Wahrheitswerte w oder f zugelassen (*Bivalenzprinzip*).

Wahrheits-funktionalität

Bivalenzprinzip

Die Voraussetzung von Bivalenz und Wahrheitsfunktionalität ist charakteristisch für die *klassische* (Aussagen-)Logik.

Bemerkung. Die Forderung von Wahrheitsfunktionalität schließt die Behandlung gewisser Aussagen aus. Sei z. B. p die Aussage "Jeder Gegenstand ist mit sich selbst identisch" und q die Aussage "Tübingen liegt am Neckar". Sowohl p als auch q sind wahr. Jedoch ist die Aussage "Es ist notwendig, dass p" wahr, während die Aussage "Es ist notwendig, dass q" falsch ist. Der Operator "Es ist notwendig, dass A" bildet also den Wahrheitswert der Teilaussage A nicht eindeutig auf einen der beiden Wahrheitswerte ab, und kann daher keine Funktion sein. "Es ist notwendig, dass" ist somit kein wahrheitsfunktionaler Operator, der im Rahmen der aussagenlogischen Semantik behandelt werden könnte.

Definition 3.1 Eine *Bewertung* h ist eine Funktion, die jedem Aussagesymbol aus $\mathrm{AS} = \{p, q, r, \ldots\}$ einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet, d. h. $h : \mathrm{AS} \rightarrow \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$. Für $A \in \mathrm{AS}$ heißt A *wahr unter* h, falls $h(A) = \mathrm{w}$, und *falsch unter* h, falls $h(A) = \mathrm{f}$.

Bewertung

Bemerkungen. (i) Wir verwenden die für Funktionen übliche Notation. Das heißt

$$h : \mathrm{AS} \rightarrow \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$$

drückt aus, dass h jedem Element der Definitionsmenge AS genau ein Element der Zielmenge $\{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$ zuordnet. Der in diesem Kontext die Zuordnung kennzeichnende Pfeil "$\rightarrow$" hat also nichts mit dem Konnektiv der Implikation zu tun.

(ii) Um eine konkrete Bewertung anzugeben, muss jedem Aussagesymbol in AS einer der beiden Wahrheitswerte w oder f zugeordnet werden.

Beispiele. (i) $h(A) = \mathrm{w}$ für alle $A \in \mathrm{AS}$.

Diese Bewertung ordnet allen Aussagesymbolen den Wahrheitswert w zu.

(ii) Durch die alleinige Angabe von z. B. $h(p) = \mathrm{f}$ und $h(q) = \mathrm{w}$ ist noch *keine* Bewertung h festgelegt, da für alle Aussagesymbole außer p und q eine Wahrheitswertzuordnung fehlt.

(iii) $h(p) = \mathrm{w}$, $h(q) = \mathrm{w}$, $h(p_3) = \mathrm{w}$, $h(A) = \mathrm{f}$ für alle $A \in \mathrm{AS} \setminus \{p, q, p_3\}$. (Wobei $\mathrm{AS} \setminus \{p, q, p_3\}$ für das Komplement der Menge $\{p, q, p_3\}$ in der Menge AS steht, d. h. für die Menge aller Aussagesymbole AS mit Ausnahme von p, q und p_3.)

> Dies ist eine Bewertung; sie ordnet den Aussagesymbolen p, q und p_3 den Wahrheitswert w zu, und allen übrigen Aussagesymbolen den Wahrheitswert f.

Bemerkung. Wir verwenden im Folgenden das Zeichen “:=”, um auszudrücken, dass ein Wert auf der linken Seite des Zeichens per Definition gleich dem Wert auf der rechten Seite ist.
Entsprechend werden wir das Zeichen “:$\Longleftrightarrow$” verwenden, um auszudrücken, dass die linke Seite per Definition der Fall ist genau dann, wenn die rechte Seite der Fall ist.
Beide Zeichen gehören zur Metasprache; ebenso das, was links und rechts von ihnen steht. Die linke Seite ist das *Definiendum* (d. h. das, was definiert wird), die rechte das *Definiens* (d. h. das, wodurch definiert wird). Ausdrücke der Form

$$\langle\text{Definiendum}\rangle := \langle\text{Definiens}\rangle$$

und

$$\langle\text{Definiendum}\rangle \;:\Longleftrightarrow\; \langle\text{Definiens}\rangle$$

sind immer metasprachliche Aussagen.

Definition 3.2 Durch eine Funktion $[\![\ ]\!]^h : \textsc{Formel} \to \{\text{w}, \text{f}\}$ wird jeder Formel über $\text{AS} = \{p, q, r, \ldots\}$ ein Wahrheitswert w oder f zugeordnet. Der *Wahrheitswert* $[\![A]\!]^h$ einer Formel A unter der Bewertung h ist wie folgt über dem Aufbau von Formeln definiert:

Wahrheitswert

Für Aussagesymbole $A \in \text{AS}$:

$$[\![A]\!]^h := \begin{cases} \text{w} & \text{falls } h(A) = \text{w}, \\ \text{f} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die übrigen aussagenlogischen Formeln:

$$[\![\top]\!]^h := \text{w}$$

$$[\![\bot]\!]^h := \text{f}$$

$$[\![\neg A]\!]^h := \begin{cases} \text{w} & \text{falls } [\![A]\!]^h = \text{f}, \\ \text{f} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$[\![A \wedge B]\!]^h := \begin{cases} \text{w} & \text{falls } [\![A]\!]^h = \text{w und } [\![B]\!]^h = \text{w}, \\ \text{f} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$[\![A \vee B]\!]^h := \begin{cases} \text{w} & \text{falls } [\![A]\!]^h = \text{w oder } [\![B]\!]^h = \text{w}, \\ \text{f} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$[\![A \to B]\!]^h := \begin{cases} \text{w} & \text{falls } [\![A]\!]^h = \text{f oder } [\![B]\!]^h = \text{w}, \\ \text{f} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$[\![A \leftrightarrow B]\!]^h := \begin{cases} \text{w} & \text{falls } [\![A]\!]^h = [\![B]\!]^h \\ \text{f} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel. Sei h eine Bewertung, so dass $h(p) = \text{f}$, und $h(A) = \text{w}$ für alle $A \in \text{AS} \setminus \{p\}$. Gilt $[\![p \vee \neg p]\!]^h = \text{w}$? Es ist $[\![p \vee \neg p]\!]^h = \text{w}$, falls $[\![p]\!]^h = \text{w}$ oder $[\![\neg p]\!]^h = \text{w}$. Es ist $[\![p]\!]^h = \text{w}$, falls $h(p) = \text{w}$; dies ist jedoch nicht der Fall. Es ist aber $[\![\neg p]\!]^h = \text{w}$. Denn $[\![\neg p]\!]^h = \text{w}$, falls $[\![p]\!]^h = \text{f}$. Letzteres gilt, da $h(p) = \text{f}$. Es gilt also $[\![p \vee \neg p]\!]^h = \text{w}$.

Die Wahrheitswertabhängigkeit bei mit logischen Konstanten gebildeten Formeln kann auch durch *Wahrheitstafeln* ausgedrückt werden:

Wahrheitstafeln

Verum

$\top$
w

Falsum

$\bot$
f

Negation

A	$\neg A$
w	f
f	w

Konjunktion

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Disjunktion

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Implikation

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Biimplikation

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Durch die linken Spalten werden jeweils alle Kombinationen von Wahrheitswerten der unmittelbaren Teilformeln A, B einer Formel (z. B. $A \wedge B$) mit angegebenem Hauptkonnektiv erfasst. In der rechten Spalte sind jeweils die Wahrheitswerte der Formel (z. B. $A \wedge B$) für die jeweilige Kombination (eine pro Zeile) von Wahrheitswerten der unmittelbaren Teilformeln A, B angegeben. Im Fall der Negation $\neg A$ gibt es nur eine linke Spalte, da es nur eine unmittelbare Teilformel A gibt; bei Verum und Falsum gibt es keine linke Spalte, da $\top$ und $\bot$ keine unmittelbaren Teilformeln haben.

Beispiel. Sei h die Bewertung mit $h(p) = \text{w}$, $h(q) = \text{f}$ und $h(A) = \text{w}$ für alle übrigen $A \in \text{AS}$. Wir bestimmen den Wahrheitswert der Formel $p \wedge \neg q$ unter h (d. h. $[\![p \wedge \neg q]\!]^h$) schrittweise wie folgt:

(1) Das Hauptkonnektiv von $p \wedge \neg q$ ist $\wedge$. Um den Wahrheitswert der Formel zu bestimmen, müssen wir zunächst die Wahrheitswerte der unmittelbaren Teilformeln p und $\neg q$ bestimmen. Der Wahrheitswert von p ist durch die Bewertung h gegeben. Der Wahrheitswert von $\neg q$ hängt vom Wahrheitswert von q ab. Dieser ist ebenfalls durch h gegeben.

Im ersten Schritt notieren wir die Wahrheitswerte der in der Formel vorkommenden Aussagesymbole gemäß h (die Wahrheitswerte der übrigen Aussagesymbole müssen nicht berücksichtigt werden):

p	q	p	$\wedge$	$\neg$	q
w	f	w			f

(2) Aus der Wahrheitstafel für die Negation entnimmt man den Wahrheitswert von $\neg q$ für $[\![q]\!]^h = \text{f}$. Es ist $[\![\neg q]\!]^h = \text{w}$, was wir unter $\neg$ notieren:

p	q	p	$\wedge$	$\neg$	q
w	f	w		w	f

(3) Aus der Wahrheitstafel für die Konjunktion entnimmt man den Wahrheitswert von $[\![p \wedge \neg q]\!]^h$ für $[\![p]\!]^h = \text{w}$ und $[\![\neg q]\!]^h = \text{w}$, und notiert ihn unter $\wedge$:

p	q	p	$\wedge$	$\neg$	q
w	f	w	w	w	f

Der unter dem Hauptkonnektiv notierte Wahrheitswert ist der gesuchte Wahrheitswert der Formel. Es ist also $[\![p \wedge \neg q]\!]^h = \mathrm{w}$.

In der Semantik der Aussagenlogik haben wir zunächst Bewertungen

$$h : \mathrm{AS} \to \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$$

eingeführt, d. h. Funktionen, die jedem Aussagesymbol einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnen. Auf der Grundlage von Bewertungen haben wird dann die Bedeutung der logischen Konstanten festgelegt, indem wir die Funktionen h zu einer Funktion

$$[\![\ ]\!]^h : \textsc{Formel} \to \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$$

erweitert haben, die jeder Formel A einen Wahrheitswert $[\![A]\!]^h$ zuordnet. Die Bedeutung der logischen Konstanten ist dabei jeweils als Funktion der Wahrheitswerte der unmittelbaren Teilformeln gegeben. Eine Ausnahme bilden Verum und Falsum, deren Bedeutungen durch konstante Funktionen gegeben sind. Jede dieser Funktionen haben wir durch eine Wahrheitstafel dargestellt.
Alternativ kann die Semantik der Aussagenlogik durch Definition einer Relation $h \vDash A$ zwischen Bewertungen h und Formeln A angegeben werden:

Definition 3.3 Die Relation $h \vDash A$ ("*A gilt in h*", "*A ist wahr unter h*"), bzw. $h \nvDash A$ ("*in h gilt A nicht*", "*A ist falsch unter h*") ist wie folgt definiert:

A gilt in h

Für Aussagesymbole $A \in \mathrm{AS}$:

$$h \vDash A \;:\Longleftrightarrow\; h(A) = \mathrm{w}$$

(Entsprechend sei $h \nvDash A \;:\Longleftrightarrow\; h(A) = \mathrm{f}$.)

Für die übrigen aussagenlogischen Formeln:

$$\begin{aligned}
&h \vDash \top \\
&h \nvDash \bot \\
h \vDash \neg A \;&:\Longleftrightarrow\; h \nvDash A \quad (\text{nicht } h \vDash A) \\
h \vDash A \wedge B \;&:\Longleftrightarrow\; h \vDash A \text{ und } h \vDash B \\
h \vDash A \vee B \;&:\Longleftrightarrow\; h \vDash A \text{ oder } h \vDash B \\
h \vDash A \to B \;&:\Longleftrightarrow\; h \nvDash A \text{ oder } h \vDash B \\
&\;\Longleftrightarrow\; \text{Wenn } h \vDash A, \text{ dann } h \vDash B \\
h \vDash A \leftrightarrow B \;&:\Longleftrightarrow\; h \vDash A \text{ genau dann, wenn } h \vDash B
\end{aligned}$$

Bemerkung. Es gilt $h \vDash A$ genau dann, wenn $[\![A]\!]^h = \mathrm{w}$, und es gilt $h \nvDash A$ genau dann, wenn $[\![A]\!]^h = \mathrm{f}$.

Man sieht, dass die Bedeutungen der logischen Konstanten $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ und $\leftrightarrow$ *nicht* etwa dadurch festgelegt werden, dass sie einfach durch natürlichsprachliche Konnektive ("nicht", "und", "oder" , "wenn . . . , dann . . . ", ". . . genau dann, wenn . . . ") interpretiert werden. Es wird *nicht* gesagt, dass z. B.

$$\wedge \;:=\; \text{und}$$

oder

$$A \wedge B \;:\Longleftrightarrow\; A \text{ und } B$$

eine Definition von $\wedge$ sei. Dies wäre schon deshalb problematisch, weil hier links (für Formeln A und B) ein Ausdruck der Objektsprache und rechts ein Ausdruck der Metasprache steht, und weil die bei Definitionen stets geforderte Ersetzbarkeit von Definiendum durch Definiens die Trennung von Objekt- und Metasprache aufheben würde. Es ist also nicht so, dass für die logischen Konstanten lediglich eine Übersetzung in die natürlichsprachlichen Konnektive angegeben wird, durch die erstere dann die Bedeutung letzterer erhielten. Stattdessen werden unter Verwendung der natürlichsprachlichen Konnektive Bedingungen für die Wahrheitswerte von Formeln angegeben, die gelten müssen, damit die aus diesen Formeln mit einer bestimmten logischen Konstante zusammengesetzten Formeln einen bestimmten Wahrheitswert haben.

Bemerkung. Die Bezeichnung "logische *Konstante*" für *Funktionen* von Wahrheitswerten mag verwirrend erscheinen. Die logischen Konstanten sind jedoch konstant in dem Sinn, dass ihre jeweiligen Bedeutungen durch diese Funktionen *festgelegt* sind. Im Gegensatz dazu sind die Bedeutungen der Aussagesymbole *nicht* konstant, da sie je nach Bewertung variiert werden. Verschiedene Bewertungen stellen also verschiedene Interpretationen der Aussagesymbole dar.

In der Logik interessieren wir uns für die Frage, ob der Wahrheitswert einer Formel für verschiedene Bewertungen variiert oder für alle Bewertungen gleich ist. Wir möchten Formeln also auf die folgenden Eigenschaften untersuchen:

Definition 3.4 (i) A heißt *allgemeingültig* (oder *tautologisch* oder *logisch wahr*), falls A unter allen Bewertungen wahr ist (d. h. falls $h \vDash A$ für alle h gilt). Notation: $\vDash A$. *allgemeingültig*

(ii) A heißt *erfüllbar* (oder *konsistent*), falls A unter mindestens einer Bewertung wahr ist (d. h. falls es eine Bewertung h gibt, so dass $h \vDash A$). *erfüllbar*

(iii) A heißt *unerfüllbar* (oder *inkonsistent* oder *kontradiktorisch* oder *logisch falsch*), falls A unter keiner Bewertung wahr ist (d. h. falls $h \nvDash A$ für alle h gilt). *unerfüllbar*

(iv) A heißt *kontingent*, falls A weder allgemeingültig noch unerfüllbar ist. *kontingent*

3.1 Wahrheitstafelverfahren

Wahrheitstafelverfahren

Im *Wahrheitstafelverfahren* wird der Wahrheitswert einer Formel systematisch für alle Bewertungen der in dieser Formel vorkommenden Aussagesymbole bestimmt. Für den Wahrheitswert einer Formel A unter einer Bewertung h sind dabei nur jene Werte von h relevant, die den in A vorkommenden Aussagesymbolen zugeordnet sind. Man überlegt sich leicht, dass Folgendes gilt:

Theorem 3.5 (Koinzidenz) *Sei A eine beliebige Formel, und seien h und h' zwei Bewertungen, so dass für alle in A vorkommenden Aussagesymbole B gilt: $h(B) = h'(B)$. Dann gilt $[\![A]\!]^h = [\![A]\!]^{h'}$.*

Enthält eine Formel A z. B. nur die Aussagesymbole p und q, so genügen zur Bestimmung des Wahrheitswerts von A unter einer Bewertung h die Werte $h(p)$ und $h(q)$. Die Werte $h(B)$ für $B \in \mathrm{AS} \setminus \{p, q\}$ sind irrelevant.
Um festzustellen, ob eine Formel allgemeingültig, erfüllbar, unerfüllbar oder kontingent ist, müssen i. A. alle Bewertungen betrachtet werden. Das heißt, es muss für jede Bewertung der Wahrheitswert der Formel unter der jeweiligen Bewertung bestimmt

werden. Aufgrund von Bivalenz gibt es für jedes Aussagesymbol 2 Bewertungen. Enthält eine Formel $n > 0$ verschiedene Aussagesymbole, so gibt es 2^n Bewertungen, die für den jeweiligen Wahrheitswert der Formel relevant sind. Mit jedem zusätzlichen in einer Formel vorkommenden Aussagesymbol verdoppelt sich also die Anzahl der zu betrachtenden relevanten Bewertungen.
Im Wahrheitstafelverfahren listet man zunächst alle diese Bewertungen zeilenweise auf, wobei für jedes Aussagesymbol eine Spalte anzulegen ist. Dann bestimmt man den Wahrheitswert der Formel schrittweise für jede Bewertung, d. h. zeilenweise. Unter dem Hauptkonnektiv der Formel stehen dann die jeweiligen Wahrheitswerte der Formel in einer Spalte, der *Hauptspalte*.
Anhand der Hauptspalte kann nun eine Aussage über Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit oder Kontingenz der Formel gemacht werden.

Beispiele. (Wir verzichten der Übersichtlichkeit halber auf die Wiederholung der Wahrheitswerte der Aussagesymbole auf der rechten Seite, und schreiben die Wahrheitswerte in der Hauptspalte fett.)

(i) Die Formel $\neg\neg p \to p$ enthält als einziges Aussagesymbol p, d. h. es sind $2^1 = 2$ Bewertungen zu betrachten. Man legt also eine Wahrheitstafel für $\neg\neg p \to p$ an wie folgt:

p	$\neg$	$\neg$	p	$\to$	p
w					
f					

Nun bestimmt man den Wahrheitswert der Formel zeilenweise Schritt für Schritt (in derselben Wahrheitstafel):

(1)

p	$\neg$	$\neg$	p	$\to$	p
w		f			
f					

(2)

p	$\neg$	$\neg$	p	$\to$	p
w	w	f			
f					

(3)

p	$\neg$	$\neg$	p	$\to$	p
w	w	f		**w**	
f					

An dieser Stelle können wir schon eine Aussage über die Erfüllbarkeit der Formel machen: Es gibt eine Bewertung (die erste) unter der die Formel wahr ist; die Formel ist also erfüllbar. Um noch herauszufinden, ob die Formel auch allgemeingültig oder kontingent ist, müssen wir die verbleibende Bewertung untersuchen:

(4)

p	$\neg$	$\neg$	p	$\to$	p
w	w	f		**w**	
f		w			

(5)

p	$\neg$	$\neg$	p	$\to$	p
w	w	f		**w**	
f	f	w			

(6)

p	$\neg$	$\neg$	p	$\to$	p
w	w	f		**w**	
f	f	w		**w**	

Die Hauptspalte enthält für jede Bewertung den Wahrheitswert w; die Formel ist also auch allgemeingültig.

(ii) Die Formel $p \vee q \to p$ enthält 2 Aussagesymbole p, q, d. h. es sind $2^2 = 4$ Bewertungen zu betrachten. Wahrheitstafel für $p \vee q \to p$:

p	q	p	$\vee$	q	$\to$	p
w	w		w		**w**	
w	f		w		**w**	
f	w		w		**f**	
f	f		f		**w**	

Die Formel ist erfüllbar und kontingent.

(iii) Die Formel $\top \to \bot$ enthält kein Aussagesymbol. Es sind daher keine Bewertungen zu betrachten; der Wahrheitswert der Formel hängt allein von der Bedeutung der logischen Konstanten $\top$, $\bot$ und $\to$ ab. Wahrheitstafel für $\top \to \bot$:

$\top$	$\to$	$\bot$
w	**f**	f

Es gibt keine Bewertung, unter der die Formel wahr ist. Die Formel ist also unerfüllbar.

(iv) Wahrheitstafel für $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$:

p	q	$(p \to q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg\, q$	$\to$	$\neg\, p)$
w	w	w	**w**	f	w	f
w	f	f	**w**	w	f	f
f	w	w	**w**	f	w	w
f	f	w	**w**	w	w	w

Die Formel ist erfüllbar und allgemeingültig.

3.2 Logische Folgerung

Der Begriff der logischen Folgerung ist einer der zentralen Begriffe der Logik. Er entspricht dem für natürlichsprachliche Aussagen angegebenen Begriff der Gültigkeit eines Schlusses, wobei an die Stelle natürlichsprachlicher Aussagen nun Formeln treten.

Modell von A

Definition 3.6 Ist eine Formel A unter einer Bewertung h wahr (d. h. $[\![A]\!]^h = \mathrm{w}$, bzw. $h \vDash A$), so heißt h *Modell von A*. (Man sagt dann auch, dass A die Bewertung h als Modell hat.)
Sei Γ eine Menge von Formeln und h eine Bewertung. Dann heißt h *Modell* von Γ, falls h ein Modell aller Formeln $A \in \Gamma$ ist (Notation: $h \vDash \Gamma$).

logische Folgerung

Definition 3.7 Aus Γ *folgt (aussagen-)logisch A* (Notation: $\Gamma \vDash A$), falls jedes Modell von Γ ein Modell von A ist. Das heißt

$$\Gamma \vDash A \;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle Bewertungen } h\text{: Wenn } h \vDash \Gamma\text{, dann } h \vDash A.$$

Man sagt auch: Γ *impliziert* (*logisch*) A. Die Formeln in Γ heißen in diesem Zusammenhang *Prämissen*, und die Formel A heißt *Konklusion*.

Bemerkungen. (i) Wir verwenden das Zeichen "$\vDash$" sowohl für die Modellbeziehung $h \vDash A$, bzw. $h \vDash \Gamma$, als auch für die logische Folgerung ($\Gamma \vDash A$). Die jeweilige Bedeutung ist aber durch den Bezug auf entweder ein Modell h oder auf eine Formelmenge Γ eindeutig.

(ii) Mengen von Formeln schreiben wir auch als kommaseparierte Listen der in der jeweiligen Menge enthaltenen Formeln. Die Liste $A_1, \ldots, A_n$ steht für die Menge $\{A_1, \ldots, A_n\}$; die Liste Γ, A steht für die Menge $\Gamma \cup \{A\}$ (d. h. für die Vereinigung von Γ und $\{A\}$). Ist Γ die leere Menge $\emptyset$, schreiben wir $\vDash A$ statt $\emptyset \vDash A$.

(iii) Die Definition der logischen Folgerung beruht auf der Idee der Wahrheitskonservierung: Eine Folgerungsbehauptung $\Gamma \vDash A$ gilt genau dann, wenn stets für wahre Prämissen Γ auch die Konklusion A wahr ist.

Beispiele. Überprüfung der logischen Folgerung unter Verwendung von Wahrheitstafeln:

(i) Gilt die Folgerungsbehauptung $p \vee q, \neg p \vDash q$?

	p	q	$p \vee q$	$\neg\, p$	$\vDash$	q
	w	w	w	f		w
	w	f	w	f		f
→	f	w	w	w	✓	w
	f	f	f	w		f

Es gibt nur eine Bewertung, unter der alle Prämissen wahr sind (dritte Zeile). Unter dieser Bewertung ist auch die Konklusion q wahr. Die Konklusion q ist also unter allen Bewertungen wahr, unter denen auch die Prämissen $p \vee q, \neg p$ wahr sind. Somit gilt $p \vee q, \neg p \vDash q$.

(ii) Gilt die Folgerungsbehauptung $p \vee q, p \vDash q$?

	p	q	$p \vee q$	p	$\vDash$	q
→	w	w	w	w	✓	w
→	w	f	w	w	✗	f
	f	w	w	f		w
	f	f	f	f		f

Es gibt zwei Bewertungen, unter denen alle Prämissen wahr sind (erste und zweite Zeile). Allerdings ist die Konklusion q unter der zweiten Bewertung falsch. Es ist also $p \vee q, p \nvDash q$, d. h. $p \vee q, p \vDash q$ gilt nicht.

(iii) Gilt die Folgerungsbehauptung $p \to (q \to r), p \wedge q \vDash r$?

Es kommen 3 Aussagesymbole vor, die jeweils einen der 2 Wahrheitswerte w und f annehmen können. Das heißt, es müssen $2^3 = 8$ Bewertungen betrachtet werden; wir benötigen also eine Wahrheitstafel mit 8 Zeilen.

	p	q	r	$p \to (q \to r)$		$p \wedge q$	$\vDash$	r
→	w	w	w	w	w	w	✓	w
	w	w	f	f	f	w		f
	w	f	w	w	w	f		w
	w	f	f	w	w	f		f
	f	w	w	w	w	f		w
	f	w	f	w	f	f		f
	f	f	w	w	w	f		w
	f	f	f	w	w	f		f

Die Folgerungsbehauptung gilt. Es gibt nur eine Bewertung, unter der alle Prämissen wahr sind (erste Zeile), und unter dieser Bewertung ist auch die Konklusion wahr.

Für das Verhältnis zwischen logischer Folgerung und Implikation gilt Folgendes:

Theorem 3.8 (Import-Export) *$A_1, \ldots, A_n \vDash B$ genau dann, wenn $\vDash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$.*

Beweis. Das Theorem enthält die beiden Aussagen

(i) Wenn $A_1, \ldots, A_n \vDash B$, dann $\vDash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$. (*Import*)

(ii) Wenn $\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$, dann $A_1, \ldots, A_n \models B$. (*Export*)

Zu (i): Angenommen $A_1, \ldots, A_n \models B$.
Es sei h eine beliebige Bewertung. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: h ist ein Modell von $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, d. h. $h \models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$.

   Nach Definition der Konjunktion ist dann $h \models A_1, \ldots, h \models A_n$. Aufgrund der Annahme ist h dann auch ein Modell von B, d. h. $h \models B$.

   Mit der Definition der Implikation folgt dann $h \models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$.

2. Fall: h ist kein Modell von $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, d. h. $h \not\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$.

   Nach Definition der Implikation gilt dann $h \models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$.

In beiden Fällen gilt $h \models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$.
Da h beliebig ist, ist $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ allgemeingültig, d. h. $\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$.

Zu (ii): Angenommen $\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$.
Es sei h ein Modell von $A_1, \ldots, A_n$, d. h. $h \models A_1, \ldots, h \models A_n$. Nach Definition der Konjunktion gilt dann $h \models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$.
Nach Annahme ist $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ allgemeingültig. Dies schließt wegen $h \models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ den Fall $h \not\models B$ aus, da sonst $\not\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$. Also muss $h \models B$ gelten. Somit gilt $A_1, \ldots, A_n \models B$. QED

Insbesondere gilt für $n = 1$:

Korollar 3.9 *$A \models B$ genau dann, wenn $\models A \to B$.*

Bemerkung. Der Nachweis, dass eine Folgerungsbehauptung $A \models B$ gilt, kann also durch den Nachweis der Allgemeingültigkeit von $A \to B$ erfolgen und umgekehrt.
Man beachte, dass hier *nicht* etwa gesagt wird, dass die logische Folgerung $A \models B$ der Implikation $A \to B$ entspricht und umgekehrt; was gesagt wird, ist, dass $A \models B$ genau dann gilt, wenn $A \to B$ *allgemeingültig* ist.
Dass Implikation und logische Folgerung nicht dasselbe ist, macht man sich leicht an einem Beispiel klar: Angenommen, man weiß, dass $h \not\models A$ und $h \models B$. Dann weiß man, dass $h \models A \to B$, d. h. dass $A \to B$ in diesem Fall wahr ist. Hingegen weiß man nicht, ob $A \models B$ gilt.

Bemerkung. Die *klassische Aussagenlogik* ist durch die Relation der logischen Folgerung, bzw. durch die Menge der allgemeingültigen aussagenlogischen Formeln, gegeben. *klassische Aussagenlogik*

Theorem 3.10 (Entscheidbarkeit der Aussagenlogik) *Die klassische Aussagenlogik ist entscheidbar. Das heißt, es gibt ein Verfahren, das für jede aussagenlogische Formel in endlich vielen Schritten entscheidet, ob die Formel allgemeingültig ist oder nicht.*

Beweis. Das Wahrheitstafelverfahren ist ein solches Verfahren. QED

Bemerkung. Für die auf endliche Prämissenmengen eingeschränkte aussagenlogische Folgerung stellt das Wahrheitstafelverfahren ebenfalls ein Entscheidungsverfahren dar.

Bemerkung. Ein *Formelschema*, wie z. B. $(A \vee B) \leftrightarrow C$, steht für beliebige Formeln von bestimmter Form. Das Wahrheitstafelverfahren kann auch auf Formelschemata *Formelschema* angewendet werden. Dabei ist jedoch der Unterschied zwischen Formel, z. B. $(p \vee q) \leftrightarrow r$, und Formel*schema*, z. B. $(A \vee B) \leftrightarrow C$, zu beachten. Zum Beispiel ist

A	B	$A \to B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

eine Wahrheitstafel für das Formelschema $A \to B$, das für beliebige Formeln mit dem Hauptkonnektiv $\to$ steht. Anders als bei konkreten Formeln stehen hier links keine Bewertungen, sondern die möglichen Wahrheitswerte von A und B. Die für Formeln über Bewertungen definierten Begriffe *allgemeingültig*, *erfüllbar*, *unerfüllbar* und *kontingent* sind deshalb nicht ohne Weiteres auf Formelschemata anwendbar.
So bedeutet z. B. die Behauptung $\vDash A \vee \neg A$ strenggenommen nicht, dass das Formelschema $A \vee \neg A$ allgemeingültig ist, sondern dass alle Instanzen von $A \vee \neg A$, wie z. B. $(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)$ oder $p \vee \neg p$, allgemeingültige Formeln sind.
Kommt in der Hauptspalte der Wahrheitstafel eines Formelschemas sowohl w als auch f vor, so schließt dies nicht aus, dass Instanzen des Schemas allgemeingültige oder unerfüllbare Formeln sein können. So ist z. B. die Formel $p \to p$ eine allgemeingültige Instanz des Schemas $A \to B$, während die Formel $\top \to \bot$ eine unerfüllbare Instanz ist. Das Formelschema $A \to B$ mit Blick auf die Hauptspalte als kontingent zu bezeichnen, wäre irreführend, da nicht alle Instanzen des Schemas kontingente Formeln sind.
Falls in der Hauptspalte der Wahrheitstafel eines Formelschemas nur w vorkommt, sind jedoch alle Instanzen allgemeingültige Formeln. Kommt nur f vor, sind alle Instanzen unerfüllbare Formeln. In diesen beiden Fällen ist die Bezeichnung des jeweiligen Schemas als allgemeingültig, bzw. unerfüllbar, unproblematisch.

3.3 Logische Äquivalenz

Definition 3.11 Zwei Formeln A und B heißen *logisch äquivalent*, falls $A \vDash B$ und $B \vDash A$. Notation: $A \dashv\vDash B$.

logisch äquivalent

Theorem 3.12 *Logische Äquivalenz $\dashv\vDash$ ist eine Äquivalenzrelation, d. h. es gilt:*

(i) Reflexivität: $A \dashv\vDash A$.

(ii) Symmetrie: Wenn $A \dashv\vDash B$, dann $B \dashv\vDash A$.

(iii) Transitivität: Wenn $A \dashv\vDash B$ und $B \dashv\vDash C$, dann $A \dashv\vDash C$.

Beweis. Einfache Überlegungen zu Wahrheitstafeln. QED

Beispiel. Es sei A die Formel $p \vee \top$, B die Formel $\top$, und C die Formel $p \vee \neg p$.
Es gilt $p \vee \top \dashv\vDash \top$ und $p \vee \neg p \dashv\vDash \top$. Mit (ii) gilt $\top \dashv\vDash p \vee \neg p$, und mit (iii) auch $p \vee \top \dashv\vDash p \vee \neg p$.

Aufgrund von Theorem 3.12 können für schon gegebene logische Äquivalenzen weitere Äquivalenzen angegeben werden. Dabei werden immer ganze Formeln in Relation zueinander gesetzt. Um in einer gegebenen Formel auch beliebige Teilformeln durch zu diesen äquivalente Formeln ersetzen zu können, benötigen wir das folgende Theorem.

Theorem 3.13 (Ersetzungstheorem) *Es sei A eine Teilformel von B, und es sei B' das Resultat der Ersetzung von A durch A' in B. Dann gilt $B \Dashv\vDash B'$, falls $A \Dashv\vDash A'$.*

Beweis. Wegen $A \Dashv\vDash A'$ ist die Hauptspalte der Wahrheitstafel für A identisch mit der Hauptspalte für A'. Durch Ersetzung von A durch A' in B ändert sich somit an der Hauptspalte von B' nichts. Also gilt $B \Dashv\vDash B'$. QED

Beispiel. Sei A die Formel $p \vee q$ und B die Formel $(p \vee q) \wedge r$.

Da $\overbrace{p \vee q}^{A} \Dashv\vDash \overbrace{q \vee p}^{A'}$, gilt auch $\underbrace{\overbrace{(p \vee q)}^{A} \wedge r}_{B} \Dashv\vDash \underbrace{\overbrace{(q \vee p)}^{A'} \wedge r}_{B'}$.

Wichtige Äquivalenzen und Folgerungen

Für beliebige Formeln A, B, C und D gilt:

Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$

$$A \wedge B \Dashv\vDash B \wedge A$$
$$A \vee B \Dashv\vDash B \vee A$$

Assoziativität von $\wedge$ und $\vee$

$$(A \wedge B) \wedge C \Dashv\vDash A \wedge (B \wedge C)$$
$$(A \vee B) \vee C \Dashv\vDash A \vee (B \vee C)$$

Distributivität von $\vee$ und $\wedge$

$$(A \wedge B) \vee C \Dashv\vDash (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$
$$(A \vee B) \wedge C \Dashv\vDash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

De Morgansche Gesetze

$$\neg(A \wedge B) \Dashv\vDash \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \Dashv\vDash \neg A \wedge \neg B$$

Verschmelzung

$$(A \wedge B) \vee A \Dashv\vDash A$$
$$(A \vee B) \wedge A \Dashv\vDash A$$

Idempotenz

$$A \wedge A \Dashv\vDash A$$
$$A \vee A \Dashv\vDash A$$

Extremalität von $\top$ und $\bot$

$$A \vee \top \Dashv\vDash \top$$
$$A \wedge \bot \Dashv\vDash \bot$$

Neutralität von $\top$ und $\bot$

$$A \wedge \top \Dashv\vDash A$$
$$A \vee \bot \Dashv\vDash A$$

Satz vom
ausgeschlossenen Widerspruch

$$A \wedge \neg A \Dashv\vDash \bot$$
$$\vDash \neg(A \wedge \neg A)$$

Satz vom ausgeschlossenen Dritten
(tertium non datur)

$$A \vee \neg A \Dashv\vDash \top$$
$$\vDash A \vee \neg A$$

doppelte Negation

$$\neg\neg A \Dashv\vDash A$$

Transitivität von $\rightarrow$

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vDash A \rightarrow C$$

Implikationsgesetze

$$A \vee B \rightarrow C \Dashv\vDash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$$
$$A \wedge B \rightarrow C \Dashv\vDash (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$$
$$A \rightarrow B \wedge C \Dashv\vDash (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$$
$$A \rightarrow B \vee C \Dashv\vDash (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$$

weitere Implikationsgesetze

$$A \rightarrow \bot \Dashv\vDash \neg A$$
$$\top \rightarrow A \Dashv\vDash A$$
$$\neg A \rightarrow \bot \Dashv\vDash A$$
$$A \rightarrow B \Dashv\vDash \neg A \vee B$$

modus (ponendo) ponens

$$A \to B, A \vDash B$$

modus (tollendo) tollens

$$A \to B, \neg B \vDash \neg A$$

Kontraposition

$$A \to B \Dashv\vDash \neg B \to \neg A$$

Importation (“$\vDash$”), *Exportation* (“$\Dashv$”)

$$A \to (B \to C) \Dashv\vDash A \wedge B \to C$$

praeclarum theorema

$$(A \to B) \wedge (D \to C) \vDash (A \wedge D) \to (B \wedge C)$$

Biimplikationsgesetz

$$A \leftrightarrow B \Dashv\vDash (A \to B) \wedge (B \to A)$$

(Zur Bedeutung der Bezeichnungen *modus (ponendo) ponens* und *modus (tollendo) tollens* siehe J. Mittelstraß (Hrsg.), *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, J. B. Metzler, 2005. Das *praeclarum theorema* geht auf Leibniz zurück.)

Unter Verwendung von Theorem 3.12, Ersetzungstheorem und schon gezeigter logischer Äquivalenzen können durch *Äquivalenzumformungen* weitere logische Äquivalenzen gezeigt werden.

Äquivalenzumformung

Beispiel. Wir zeigen durch Äquivalenzumformung $p \vee q \to r \Dashv\vDash (p \to r) \wedge (q \to r)$:

$$\begin{aligned}
p \vee q \to r &\Dashv\vDash \neg(p \vee q) \vee r && (A \to B \Dashv\vDash \neg A \vee B)\\
&\Dashv\vDash (\neg p \wedge \neg q) \vee r && (\text{De Morgan})\\
&\Dashv\vDash (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) && (\text{Distributivität von } \vee)\\
&\Dashv\vDash (p \to r) \wedge (\neg q \vee r) && (A \to B \Dashv\vDash \neg A \vee B)\\
&\Dashv\vDash (p \to r) \wedge (q \to r) && (A \to B \Dashv\vDash \neg A \vee B)
\end{aligned}$$

Im 2., 4. und 5. Umformungsschritt wird bei der Verwendung der im Kommentar vermerkten Äquivalenzen auch das Ersetzungstheorem verwendet. Zum Beispiel wird im 2. Schritt zur Umformung der Teilformel $\neg(p \vee q)$ die Äquivalenz

$$\underbrace{\neg(p \vee q)}_{A} \Dashv\vDash \underbrace{\neg p \wedge \neg q}_{A'}$$

verwendet (dies ist eine Instanz des De Morganschen Gesetzes $\neg(C \vee D) \Dashv\vDash \neg C \wedge \neg D$), um aufgrund des Ersetzungstheorems die Äquivalenz

$$\underbrace{\underbrace{\neg(p \vee q)}_{A} \vee r}_{B} \Dashv\vDash \underbrace{\underbrace{(\neg p \wedge \neg q)}_{A'} \vee r}_{B'}$$

zu erhalten.
Im 1. und 3. Schritt wird das Ersetzungstheorem nicht benötigt, da die im Kommentar vermerkten Äquivalenzen hier nicht auf echte Teilformeln angewendet werden, sondern auf ganze Formeln. Es ist

$$\underbrace{p \vee q}_{A} \to \underbrace{r}_{B} \Dashv\vDash \underbrace{\neg(p \vee q)}_{\neg A} \vee \underbrace{r}_{B}$$

eine Instanz von $A \to B \Dashv\vDash \neg A \vee B$, und

$$(\underbrace{\neg p}_{A} \wedge \underbrace{\neg q}_{B}) \vee \underbrace{r}_{C} \Dashv\vDash (\underbrace{\neg p}_{A} \vee \underbrace{r}_{C}) \wedge (\underbrace{\neg q}_{B} \vee \underbrace{r}_{C})$$

ist eine Instanz von $(A \land B) \lor C \dashv\vDash (A \lor C) \land (B \lor C)$. Die beiden Schritte können damit unter impliziter Verwendung von Reflexivität (nur im 1. Schritt) und Transitivität (im 1. und 3. Schritt) ausgeführt werden. Alternativ kann auch hier das Ersetzungstheorem verwendet werden, da es den Fall einschließt, dass die im Theorem genannte Teilformel A von B identisch mit B ist.

3.4 Formalisierung

Um natürlichsprachliche Aussagen oder Argumente mit den Mitteln der Logik zu untersuchen, müssen diese zunächst formalisiert werden. Unter *Formalisierung* versteht man die Übersetzung einer natürlichsprachlichen Aussage in eine aussagenlogische Formel. Die Übersetzung erfolgt in zwei Schritten: Zunächst versucht man, die Ausgangsaussage zu einer möglichst adäquaten, aber eindeutigen Aussage umzuformulieren, in der nach Möglichkeit nur noch solche natürlichsprachlichen Konnektive vorkommen, die den bisher behandelten logischen Konstanten der Aussagenlogik entsprechen. Diese Konnektive bezeichnen wir im Folgenden als *Standardkonnektive*:

Formalisierung

Name	*natürlichsprachliches Konnektiv*	*logische Konstante*
Negation	es ist nicht der Fall, dass	$\neg$
Konjunktion	und	$\land$
Disjunktion	oder	$\lor$
Implikation	wenn . . . , dann . . .	$\rightarrow$
Biimplikation	genau dann, wenn	$\leftrightarrow$

Aussagen wie “Der Mensch ist Mensch” entsprechen dem Verum $\top$, Aussagen wie “$0 = 1$” dem Falsum $\bot$. Das in den Übungen behandelte Konnektiv “entweder . . . , oder . . . ” ($\oplus$) kann ebenfalls verwendet werden.

Im zweiten Schritt werden die Teilaussagen der so umformulierten Aussage dann durch Aussagesymbole ersetzt, und die natürlichsprachlichen Konnektive werden durch die entsprechenden logischen Konstanten ersetzt. Als Ergebnis erhält man eine aussagenlogische Formel. Im Fall natürlichsprachlicher Argumente erhält man für jede Prämisse sowie für die Konklusion jeweils eine Formel.

Im Anschluss an die Formalisierung einer Aussage kann die resultierende Formel dann z. B. mit dem Wahrheitstafelverfahren auf Eigenschaften wie Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit usw. untersucht werden, bzw. kann im Fall formalisierter Argumente überprüft werden, ob die dem natürlichsprachlichen Ausgangsargument entsprechende Folgerungsbehauptung gilt oder nicht.

Vorausgesetzt, die Formalisierung war adäquat, gelten die für die Formel festgestellten Eigenschaften auch für die natürlichsprachliche Ausgangsaussage. Unter derselben Voraussetzung kann anhand der Folgerungsbehauptung eine Aussage über die Gültigkeit des Ausgangsarguments gemacht werden.

Der zweite Schritt der Formalisierung ist unproblematisch. Der erste Schritt ist im Allgemeinen schwierig, da man sich z. B. bei einer mehrdeutigen Ausgangsaussage für eine Interpretation entscheiden muss, und in der Ausgangsaussage Konnektive vorkommen können, die keiner der bisher behandelten logischen Konstanten entsprechen. Letzteres erfordert eine Umformulierung mit Standardkonnektiven, wobei der Gehalt der Ausgangsaussage natürlich erhalten bleiben soll. Die Formalisierung ist in der Regel nicht eindeutig, kann aber im Fall mehrdeutiger Ausgangsaussagen eine nützliche Präzisierung beinhalten.

Im ersten Schritt kann wie folgt vorgegangen werden:

(1) Falls möglich und nötig, wird die Ausgangsaussage soweit umformuliert, dass man eine Aussage erhält, die mit einem wahrheitsfunktionalen Konnektiv aus einer oder zwei Teilaussagen zusammengesetzt ist.

Falls die Ausgangsaussage schon diese Form hat, geht man zu (2).

Andernfalls klammert man die Aussage ein, und geht zu (4).

(2) Falls das in (1) behandelte Konnektiv kein Standardkonnektiv ist, formuliert man die Aussage unter Verwendung von Standardkonnektiven um.

(3) Falls die Aussage nicht die Form einer Negation hat, klammert man sie ein.

(4) Gehe zu (1), wobei als Ausgangsaussage nun eine der zuvor bestimmten Teilaussagen behandelt wird. Falls keine neuen Teilaussagen bestimmt wurden, hört man auf.

Beispiel. Ausgangsaussage: "Es ist l oder m prim, falls k nicht elitär ist."

(1) Es ist nichts zu tun, da die Ausgangsaussage schon mit dem wahrheitsfunktionalen Konnektiv "..., falls ..." aus zwei Teilaussagen zusammengesetzt ist.

(2) Da "..., falls ..." aber kein Standardkonnektiv ist, formuliert man die Aussage um in

Wenn k nicht elitär ist, dann ist l oder m prim.

(3) Da die Aussage nicht die Form einer Negation hat, klammert man sie ein:

(Wenn k nicht elitär ist, dann ist l oder m prim)

(4) Wir gehen zu (1), und betrachten als Ausgangsaussage die Teilaussage "k nicht elitär ist".

(1) Eine Umformulierung ist möglich und nötig. Man erhält:

Es ist nicht der Fall, dass k elitär ist.

(2) Wir haben schon im vorhergehenden Schritt mit einem Standardkonnektiv umformuliert.

(3) Keine Klammerung, da die Aussage die Form einer Negation hat.

(4) Wir gehen zu (1) und betrachten als Ausgangsaussage die Teilaussage "Es ist l oder m prim".

(1) Eine Umformulierung ist nötig, da die Aussage nicht mit einem wahrheitsfunktionalen Konnektiv aus zwei Teilaussagen zusammengesetzt ist, und möglich:

l ist prim oder m ist prim.

(2) Es ist nichts zu tun, da "oder" ein Standardkonnektiv ist.

(3) Einklammern, da keine Negation:

(l ist prim oder m ist prim)

(4) Wir gehen zu (1) und betrachten als Ausgangsaussage die Teilaussage "l ist prim".

(1) Eine Umformulierung ist nicht möglich; die Aussage wird eingeklammert:

(l ist prim)

(4) Wir gehen zu (1) und betrachten als Ausgangsaussage die Teilaussage “m ist prim”.

(1) Eine Umformulierung ist nicht möglich; die Aussage wird eingeklammert:

(m ist prim)

(4) Wir gehen zu (1) und betrachten als Ausgangsaussage die (leicht geglättete) Teilaussage “k ist elitär”.

(1) Eine Umformulierung ist nicht möglich; die Aussage wird eingeklammert:

(k ist elitär)

(4) Wir sind fertig, da keine neuen Teilaussagen bestimmt wurden.

Das (etwas holprige) Ergebnis ist:

(Wenn es ist nicht der Fall, dass (k ist elitär), dann ((l ist prim) oder (m ist prim)))

Bemerkung. Auf die Angabe aller Teilschritte verzichtet man normalerweise. Sie dient hier nur der Erläuterung.

Im zweiten Schritt geschieht Folgendes:

(A) Jede Teilaussage, in der kein Standardkonnektiv vorkommt, wird durch ein Aussagesymbol ersetzt, wobei gleiche Teilaussagen durch gleiche Aussagesymbole, ungleiche Teilaussagen durch verschiedene Aussagesymbole ersetzt werden.

(B) Die Ersetzung wird in einer Liste notiert:

$$\begin{array}{c}
\langle\text{Aussagesymbol}_1\rangle : \langle\text{ersetzte Teilaussage}_1\rangle\\
\vdots\\
\langle\text{Aussagesymbol}_n\rangle : \langle\text{ersetzte Teilaussage}_n\rangle
\end{array}$$

(C) Klammern um Aussagesymbole werden entfernt.

(D) Die Standardkonnektive werden durch die entsprechenden logischen Konstanten ersetzt.

Beispiel. Wir führen den zweiten Schritt der Formalisierung für

(Wenn es ist nicht der Fall, dass (k ist elitär), dann ((l ist prim) oder (m ist prim)))

aus:

(A) Ersetzung der Teilaussagen ohne Standardkonnektive durch Aussagesymbole:

(Wenn es ist nicht der Fall, dass (p), dann ((q) oder (r)))

(B) Notierung der Ersetzung in einer Liste:

p: k ist elitär
q: l ist prim
r: m ist prim

(C) Klammern um Aussagesymbole entfernen:

(Wenn es ist nicht der Fall, dass p, dann (q oder r))

(D) Ersetzung der Standardkonnektive durch logische Konstanten:

(Wenn $\neg p$, dann (q oder r))
(Wenn $\neg p$, dann $(q \vee r)$)
$(\neg p \to (q \vee r))$

Die Formel $(\neg p \to (q \vee r))$ ist das Resultat der Formalisierung der natürlichsprachlichen Ausgangsaussage "Es ist l oder m prim, falls k nicht elitär ist".

Bemerkung. Auch hier diente die Angabe aller Teilschritte nur der Erläuterung. In der Regel kann die gesuchte Formel direkt angegeben werden. Wichtig ist die Angabe des "Wörterbuchs" gemäß (B), das die Verbindung zwischen natürlichsprachlicher Ausgangsaussage und aussagenlogischer Formel herstellt.

Bemerkung. Die Formel p, wobei

p: Es ist l oder m prim, falls k nicht elitär ist

wäre keine adäquate Formalisierung der Aussage "Es ist l oder m prim, falls k nicht elitär ist".

Beispiele.

(i) Die Ausgangsaussage

k ist elitär, und l ist prim, oder m ist prim

ist mehrdeutig. Je nachdem, ob man die Aussage als

((k ist elitär) und ((l ist prim) oder (m ist prim)))

oder als

(((k ist elitär) und (l ist prim)) oder (m ist prim))

liest, erhält man als Formalisierung mit

p: k ist elitär
q: l ist prim
r: m ist prim

die Formel $(p \wedge (q \vee r))$ oder die Formel $((p \wedge q) \vee r)$.

(ii) In der Ausgangsaussage

Man weiß, dass alle Menschen groß oder klein sind

kommt mit "man weiß, dass" ein nicht-wahrheitsfunktionales Konnektiv vor, das nicht durch ein wahrheitsfunktionales Konnektiv mit der Teilaussage "alle Menschen sind groß oder klein" ersetzt werden kann. Zudem kann der Quantor "alle" im Rahmen der Aussagenlogik nicht behandelt werden. Um dennoch eine Aussage zu erhalten, die mit einem wahrheitsfunktionalen Konnektiv aus zwei Teilaussagen zusammengesetzt ist, könnte man die Aussage bezüglich des "oder" umformulieren zu

((Man weiß, dass alle Menschen groß sind) oder (man weiß, dass alle Menschen klein sind))

Doch dies wäre keine adäquate Umformulierung.

Eine Formalisierung der Ausgangsaussage ist in diesem Fall die Formel p, wobei

p: Man weiß, dass alle Menschen groß oder klein sind

(iii) Wir formalisieren das Argument

Wenn die Tafel grün ist, dann scheint die Sonne. Die Sonne scheint nicht.
Also ist die Tafel nicht grün.

Im ersten Schritt erhält man für die Prämissen

(Wenn (die Tafel ist grün), dann (die Sonne scheint))
Es ist nicht der Fall, dass (die Sonne scheint)

und für die Konklusion

Es ist nicht der Fall, dass (die Tafel ist grün).

Im zweiten Schritt erhält man mit

p: die Tafel ist grün
q: die Sonne scheint

die Formeln $(p \to q)$ und $\neg q$ als Prämissen, und die Formel $\neg p$ als Konklusion. Mit dem Wahrheitstafelverfahren stellt man fest, dass die Folgerungsbehauptung $(p \to q), \neg q \vDash \neg p$ gilt. Die Formalisierung ist adäquat; es kann also auch auf die Gültigkeit des natürlichsprachlichen Ausgangsarguments geschlossen werden.

Kurzer Rückblick

Ausgehend von der Betrachtung natürlichsprachlicher Aussagen und Argumente haben wir zunächst die formale Sprache der Aussagenlogik eingeführt, um anschließend die formale Aussagenlogik zu behandeln. Formalisierungen stellen einen Übergang von natürlicher zu formaler Sprache dar, so dass eine Anwendung der formalen Aussagenlogik ermöglicht wird. Für das Verhältnis zwischen natürlicher und formaler Sprache bzw. Aussagenlogik ergibt sich damit folgendes Bild:

Natürliche Sprache		*formale Sprache, formale Aussagenlogik*
– Argumente bestehen aus Aussagen – Nicht immer eindeutig, was eine Aussage ist – Bivalenzprinzip: Aussagen sind entweder wahr oder falsch – Argument gültig, falls für jede Interpretation, unter der die Prämissen wahr sind, auch die Konklusion wahr ist – Idee der Wahrheitskonservierung		
		Einführung einer formalen Sprache
Aussagen	← stehen für	Formeln (immer eindeutig)
		Semantik der Aussagenlogik – Logische Konstanten erhalten Bedeutung – Bivalenzprinzip: Aussagesymbole bedeuten entweder w oder f – Wahrheitsfunktionalität: logische Konstanten als Funktionen von Wahrheitswerten
verschiedene Interpretationen von Aussagen	← modelliert	verschiedene Bewertungen der Aussagesymbole
		Semantische Eigenschaften von Formeln – Allgemeingültigkeit etc. – Untersuchung mit Wahrheitstafeln
Begriff der Gültigkeit	← präzisiert	Begriff der logischen Folgerung

Formalisierung

Brücke zwischen natürlicher und formaler Sprache

Aussagen	Übersetzung in →	Formeln
Argumente	Übersetzung in →	Folgerungsbehauptungen $\Gamma \vDash A$
Beurteilung von Aussage oder Argument	← Rückschluss, falls Übersetzung adäquat	Untersuchung mit formalen Mitteln

4 Normalformen und funktionale Vollständigkeit

Bisher haben wir uns auf wenige logische Konstanten beschränkt:

- 0-stellige: $\top$, $\bot$,
- 1-stellige: $\neg$,
- 2-stellige: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Definition 4.1 Die *Stelligkeit* einer logischen Konstante ist die Anzahl der unmittelbaren Teilformeln, die durch die logische Konstante miteinander verbunden werden. (Im Fall natürlichsprachlicher Konnektive ist dies die Anzahl der unmittelbaren Teilaussagen.)

Stelligkeit

Bemerkung. Für logische Konstanten haben wir *Infixnotation* verwendet, und z. B. $(A \wedge B)$ oder $\neg A$ geschrieben. Stattdessen kann auch *Präfixnotation* verwendet werden, bei der man z. B. $\wedge(A, B)$ statt $(A \wedge B)$ und $\neg(A)$ statt $\neg A$ schreibt. Logische Konstanten K beliebiger Stelligkeit n können in Präfixnotation als $K(A_1, \ldots, A_n)$ geschrieben werden.

Infixnotation
Präfixnotation

Dass weitere logische Konstanten hinzugenommen werden können, haben wir z. B. mit dem 2-stelligen Konnektiv $\oplus$ in den Übungen gesehen. Im Rahmen von Formalisierungen konnten wir feststellen, dass z. B. das 2-stellige natürlichsprachliche Konnektiv “weder … noch … ”, dem keine der bisher behandelten logischen Konstanten direkt entspricht, mittels $\neg$ und $\wedge$ ausgedrückt werden konnte. Auch haben wir gesehen, dass bestimmte logische Konstanten mittels anderer logischer Konstanten ausgedrückt werden können; zum Beispiel kann die Biimplikation $\leftrightarrow$ aufgrund der Äquivalenz

$$A \leftrightarrow B \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

mittels $\wedge$ und $\rightarrow$ ausgedrückt werden.
Diese Beobachtungen führen zu folgenden Fragestellungen:

(1) Welche weiteren logischen Konstanten können hinzugenommen werden?

(2) Können prinzipiell alle wahrheitsfunktionalen Konnektive (beliebiger Stelligkeit) im Rahmen der Aussagenlogik behandelt werden?

(3) Mit welchen logischen Konstanten können welche anderen logischen Konstanten ausgedrückt werden?

(4) Gibt es überschaubare Mengen logischer Konstanten, mit denen alle logischen Konstanten ausgedrückt werden können?

Zur Untersuchung dieser Fragestellungen behandeln wir zunächst disjunktive und konjunktive Normalformen.

4.1 Normalformen

Definition 4.2 (i) Ein *Literal* ist ein Aussagesymbol oder dessen Negation. Ist ein Literal ein Aussagesymbol, heißt es auch *positives Literal*; ist es ein negiertes Aussagesymbol, heißt es auch *negatives Literal*.

Literal

(ii) Eine *Elementarkonjunktion* ist eine Konjunktion von Literalen.

(iii) Eine *Elementardisjunktion* ist eine Disjunktion von Literalen.

(iv) Eine *disjunktive Normalform* (kurz: *DNF*) ist eine Disjunktion von Elementarkonjunktionen.

disjunktive Normalform

(v) Eine *konjunktive Normalform* (kurz: *KNF*) ist eine Konjunktion von Elementardisjunktionen.

konjunktive Normalform

Bemerkungen. (i) Für Literale L_i (für $1 \leq i \leq k$) haben Elementarkonjunktionen die Form $L_1 \wedge \ldots \wedge L_k$. Als Grenzfälle lassen wir für $k = 1$ das Literal L_1, und für $k = 0$ die leere Konjunktion (Notation: $\top$), als Elementarkonjunktionen zu.

(ii) Bei Elementardisjunktionen der Form $L_1 \vee \ldots \vee L_k$ lassen wir als Grenzfälle für $k = 1$ das Literal L_1, und für $k = 0$ die leere Disjunktion (Notation: $\bot$), als Elementardisjunktionen zu.

(iii) Für die leere Konjunktion kann auch $p \vee \neg p$, und für die leere Disjunktion $p \wedge \neg p$, geschrieben werden, für ein beliebiges Aussagesymbol p.

Beispiele. (i) p ist ein positives Literal, $\neg p$ ein negatives.

(ii) $p \wedge p \wedge \neg r$ ist eine Elementarkonjunktion aus 3 Literalen.

(iii) $p \vee p_1 \vee \neg r \vee r$ ist eine Elementardisjunktion aus 4 Literalen.

(iv) $\neg q$ ist sowohl eine Elementarkonjunktion als auch eine Elementardisjunktion.

(v) $(p \wedge p \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg p_1)$ ist eine DNF.

(vi) $(p_3 \vee \neg q) \wedge (p \vee p_1 \vee \neg r \vee r)$ ist eine KNF.

(vii) Sowohl $p \wedge \neg q$ als auch $p \vee \neg q$ sind zugleich DNF und KNF.

Für jede Formel A kann eine zu ihr logisch äquivalente disjunktive Normalform anhand der Wahrheitstafel für A konstruiert werden. Wir führen das *Verfahren zur Konstruktion einer disjunktiven Normalform* anhand des folgenden Beispiels ein.

Konstruktion einer DNF

Beispiel. Konstruktion einer disjunktiven Normalform zu $p \vee q \rightarrow r$. Wir betrachten die Wahrheitstafel für $p \vee q \rightarrow r$ (wobei wir hier zur Erläuterung die 8 relevanten Bewertungen mit h_1 bis h_8 benennen):

	p	q	r	$p \vee q \rightarrow r$	
h_1:	w	w	w	w	**w**
h_2:	w	w	f	w	**f**
h_3:	w	f	w	w	**w**
h_4:	w	f	f	w	**f**
h_5:	f	w	w	w	**w**
h_6:	f	w	f	w	**f**
h_7:	f	f	w	f	**w**
h_8:	f	f	f	f	**w**

Der Hauptspalte entnimmt man, dass die Formel $p \vee q \rightarrow r$ für die 5 Bewertungen h_1, h_3, h_5, h_7 und h_8 den Wahrheitswert w hat.
Wir betrachten die Bewertung h_1. Mit $[\![p]\!]^{h_1} = [\![q]\!]^{h_1} = [\![r]\!]^{h_1} = \text{w}$ gilt nach Definition der Konjunktion auch $[\![p \wedge q \wedge r]\!]^{h_1} = \text{w}$. Da auch $[\![p \vee q \rightarrow r]\!]^{h_1} = \text{w}$, gilt $[\![p \wedge q \wedge r]\!]^{h_1} = [\![p \vee q \rightarrow r]\!]^{h_1}$. Für die Bewertung h_1 ist der Wahrheitswert von $p \vee q \rightarrow r$ also durch $p \wedge q \wedge r$ bestimmt.

Die Formel $p \wedge q \wedge r$ ist die erste Elementarkonjunktion der gesuchten disjunktiven Normalform; wir notieren sie in der Zeile von h_1:

	p	q	r	$p \vee q \rightarrow r$		
h_1:	w	w	w	w	**w**	$(p \wedge q \wedge r)$
h_2:	w	w	f	w	**f**	
h_3:	w	f	w	w	**w**	
h_4:	w	f	f	w	**f**	
h_5:	f	w	w	w	**w**	
h_6:	f	w	f	w	**f**	
h_7:	f	f	w	f	**w**	
h_8:	f	f	f	f	**w**	

Nun betrachten wir die Bewertung h_3, für die $p \vee q \rightarrow r$ ebenfalls wahr ist. Nun ist $[\![p]\!]^{h_3} = [\![r]\!]^{h_3} = \text{w}$, aber $[\![q]\!]^{h_3} = \text{f}$. Statt des positiven Literals q verwenden wir deshalb das negative Literal $\neg q$, so dass $[\![p]\!]^{h_3} = [\![\neg q]\!]^{h_3} = [\![r]\!]^{h_3} = \text{w}$, und somit $[\![p \wedge \neg q \wedge r]\!]^{h_3} = \text{w}$. Da $[\![p \wedge \neg q \wedge r]\!]^{h_3} = [\![p \vee q \rightarrow r]\!]^{h_3}$, ist für h_3 der Wahrheitswert von $p \vee q \rightarrow r$ durch die Elementarkonjunktion $p \wedge \neg q \wedge r$ bestimmt.
Da $p \vee q \rightarrow r$ (zumindest) für h_1 *oder* h_3 wahr ist, fügen wir diese zweite Elementarkonjunktion mit einer *Disjunktion* in der Zeile von h_3 hinzu; man erhält also die Formel $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$:

	p	q	r	$p \vee q \rightarrow r$		
h_1:	w	w	w	w	**w**	$(p \wedge q \wedge r)$
h_2:	w	w	f	w	**f**	
h_3:	w	f	w	w	**w**	$\vee\ (p \wedge \neg q \wedge r)$
h_4:	w	f	f	w	**f**	
h_5:	f	w	w	w	**w**	
h_6:	f	w	f	w	**f**	
h_7:	f	f	w	f	**w**	
h_8:	f	f	f	f	**w**	

Entsprechend erzeugt man für die restlichen Bewertungen h_5, h_7 und h_8, für die $p \vee q \rightarrow r$ wahr ist, die Elementarkonjunktionen $(\neg p \wedge q \wedge r)$, $(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$ und $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$, die jeweils mit einer Disjunktion hinzugefügt werden:

	p	q	r	$p \vee q \rightarrow r$			
h_1:	w	w	w	w	**w**	$(p \wedge q \wedge r)$	DNF
h_2:	w	w	f	w	**f**		
h_3:	w	f	w	w	**w**	$\vee\ (p \wedge \neg q \wedge r)$	
h_4:	w	f	f	w	**f**		
h_5:	f	w	w	w	**w**	$\vee\ (\neg p \wedge q \wedge r)$	
h_6:	f	w	f	w	**f**		
h_7:	f	f	w	f	**w**	$\vee\ (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$	
h_8:	f	f	f	f	**w**	$\vee\ (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$	

Die resultierende Formel ist eine disjunktive Normalform. Nun gilt Folgendes:

(i) Für jede der 5 Bewertungen h_1, h_3, h_5, h_7 und h_8, für die $p \vee q \rightarrow r$ wahr ist, wurde eine Elementarkonjunktion angegeben, die den Wahrheitswert von $p \vee q \rightarrow r$ für die jeweilige Bewertung zu wahr bestimmt. Für jede dieser 5 Bewertungen ist somit (nach Definition der Disjunktion) auch die DNF wahr.

(ii) Für jede der übrigen 3 Bewertungen h_2, h_4 und h_6 hat die DNF den Wahrheitswert f, da keine der in ihr enthaltenen Elementarkonjunktionen unter diesen Bewertungen wahr sein kann.

(Zum Beispiel kann für h_2 wegen $[\![r]\!]^{h_2} = \mathrm{f}$ keine der ersten 4 Elementarkonjunktionen wahr sein, da jede das positive Literal r enthält; und die letzte kann aufgrund der negativen Literale $\neg p$ und $\neg q$ nicht wahr sein, da $[\![p]\!]^{h_2} = [\![q]\!]^{h_2} = \mathrm{w}$, also $[\![\neg p]\!]^{h_2} = [\![\neg q]\!]^{h_2} = \mathrm{f}$, und somit $[\![\neg p \land \neg q \land \neg r]\!]^{h_2} = \mathrm{f}$.)

Folglich stimmt der Wahrheitswert von $p \lor q \to r$ mit dem der DNF für jede Bewertung überein. Es gilt also

$$p \lor q \to r \dashv\vDash \underbrace{(p \land q \land r) \lor (p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land q \land r) \lor (\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land \neg q \land \neg r)}_{\text{DNF zu } p \lor q \to r}$$

Man macht sich leicht klar, dass mit dem im Beispiel illustrierten Verfahren zu jeder Formel eine zu ihr logisch äquivalente disjunktive Normalform konstruiert werden kann. Damit haben wir schon eine Antwort zu Frage (3): Die bisher betrachteten logischen Konstanten einschließlich $\to$, $\leftrightarrow$ und dem in den Übungen behandelten $\oplus$ können allein mit $\top$, $\bot$, $\neg$, $\land$ und $\lor$ ausgedrückt werden.
Verum $\top$ und Falsum $\bot$ werden nur für die Grenzfälle leerer Konjunktionen, beziehungsweise leerer Disjunktionen benötigt. Sofern man nicht verlangt, dass in der DNF zu einer Formel A ausschließlich die in A vorkommenden Aussagesymbole vorkommen, kann auf $\top$ und $\bot$ verzichtet werden, indem man $p \lor \neg p$ statt $\top$ und $p \land \neg p$ statt $\bot$ schreibt. Das Aussagesymbol p ist hierbei beliebig, muss also in der Formel A nicht vorkommen.

Beispiele. (i) Im Grenzfall nicht vorhandener Aussagesymbole erhält man z. B. für $\bot \to \top$ anhand von

	$\bot$	$\to$	$\top$	
	f	**w**	w	$\top$

die leere Konjunktion $\top$ als DNF sowie als KNF. Statt $\top$ kann die Formel $p \lor \neg p$ geschrieben werden, die ebenfalls sowohl eine DNF als auch eine KNF zu $\bot \to \top$ ist.

(ii) Für $\top \to \bot$ erhält man anhand

	$\top$	$\to$	$\bot$	
	w	**f**	f	$\bot$

die leere Disjunktion $\bot$ als DNF sowie als KNF. Auch $p \land \neg p$ ist zugleich eine DNF und KNF zu $\top \to \bot$.

Damit kann eine weitere Antwort auf Frage (3) gegeben werden: Die bisher betrachteten logischen Konstanten können allein mit $\neg$, $\land$ und $\lor$ ausgedrückt werden, sofern ein beliebiges Aussagesymbol zur Verfügung steht.

Neben einer DNF kann immer auch eine KNF zu einer gegebenen Formel konstruiert werden.

Theorem 4.3 *Zu jeder Formel A kann sowohl*

(i) eine logisch äquivalente disjunktive Normalform als auch

(ii) eine logisch äquivalente konjunktive Normalform

angegeben werden.

Beweis. (i) Die anhand der Wahrheitstafel für A konstruierte disjunktive Normalform A' hat dieselbe Hauptspalte wie A. Also gilt: $A \dashv\vDash A'$.

(ii) Eine konjunktive Normalform zu A kann wie folgt konstruiert werden:

(1) Zunächst bildet man eine disjunktive Normalform zu $\neg A$. Es gilt:

$$\neg A \dashv\vDash \underbrace{(L_{11} \wedge \ldots \wedge L_{1n_1}) \vee \ldots \vee (L_{j1} \wedge \ldots \wedge L_{jn_j})}_{\text{DNF zu } \neg A}$$

mit Literalen L_{ij}.

(2) Nun negiert man beide Seiten der logischen Äquivalenz, und formt die rechte Seite in eine konjunktive Normalform um.

Durch Negation auf beiden Seiten erhält man

$$\neg\neg A \dashv\vDash \neg((L_{11} \wedge \ldots \wedge L_{1n_1}) \vee \ldots \vee (L_{j1} \wedge \ldots \wedge L_{jn_j}))$$

Nach Anwendung von $\neg\neg A \dashv\vDash A$ auf der linken Seite erhält man

$$A \dashv\vDash \neg((L_{11} \wedge \ldots \wedge L_{1n_1}) \vee \ldots \vee (L_{j1} \wedge \ldots \wedge L_{jn_j}))$$

Die rechte Seite wird mit De Morgan umgeformt; man erhält

$$A \dashv\vDash \neg(L_{11} \wedge \ldots \wedge L_{1n_1}) \wedge \ldots \wedge \neg(L_{j1} \wedge \ldots \wedge L_{jn_j})$$

und nach weiterer Umformung mit De Morgan

$$A \dashv\vDash (\neg L_{11} \vee \ldots \vee \neg L_{1n_1}) \wedge \ldots \wedge (\neg L_{j1} \vee \ldots \vee \neg L_{jn_j})$$

Nach Beseitigung doppelter Negationen bei negierten negativen Literalen L_{ij} liegt dann auf der rechten Seite die konjunktive Normalform zu A vor. (Hierbei wird auch das Ersetzungstheorem verwendet.) QED

Beispiel. Konstruktion einer konjunktiven Normalform zu $p \vee q \to r$:

(1) Disjunktive Normalform zu $\neg(p \vee q \to r)$ konstruieren:

p	q	r	$\neg(p \vee q \to r)$	
w	w	w	f	
w	w	f	w	$(p \wedge q \wedge \neg r)$
w	f	w	f	
w	f	f	w	$\vee\ (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
f	w	w	f	
f	w	f	w	$\vee\ (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$
f	f	w	f	
f	f	f	f	

Es ist $\neg(p \vee q \to r) \dashv\vDash \underbrace{(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)}_{\text{DNF zu } \neg(p \vee q \to r)}.$

(2) Negation von $\neg(p\vee q\rightarrow r)$ auf der linken Seite, und Negation der DNF zu $\neg(p\vee q\rightarrow r)$ auf der rechten Seite:

$$\neg\neg(p \vee q \rightarrow r) \dashv\vDash \neg((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r))$$

Beseitigung der doppelten Negation auf der linken Seite, und Umformung der rechten Seite in eine konjunktive Normalform durch Verwendung von De Morgan und Beseitigung doppelter Negationen:

$$\begin{aligned} p \vee q \rightarrow r &\dashv\vDash \neg((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)) \\ &\dashv\vDash \neg(p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \\ &\dashv\vDash (\neg p \vee \neg q \vee \neg\neg r) \wedge (\neg p \vee \neg\neg q \vee \neg\neg r) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q \vee \neg\neg r) \\ &\dashv\vDash \underbrace{(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)}_{\text{KNF zu } p \vee q \rightarrow r} \end{aligned}$$

Die bisher behandelten Konnektive sind maximal 2-stellig. Nun betrachten wir beliebige, n-stellige Konnektive.

4.2 Funktionale Vollständigkeit

Ein *n-stelliges Konnektiv K* notieren wir in Präfixnotation als $K(A_1, \ldots, A_n)$. Die Definition von *Formeln* kann damit wie folgt erweitert werden:

Formeln

Definition 4.4 Sind $A_1, \ldots, A_n$ Formeln, und ist K ein n-stelliges Konnektiv, dann ist auch $K(A_1, \ldots, A_n)$ eine Formel, deren Hauptkonnektiv K ist.

Wie schon bei 0-, 1- und 2-stelligen Konnektiven, kann auch die Bedeutung beliebiger n-stelliger Konnektive $K(A_1, \ldots, A_n)$ durch eine Wahrheitstafel festgelegt werden. Da der Wahrheitswert eines n-stelligen Konnektivs $K(A_1, \ldots, A_n)$ von den n Wahrheitswerten von $A_1, \ldots, A_n$ abhängt, hat eine solche Wahrheitstafel $n + 1$ Spalten mit 2^n Zeilen:

A_1	A_2	$\ldots$	A_n	$K(A_1, \ldots, A_n)$
w	w	$\ldots$	w	x_1
	$\vdots$		f	x_2
$\vdots$	w	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
	f			
	$\vdots$			
w	f	$\vdots$	$\vdots$	$x_{2^n/2}$
f	w			$x_{2^n/2+1}$
	$\vdots$			
$\vdots$	w	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
	f			
	$\vdots$		w	x_{2^n-1}
f	f	$\ldots$	f	x_{2^n}

Hierbei stehen die Variablen $x_1, \ldots, x_{2^n}$ jeweils für einen der beiden Wahrheitswerte w und f. (Die Anzahl aller n-stelligen Konnektive beträgt damit 2^{2^n}.)

Beispiel. Die Bedeutung des 3-stelligen Konnektivs K' sei durch folgende Wahrheitstafel festgelegt:

A_1	A_2	A_3	$K'(A_1, A_2, A_3)$
w	w	w	w
w	w	f	f
w	f	w	f
w	f	f	f
f	w	w	f
f	w	f	f
f	f	w	w
f	f	f	f

Mit dem Verfahren zur Konstruktion einer DNF kann K' durch die Formel

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$$

ausgedrückt werden, da $K'(A_1, A_2, A_3) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$ gilt. (Die Formel auf der rechten Seite hat lediglich die *Form* einer DNF, da A_1, A_2 und A_3 nicht nur für Aussagesymbole, sondern für beliebige Formeln stehen. Bei den beiden Disjunktionsgliedern handelt es sich also nicht unbedingt um Elementarkonjunktionen, was bei einer DNF verlangt wird.)

Definition 4.5 Eine Menge von Konnektiven heißt *wahrheitsfunktional vollständig* (kurz: *funktional vollständig*), falls jedes Konnektiv durch die in der Menge enthaltenen Konnektive ausgedrückt werden kann.

wahrheitsfunktional vollständig

Theorem 4.6 *Die Menge* $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee\}$ *ist funktional vollständig.*

Beweis. Mit dem Verfahren zur Konstruktion einer DNF oder KNF kann zu jeder Formel $K(A_1, \dots, A_n)$ mit Hauptkonnektiv K eine zu ihr logisch äquivalente Formel angegeben werden, welche die Form einer DNF oder KNF hat, d. h. in der nur die Konnektive $\top, \bot, \neg, \wedge, \vee$ vorkommen. Somit kann jedes Konnektiv K mit diesen Konnektiven ausgedrückt werden. QED

Theorem 4.7 *Die folgenden Mengen sind funktional vollständig:*
(i) $\{\neg, \wedge\}$, *(ii)* $\{\neg, \vee\}$, *(iii)* $\{\neg, \to\}$, *(iv)* $\{\bot, \to\}$.

Beweis. (i) Es gilt $A \vee B \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg(\neg A \wedge \neg B)$, $\top \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg(A \wedge \neg A)$ und $\bot \mathrel{=\!\!|\!\!\models} A \wedge \neg A$. Damit folgt die Behauptung aus Theorem 4.6.

(ii) Es gilt $A \wedge B \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg(\neg A \vee \neg B)$, $\top \mathrel{=\!\!|\!\!\models} A \vee \neg A$ und $\bot \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg(A \vee \neg A)$. Damit folgt die Behauptung aus Theorem 4.6.

(iii) Es gilt $A \vee B \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg A \to B$, $A \wedge B \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg(A \to \neg B)$, $\top \mathrel{=\!\!|\!\!\models} A \to A$ und $\bot \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg(A \to A)$. Damit folgt die Behauptung aus Theorem 4.6.

(iv) Es gilt $\neg A \mathrel{=\!\!|\!\!\models} A \to \bot$ und $\top \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \bot \to \bot$. Damit folgt die Behauptung unter Verwendung von (iii). QED

Bemerkungen. (i) In den Fällen (i)-(iii) ist zu beachten, dass bei $\top$ und $\bot$ zumindest ein beliebiges Aussagesymbol zur Verfügung stehen muss, um die beiden Konnektive auszudrücken.

(ii) Andernfalls können $\top$ und $\bot$ nicht durch $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ oder $\{\neg, \rightarrow\}$ ausgedrückt werden. Um funktional vollständige Mengen zu erhalten, muss wenigstens eines der beiden Konnektive $\top$ und $\bot$ hinzugenommen werden; das jeweils andere kann dann aufgrund $\top \mathrel{\dashv\vDash} \neg\bot$ bzw. $\bot \mathrel{\dashv\vDash} \neg\top$ ausgedrückt werden.

(iii) Wir gehen im Folgenden davon aus, dass immer auch ein beliebiges Aussagesymbol verwendet werden kann, um ein Konnektiv durch andere auszudrücken.

Definition 4.8 Die *Negatkonjunktion* $\downarrow$ (auch: *Peircescher Pfeil*) ist durch folgende Wahrheitstafel definiert:

Negatkonjunktion

A	B	$A \downarrow B$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Bemerkungen. (i) Da $A \downarrow B \mathrel{\dashv\vDash} \neg(A \vee B)$, wird $\downarrow$ auch als NOR (“*not or*”) bezeichnet. Die Bezeichnung als Negatkonjunktion rührt von $A \downarrow B \mathrel{\dashv\vDash} \neg A \wedge \neg B$ (“Konjunktion der Negate”) her.

(ii) Die Negatkonjunktion entspricht dem natürlichsprachlichen Konnektiv “weder . . . noch . . . ” bzw. “nicht eines von beiden”.

Theorem 4.9 *Die Menge* $\{\downarrow\}$ *ist funktional vollständig.*

Beweis. Mit $\{\neg, \wedge\}$ und $\{\neg, \vee\}$ ist auch $\{\neg, \wedge\} \cup \{\neg, \vee\} = \{\neg, \wedge, \vee\}$ eine funktional vollständige Menge, und es gilt:

(i) $\neg A \mathrel{\dashv\vDash} A \downarrow A$,

(ii) $A \wedge B \mathrel{\dashv\vDash} \neg A \downarrow \neg B \mathrel{\dashv\vDash} (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$,

(iii) $A \vee B \mathrel{\dashv\vDash} \neg(A \downarrow B) \mathrel{\dashv\vDash} (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$. QED

Bemerkung. Für $\top$ und $\bot$ gilt das nur mit der in der Bemerkung nach Theorem 4.7 genannten Einschränkung.

Beispiel. Darstellung des Beispielkonnektivs $K'(A_1, A_2, A_3)$ durch $\downarrow$:

$$
\begin{aligned}
K'(A_1, A_2, A_3) &\mathrel{\dashv\vDash} (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \\
&\mathrel{\dashv\vDash} ((\neg A_1 \downarrow \neg A_2) \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \\
&\mathrel{\dashv\vDash} (((A_1 \downarrow A_1) \downarrow (A_2 \downarrow A_2)) \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \\
&\mathrel{\dashv\vDash} \underbrace{((((A_1 \downarrow A_1) \downarrow (A_2 \downarrow A_2)) \downarrow ((A_1 \downarrow A_1) \downarrow (A_2 \downarrow A_2))) \downarrow (A_3 \downarrow A_3))}_{B} \vee \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \\
&\mathrel{\dashv\vDash} B \vee ((\neg\neg A_1 \downarrow \neg\neg A_2) \wedge A_3) \\
&\mathrel{\dashv\vDash} B \vee ((A_1 \downarrow A_2) \wedge A_3) \\
&\mathrel{\dashv\vDash} B \vee (\neg(A_1 \downarrow A_2) \downarrow \neg A_3) \\
&\mathrel{\dashv\vDash} B \vee \underbrace{(((A_1 \downarrow A_2) \downarrow (A_1 \downarrow A_2)) \downarrow (A_3 \downarrow A_3))}_{C} \\
&\mathrel{\dashv\vDash} \neg(B \downarrow C) \\
&\mathrel{\dashv\vDash} (B \downarrow C) \downarrow (B \downarrow C)
\end{aligned}
$$

Bemerkungen. (i) Man beachte, dass $\downarrow$ kein assoziatives Konnektiv ist, das heißt i. A. gilt *nicht* $(A_1 \downarrow A_2) \downarrow A_3 \mathrel{=\!\!|\!\models} A_1 \downarrow (A_2 \downarrow A_3)$.

(ii) Neben $\downarrow$ gibt es mit der Negatdisjunktion $|$ genau ein weiteres 2-stelliges Konnektiv, mit dem jedes Konnektiv ausgedrückt werden kann. Die *Negatdisjunktion* (auch: *Shefferscher Strich*) ist durch folgende Wahrheitstafel definiert:

Negatdisjunktion

A	B	$A \mid B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

Da $A \mid B \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg(A \wedge B)$, wird $|$ auch als NAND ("*not and*") bezeichnet. Natürlichsprachlich kann $|$ als "höchstens eines von beiden" wiedergegeben werden.

Zu den eingangs aufgeführten Fragestellungen können wir nun Folgendes sagen (wobei wir unter logischen Konstanten allein die *wahrheitsfunktionalen* verstehen wollen):

(1) Welche logischen Konstanten können zu den bisher betrachteten hinzugenommen werden?

Es können beliebige n-stellige wahrheitsfunktionale Konnektive hinzugenommen werden. Dadurch erhöht sich die Ausdrucksstärke der formalen Sprache jedoch nur scheinbar. Denn da die Menge der bisher betrachteten logischen Konstanten schon wahrheitsfunktional vollständig ist, kann durch weitere hinzugenommene Konnektive nichts ausgedrückt werden, was nicht schon durch die in der funktional vollständigen Menge enthaltenen Konnektive ausgedrückt werden könnte.

(2) Können prinzipiell alle wahrheitsfunktionalen Konnektive (beliebiger Stelligkeit) im Rahmen der Aussagenlogik behandelt werden?

Ja. Zwar gibt es unendlich viele wahrheitsfunktionale Konnektive, die jedoch alle durch endliche, wahrheitsfunktional vollständige Mengen ausgedrückt werden können.

(3) Mit welchen logischen Konstanten können welche anderen logischen Konstanten ausgedrückt werden?

Wir haben gesehen, dass einzelne logische Konstanten durch eine andere Konstante (z. B. $\top$ durch $\rightarrow$) oder durch mehrere andere Konstanten ausgedrückt werden können. Anhand von Normalformen und weiterer Überlegungen konnten wir feststellen, dass es verschiedene wahrheitsfunktional vollständige Mengen gibt.

(4) Gibt es überschaubare Mengen logischer Konstanten, mit denen alle logischen Konstanten ausgedrückt werden können?

Ja. Ein Beispiel ist die funktional vollständige Menge $\{\top, \neg, \wedge, \vee\}$. Weitere Beispiele derartiger Mengen sind $\{\neg, \wedge, \vee\}$ sowie $\{\downarrow\}$ und $\{|\}$, wobei bei diesen zusätzlich die Verwendung eines beliebigen Aussagesymbols zugelassen sein muss.

5 Kalkül des natürlichen Schließens

Die bisher behandelten Begriffe wie z. B. Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und logische Folgerung beruhen auf einer zweiwertigen, wahrheitsfunktionalen Semantik. Natürlichsprachliche Argumente konnten im Rahmen von Formalisierungen als Folgerungsbehauptungen ausgedrückt werden, die dann z. B. unter Verwendung des Wahrheitstafelverfahrens auf Korrektheit überprüft werden konnten. Dieses Vorgehen vernachlässigt allerdings wesentliche Aspekte von Argumenten, wie z. B. die Verwendung zusätzlicher Annahmen während einer Argumentation, oder das schrittweise Schließen von Aussage zu Aussage.

Betrachtet man etwa die Argumentation im Beweis des Import-Export-Theorems 3.8, so stellt man fest, dass dort zunächst Annahmen eingeführt werden, unter denen dann mit logischen Schlüssen sowie mit Schlüssen, die auf Definitionen zurückgreifen, schrittweise von Aussage zu Aussage übergegangen wird. Im letzten Schritt wird auf das Theorem geschlossen (das hier als Konklusion nicht am Schluss des Beweises steht, sondern darüber), welches von keiner der zwischendurch zu Argumentationszwecken eingeführten Annahmen mehr abhängt.

Nun wollen wir auch diese Aspekte von Argumenten untersuchen. Das Mittel dazu ist der Kalkül des natürlichen Schließens, den wir im Anschluss an das folgende, einführende Beispiel behandeln.

Beispiel. Wir wollen zeigen, dass $A \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ gilt.

Dazu machen wir zunächst die Annahme, dass $A \vee (B \wedge C)$ gilt. Aufgrund dieser Annahme muss A oder $B \wedge C$ gelten. Als nächstes überlegen wir, was in jedem dieser beiden Fälle gilt.

1. Fall: A gilt. Dann gilt auch $A \vee B$. Dieser Schluss kann als Regelanwendung durch

$$\frac{A}{A \vee B}$$

ausgedrückt werden. Ebenso für $A \vee C$:

$$\frac{A}{A \vee C}$$

Damit haben wir unter der Annahme A gezeigt, dass $A \vee B$ und $A \vee C$ gilt. Damit können wir mit

$$\frac{A \vee B \qquad A \vee C}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

auf $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ schließen.

Das gesamte Argument lässt sich so darstellen:

$$\frac{\dfrac{A}{A \vee B} \qquad \dfrac{A}{A \vee C}}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

Die Formel $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ hängt noch von der (zweifach verwendeten) Annahme A ab.

2. Fall: $B \wedge C$ gilt. Somit gilt sowohl B als auch C; als Regelanwendungen:

$$\frac{B \wedge C}{B} \qquad\qquad \frac{B \wedge C}{C}$$

Nun können wir von B weiter auf $A \lor B$ und von C auf $A \lor C$ schließen; als Regelanwendungen:

$$\frac{B}{A \lor B} \qquad\qquad \frac{C}{A \lor C}$$

Damit gilt mit

$$\frac{A \lor B \quad A \lor C}{(A \lor B) \land (A \lor C)}$$

auch $(A \lor B) \land (A \lor C)$.

Das gesamte Argument ist

$$\frac{\dfrac{\dfrac{B \land C}{B}}{A \lor B} \quad \dfrac{\dfrac{B \land C}{C}}{A \lor C}}{(A \lor B) \land (A \lor C)}$$

Die Formel $(A \lor B) \land (A \lor C)$ hängt hier noch von der (zweifach verwendeten) Annahme $B \land C$ ab.

Somit haben wir gezeigt, dass unter der Annahme $A \lor (B \land C)$ in beiden Fällen $(A \lor B) \land (A \lor C)$ gilt. Das Argument hat grob die Struktur

$$\begin{array}{c} A \lor (B \land C) \\ \vdots \\ (A \lor B) \land (A \lor C) \end{array}$$

Die Formel $(A \lor B) \land (A \lor C)$ hängt also noch von der Annahme $A \lor (B \land C)$ ab. Diese Abhängigkeit lösen wir durch die Einführung einer Implikation auf, deren Vorderglied gerade die angenommene Formel ist:

$$\frac{\begin{array}{c} [A \lor (B \land C)]^1 \\ \vdots \\ (A \lor B) \land (A \lor C) \end{array}}{A \lor (B \land C) \to (A \lor B) \land (A \lor C)}\ 1$$

(Die Tatsache, dass $A \lor (B \land C) \to (A \lor B) \land (A \lor C)$ nicht mehr von der Annahme $A \lor (B \land C)$ abhängt, drücken wir durch die Markierung der Annahme mit eckigen Klammern und einer Ziffer aus, die wir auch neben der für die Auflösung der Abhängigkeit verantwortlichen Regel notieren.)

Somit gilt $A \lor (B \land C) \to (A \lor B) \land (A \lor C)$.

Das Beispiel veranschaulicht Folgendes:

(i) Argumente können aus elementaren Schritten baumförmig aufgebaut werden.

(ii) Die elementaren Schritte erfolgen gemäß Regeln.

(iii) Jede Regel bezieht sich auf nur eine logische Konstante.

(Etwaige Regeln, die sich aus Definitionen oder empirischen Zusammenhängen ergeben, lassen wir hier außer Acht.)

(iv) Es gibt Regeln, bei deren Anwendung eine logische Konstante eingeführt wird (z. B. bei $\frac{A}{A \lor B}$), und es gibt Regeln, bei deren Anwendung eine logische Konstante beseitigt wird (z. B. bei $\frac{B \land C}{B}$).

(v) Es dürfen Annahmen gemacht und verwendet werden.

(vi) Annahmen ermöglichen weitere Regelanwendungen, wobei Aussagen, auf die unter Annahmen geschlossen wurde, noch von diesen abhängen.

(vii) Es gibt Regeln, bei denen die Abhängigkeit von Annahmen aufgelöst werden kann (z. B. bei der Einführung einer Implikation).

Diese Eigenschaften werden im Kalkül des natürlichen Schließens umgesetzt. Zunächst geben wir die Regeln des Kalküls an. Danach erklären wir, wie die Regeln zu Argumenten (bzw. zu Ableitungen im Kalkül) zusammengesetzt werden können, und wie der Umgang mit Annahmen im Kalkül behandelt wird. Dabei beschränken wir uns auf die logischen Konstanten $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\rightarrow$, wobei wir $\neg A$ als Abkürzung für $A \rightarrow \bot$ auffassen.

Definition 5.1 (i) Der *Kalkül NK des natürlichen Schließens (für klassische Logik)* ist durch folgende Regeln gegeben:

Kalkül NK

Einführungsregel	*Beseitigungsregel*
$\dfrac{A_1 \quad A_2}{A_1 \wedge A_2}\,(\wedge\,\mathrm{E})$	$\dfrac{A_1 \wedge A_2}{A_i}\,(\wedge\,\mathrm{B})\ (i = 1 \text{ oder } 2)$
$\dfrac{A_i}{A_1 \vee A_2}\,(\vee\,\mathrm{E})\ (i = 1 \text{ oder } 2)$	$\dfrac{A_1 \vee A_2 \quad \begin{array}{c}[A_1]\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_2]\\ C\end{array}}{C}\,(\vee\,\mathrm{B})$
$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ B\end{array}}{A \rightarrow B}\,(\rightarrow\mathrm{E})$	$\dfrac{A \rightarrow B \quad A}{B}\,(\rightarrow\mathrm{B})$

Widerspruchsregel

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \bot\end{array}}{A}\,(\bot)$$

(ii) Rechts vom Regelstrich steht der *Regelname*; zum Beispiel $(\rightarrow\mathrm{E})$ für *Implikationseinführungsregel* oder $(\vee\,\mathrm{B})$ für *Disjunktionsbeseitigungsregel*.

(iii) Die jeweils unter dem Regelstrich stehende Formel heißt *Konklusion* der Regel. Die direkt über dem Regelstrich stehenden Formeln heißen *Prämissen* der Regel.

Konklusion
Prämissen

(iv) Die Prämisse $A_1 \vee A_2$ der Regel $(\vee\,\mathrm{B})$ heißt auch *Hauptprämisse*, die Prämissen C auch *Nebenprämissen*. Bei $(\rightarrow\mathrm{B})$ heißt die Prämisse $A \rightarrow B$ *Hauptprämisse* und die Prämisse A *Nebenprämisse*.

Hauptprämisse
Nebenprämisse

(v) Die bei den Regeln $(\vee\,\mathrm{B})$, $(\rightarrow\mathrm{E})$ und $(\bot)$ in eckigen Klammern notierten Formeln $[A]$ zeigen an, dass die Konklusion der Regel nicht mehr von Annahmen A abhängt.

Bemerkungen. (i) Für jede der logischen Konstanten $\wedge$, $\vee$ und $\rightarrow$ gibt es jeweils eine Einführungs- und eine Beseitigungsregel.

Bei einer Einführungsregel kommt die jeweilige logische Konstante in der Konklusion der Regel hinzu. Bei einer Beseitigungsregel wird die in der (Haupt-)Prämisse vorkommende Konstante beim Übergang zur Konklusion eliminiert.

(ii) Jede der 6 Einführungs- und Beseitigungsregeln behandelt genau eine logische Konstante.

(iii) Bei der Widerspruchsregel ($\bot$) ist dies nicht der Fall, da neben $\bot$ auch $\neg$ vorkommt. Des Weiteren gibt es für $\bot$ kein Regel*paar* aus Einführungs- und Beseitigungsregel. Die Widerspruchsregel kann zwar als Beseitigungsregel für $\bot$ aufgefasst werden; es gibt jedoch keine Einführungsregel.

Die Widerspruchsregel ($\bot$) drückt aus, dass von der Prämisse $\bot$ zu einer beliebigen Formel A als Konklusion übergegangen werden darf, wobei letztere nicht mehr von Annahmen $\neg A$ abhängt.

(iv) Die Konjunktionseinführungsregel ($\wedge$ E) besagt, dass von den beiden Prämissen A_1 und A_2 zur Konklusion $A_1 \wedge A_2$ übergegangen werden darf; die Konjunktionsbeseitigungsregel ($\wedge$ B) besagt, dass von der Prämisse $A_1 \wedge A_2$ zu A_1 oder zu A_2 als Konklusion übergegangen werden darf.

Bei der Disjunktionseinführungsregel ($\vee$ E) darf von der Prämisse A_1 ebenso wie von der Prämisse A_2 zur Konklusion $A_1 \vee A_2$ übergegangen werden. Die Regel ($\vee$ B) besagt, dass von der Hauptprämisse $A_1 \vee A_2$ und den beiden Nebenprämissen C zur Konklusion C übergegangen werden darf, wobei die Konklusion nicht mehr abhängt von Annahmen A_1 (von denen die linke Nebenprämisse noch abhängen kann) und A_2 (von denen die rechte Nebenprämisse noch abhängen kann).

Die Regel ($\to$ E) drückt aus, dass von der Prämisse B zur Konklusion $A \to B$ übergegangen werden darf, die nicht mehr von Annahmen A abhängt. Die Implikationsbeseitigungsregel ($\to$ B) (modus ponens) besagt, dass von der Hauptprämisse $A \to B$ mit der Nebenprämisse A zu B übergegangen werden darf.

(v) Die Regeln ($\wedge$ B) und ($\vee$ E) könnten auch explizit als Regelpaare

$$\frac{A \wedge B}{A}\,(\wedge\,\mathrm{B}) \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,(\wedge\,\mathrm{B})$$

bzw.

$$\frac{A}{A \vee B}\,(\vee\,\mathrm{E}) \qquad \frac{B}{A \vee B}\,(\vee\,\mathrm{E})$$

angegeben werden.

(vi) Auf eine weitere Differenzierung durch verschiedene Regelnamen wie z. B. $(\wedge\,\mathrm{B})_{\mathrm{links}}$ und $(\wedge\,\mathrm{B})_{\mathrm{rechts}}$, die eine Unterscheidung der beiden Regelanwendungen

$$\frac{A \wedge A}{A}\,(\wedge\,\mathrm{B})_{\mathrm{links}} \qquad \text{und} \qquad \frac{A \wedge A}{A}\,(\wedge\,\mathrm{B})_{\mathrm{rechts}}$$

ermöglichen würden, verzichten wir hier.

Definition 5.2 Eine *Ableitung* im Kalkül des natürlichen Schließens NK ist ein (nach oben verzweigender) Baum, der wie folgt induktiv definiert ist:

Ableitung

(i) Für jede Formel A ist der Knoten

$$A$$

eine Ableitung.

Blatt und Wurzelknoten des Baums fallen hier zusammen. Der Knoten A ist eine Ableitung der *Endformel* A (Wurzelknoten) aus der *Annahme* A (Blatt).

Endformel
Annahme

(ii) Sind $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}_1$ und $\mathscr{D}_2$ Ableitungen, dann sind auch die folgenden Bäume Ableitungen:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathscr{D}_1 & \mathscr{D}_2\\ A_1 & A_2\end{array}}{A_1 \wedge A_2}\,(\wedge\,\mathrm{E}) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathscr{D}_1\\ A_1 \wedge A_2\end{array}}{A_i}\,(\wedge\,\mathrm{B})\ (i = 1 \text{ oder } 2)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathscr{D}_i\\ A_i\end{array}}{A_1 \vee A_2}\,(\vee\,\mathrm{E})\ (i = 1 \text{ oder } 2) \qquad \dfrac{\begin{array}{ccc} & [A_1] & [A_2]\\ \mathscr{D} & \mathscr{D}_1 & \mathscr{D}_2\\ A_1 \vee A_2 & C & C\end{array}}{C}\,(\vee\,\mathrm{B})$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \mathscr{D}\\ B\end{array}}{A \to B}\,(\to\mathrm{E}) \qquad \dfrac{\begin{array}{cc}\mathscr{D}_1 & \mathscr{D}_2\\ A \to B & A\end{array}}{B}\,(\to\mathrm{B})$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \mathscr{D}\\ \bot\end{array}}{A}\,(\bot)$$

Definition 5.3 (i) Die Formeln unter dem Regelstrich sind die Wurzelknoten des Baums, die in Ableitungen als *Endformeln* bezeichnet werden. Die Blätter des Baums heißen *Annahmen*.

Endformeln
Annahmen

(ii) Die Notation

$$\begin{array}{c}[A]\\ \mathscr{D}\\ B\end{array}$$

drückt aus, dass in der Ableitung $\mathscr{D}$ mit Endformel B Annahmen A vorkommen können.

Statt $\mathscr{D}$ schreiben wir auch $\vdots$ als Platzhalter für eine Ableitung.

(iii) Die durch eckige Klammern gekennzeichneten Annahmen müssen dabei in den jeweiligen Ableitungen nicht vorkommen. Falls sie vorkommen, können sie beim Übergang zur Endformel (d. h. bei Anwendung der angegebenen Regel) gelöscht werden. Die *Löschung* von Annahmen A besteht in der Markierung von Blättern A durch eckige Klammern und einer (noch nicht zu einer Löschung verwendeten) Ziffer n, wie folgt: $[A]^n$. Zusätzlich wird die Ziffer n bei der angewandten Regel notiert.

Löschung

Beispiel:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^1\\ \mathscr{D}\\ B\end{array}}{A \to B}\,(\to\mathrm{E})^1$$

(sofern die Ziffer 1 in $\mathscr{D}$ noch nicht zur Löschung einer Annahme verwendet wurde).

(iv) Eine gelöschte Annahme heißt auch *geschlossen*. Eine nicht geschlossene (bzw. nicht gelöschte) Annahme heißt *offen*.

geschlossen
offen

Beispiel. Sowohl $\dfrac{B}{A \to B}\,(\to\mathrm{E})$, $\dfrac{A}{A \to A}\,(\to\mathrm{E})$ als auch $\dfrac{[A]^1}{A \to A}\,(\to\mathrm{E})^1$ sind korrekte Ableitungen, bzw. korrekte Anwendungen der Regel $(\to\mathrm{E})$. In der ersten Ableitung ist die Annahme B offen, in der zweiten A; in der dritten wurde die Annahme A (die zugleich Prämisse der Regel ist) gelöscht (bzw. geschlossen).

Teilableitung

Definition 5.4 Eine *Teilableitung* $\mathscr{D}'$ einer Ableitung $\mathscr{D}$ ist ein Teilbaum von $\mathscr{D}$. Gelöschte Annahmen der Teilableitung $\mathscr{D}'$ sind nur jene gelöschten Annahmen von $\mathscr{D}$, deren bei ihrer Markierung verwendete Ziffern n bei einer Regelanwendung in $\mathscr{D}'$ stehen.

Bemerkungen. (i) Die Löschung von Annahmen ist nur bei Anwendung der Regeln $(\lor\, \mathrm{B})$, $(\to \mathrm{E})$ und $(\bot)$ möglich. Es dürfen ausschließlich die in den Regeln in eckigen Klammern angegebenen Formeln als Annahmen gelöscht werden. Bei $(\lor\, \mathrm{B})$ darf die Löschung von A_1 nur in Teilableitung $\mathscr{D}_1$, die von A_2 nur in $\mathscr{D}_2$ vorgenommen werden.

(ii) Ist $\mathscr{D}'$ eine Teilableitung von $\mathscr{D}$, und kommt die Ziffer n einer in $\mathscr{D}$ geschlossenen Annahme A bei einer Regelanwendung in $\mathscr{D}$ vor, die nicht Bestandteil von $\mathscr{D}'$ ist, so ist A in $\mathscr{D}'$ offen.

Beispiele. (i) Es ist

$$\dfrac{(A \land B) \lor B \qquad \dfrac{[A \land B]^1}{B}\,(\land\, \mathrm{B}) \qquad [B]^1}{B}\,(\lor\, \mathrm{B})^1$$

eine korrekte Ableitung von B aus $(A \land B) \lor B$.

Die Annahme $A \land B$ ist in der Teilableitung $\dfrac{A \land B}{B}$ $(\land\, \mathrm{B})$ offen, in der gesamten Ableitung ist sie geschlossen.

(ii) *Keine* korrekte Ableitung ist

$$\lightning \qquad \dfrac{A_1 \lor A_2 \qquad \dfrac{[A_1]^1 \quad [A_2]^{1\lightning}}{A_1 \land A_2}\,(\land\, \mathrm{E}) \qquad \dfrac{[A_1]^{1\lightning} \quad [A_2]^1}{A_1 \land A_2}\,(\land\, \mathrm{E})}{A_1 \land A_2}\,(\lor\, \mathrm{B})^{1\lightning} \qquad \lightning$$

Die Disjunktionsbeseitigungsregel $(\lor\, \mathrm{B})$ erlaubt nur die Löschung von A_1 (linkes Disjunktionsglied) in der Teilableitung der linken Nebenprämisse und von A_2 (rechtes Disjunktionsglied) in der Teilableitung der rechten Nebenprämisse. Die Löschung der beiden mit $\lightning$ gekennzeichneten Annahmen bei $(\lor\, \mathrm{B})$ ist *inkorrekt*.

(iii) Eine korrekte Ableitung ist

$$\dfrac{A_1 \lor A_2 \qquad \dfrac{[A_1]^1 \quad A_2}{A_1 \land A_2}\,(\land\, \mathrm{E}) \qquad \dfrac{A_1 \quad [A_2]^1}{A_1 \land A_2}\,(\land\, \mathrm{E})}{A_1 \land A_2}\,(\lor\, \mathrm{B})^1$$

Die Endformel $A_1 \land A_2$ hängt von den offenen Annahmen $A_1 \lor A_2$, A_2 und A_1 ab.

(Die Formel $A_1 \land A_2$ kann aber auch direkt mit $(\land\, \mathrm{E})$ aus den beiden Annahmen A_1 und A_2 allein abgeleitet werden.)

Annahmenmenge

Definition 5.5 Die *Annahmenmenge* (oder *Hypothesenmenge*) $\mathit{Hyp}(\mathscr{D})$ einer Ableitung $\mathscr{D}$ ist rekursiv definiert durch:

(i) $\mathit{Hyp}(A) := \{A\}$.

Das heißt, die Annahmenmenge einer aus einem Blatt A bestehenden Ableitung A ist die Menge $\{A\}$ (deren einziges Element die Formel A ist).

(ii) $$\mathit{Hyp}\left(\dfrac{\begin{matrix}\mathscr{D}_1 & \mathscr{D}_2\\ A_1 & A_2\end{matrix}}{A_1 \wedge A_2}\,(\wedge\,\mathrm{E})\right) := \mathit{Hyp}\begin{pmatrix}\mathscr{D}_1\\ A_1\end{pmatrix} \cup \mathit{Hyp}\begin{pmatrix}\mathscr{D}_2\\ A_2\end{pmatrix}.$$

Entsprechend für $(\wedge\,\mathrm{B})$, $(\vee\,\mathrm{E})$ und $(\to\mathrm{B})$.

(iii) Sofern bei Anwendung von $(\to\mathrm{E})$ Annahmen A nicht gelöscht wurden, gilt:

$$\mathit{Hyp}\left(\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \mathscr{D}_1\\ B\end{matrix}}{A\to B}\,(\to\mathrm{E})\right) := \mathit{Hyp}\begin{pmatrix}[A]\\ \mathscr{D}_1\\ B\end{pmatrix}.$$

Entsprechend für $(\vee\,\mathrm{B})$ und $(\bot)$.

Dies soll den Fall einschließen, dass einige, aber nicht alle Annahmen gelöscht wurden. Da wir Mengen betrachten, ist die Anzahl nicht gelöschter Annahmen irrelevant, sofern mindestens eine Annahme nicht gelöscht wurde.

(iv) Sofern bei Anwendung von $(\to\mathrm{E})$ alle Annahmen A gelöscht wurden, gilt:

$$\mathit{Hyp}\left(\dfrac{\begin{matrix}[A]^n\\ \mathscr{D}_1\\ B\end{matrix}}{A\to B}\,(\to\mathrm{E})^n\right) := \mathit{Hyp}\begin{pmatrix}[A]\\ \mathscr{D}_1\\ B\end{pmatrix} \setminus \{A\}.$$

Entsprechend für $(\vee\,\mathrm{B})$ und $(\bot)$.

$\mathit{Hyp}(\mathscr{D})$ ist also die Menge der offenen Annahmen in $\mathscr{D}$.

Beispiel. Wir betrachten die Ableitung $\mathscr{D}$ mit $\mathit{Hyp}(\mathscr{D}) = \{A\to(B\to C)\}$:

$$\mathscr{D}\left\{\dfrac{\left.\dfrac{\left.\dfrac{\dfrac{A\to(B\to C)\quad [A]^1}{B\to C}\,(\to\mathrm{B})\qquad \dfrac{[A\to B]^2\quad [A]^1}{B}\,(\to\mathrm{B})}{C}\,(\to\mathrm{B})\right\}\mathscr{D}''}{A\to C}\,(\to\mathrm{E})^1\right\}\mathscr{D}'}{(A\to B)\to(A\to C)}\,(\to\mathrm{E})^2\right.$$

$\mathscr{D}'$ ist eine Teilableitung von $\mathscr{D}$. Es ist $\mathit{Hyp}(\mathscr{D}') = \{A\to(B\to C), A\to B\}$. Für die Teilableitung $\mathscr{D}''$ von $\mathscr{D}'$ ist $\mathit{Hyp}(\mathscr{D}'') = \{A\to(B\to C), A\to B, A\}$.

Definition 5.6 (i) Aus Γ ist A *ableitbar* (Notation: $\Gamma\vdash A$), falls es eine Ableitung $\mathscr{D}$ mit Endformel A und $\mathit{Hyp}(\mathscr{D})\subseteq\Gamma$ gibt. *ableitbar*

(ii) Eine Formel A heißt *beweisbar* (Notation: $\vdash A$), falls es eine Ableitung $\mathscr{D}$ mit Endformel A und $\mathit{Hyp}(\mathscr{D}) = \emptyset$ gibt. Die Ableitung $\mathscr{D}$ heißt in diesem Fall auch *(formaler) Beweis* von A. *beweisbar* *Beweis*

Bemerkungen. (i) Da wir ausschließlich den Kalkül NK behandeln, verzichten wir auf Zusätze wie in “ableitbar in NK”, “in NK beweisbar” oder “$\Gamma\vdash_{\mathrm{NK}} A$”.

(ii) Für die Notation von Mengen von Formeln gilt das bei der logischen Folgerung Gesagte (siehe Bemerkung (ii) nach Definition 3.7).

Beispiele. (i) Wir zeigen die Ableitbarkeitsbehauptung

$$(A \to B) \wedge (A \to C) \vdash A \to B \wedge C$$

durch Angabe einer Ableitung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A \to B) \wedge (A \to C)}{A \to B}\,(\wedge\,\mathrm{B}) \qquad [A]^1}{B}\,(\to\mathrm{B}) \qquad \dfrac{\dfrac{(A \to B) \wedge (A \to C)}{A \to C}\,(\wedge\,\mathrm{B}) \qquad [A]^1}{C}\,(\to\mathrm{B})}{B \wedge C}\,(\wedge\,\mathrm{E})}{A \to B \wedge C}\,(\to\mathrm{E})^1$$

Die Ziffer 1 markiert die Löschung der zusätzlichen Annahme A. Die Endformel $A \to B \wedge C$ hängt also nur noch von der offenen Annahme $(A \to B) \wedge (A \to C)$ ab.

(ii) Dass die Formel $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$ beweisbar ist, d. h. dass

$$\vdash (A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$$

gilt, zeigen wir durch die um eine Implikationseinführung erweiterte Ableitung aus (i):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A \to B) \wedge (A \to C)]^2}{A \to B}\,(\wedge\,\mathrm{B}) \qquad [A]^1}{B}\,(\to\mathrm{B}) \qquad \dfrac{\dfrac{[(A \to B) \wedge (A \to C)]^2}{A \to C}\,(\wedge\,\mathrm{B}) \qquad [A]^1}{C}\,(\to\mathrm{B})}{B \wedge C}\,(\wedge\,\mathrm{E})}{A \to B \wedge C}\,(\to\mathrm{E})^1}{(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)}\,(\to\mathrm{E})^2$$

Die Endformel hängt von keiner Annahme mehr ab, da alle Annahmen geschlossen wurden. Die Ableitung ist also ein Beweis der Endformel.

(iii) Wir zeigen die Ableitbarkeitsbehauptung $\neg\neg A \vdash A$. Diese ist gleichbedeutend mit der Behauptung $(A \to \bot) \to \bot \vdash A$, da wir $\neg A$ als Abkürzung für $A \to \bot$ auffassen.

$$\dfrac{\dfrac{(A \to \bot) \to \bot \qquad [A \to \bot]^1}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{A}\,(\bot)^1$$

Die Ziffer 1 markiert die Löschung der zusätzlichen Annahme $A \to \bot$. Die Endformel A hängt nur noch von der Annahme $(A \to \bot) \to \bot$ ab.

Die Abkürzung $\neg A := A \to \bot$ muss in Ableitungen nicht aufgelöst werden; die Ableitung

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg A \qquad [\neg A]^1}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{A}\,(\bot)^1$$

ist also ebenfalls korrekt.

Die Widerspruchsregel $(\bot)$ entspricht somit der Beseitigung der doppelten Negation.

Theorem 5.7 *Sei Γ eine beliebige (möglicherweise unendliche) Menge von Formeln, und A eine beliebige Formel. Falls $\Gamma \vdash A$ gilt, gibt es eine endliche Teilmenge Γ' von Γ, so dass $\Gamma' \vdash A$ gilt.*

Beweis. Wenn $\Gamma \vdash A$ gilt, muss es eine Ableitung $\mathscr{D}$ mit $\mathit{Hyp}(\mathscr{D}) \subseteq \Gamma$ geben. Da die Annahmenmenge einer Ableitung stets endlich ist, ist mit $\mathit{Hyp}(\mathscr{D})$ eine endliche Annahmenmenge $\Gamma' \subseteq \Gamma$ gefunden, so dass $\Gamma' \vdash A$. QED

Zum Auffinden einer Ableitung von A aus Annahmen Γ kann die folgende Strategie nützlich sein, bei der eine Ableitung von unten nach oben konstruiert wird:

(1) Falls die Formel A Konklusion einer Einführungsregel sein kann, erweitert man A um die entsprechende Einführungsregel nach oben. Die zu verwendende Einführungsregel ist durch das Hauptkonnektiv von A eindeutig bestimmt.

Dies liefert die Prämisse(n) der Einführungsregel, wobei im Fall ($\vee$ E) eines der beiden Disjunktionsglieder als Prämisse gewählt werden muss. Falls diese Wahl am Ende nicht zum Ziel führt, kann an dieser Stelle das andere Disjunktionsglied als Prämisse gewählt werden.

Falls die gesuchte Einführungsregel eine Implikationseinführung ($\rightarrow$ E) ist, merkt man sich die Annahme, die bei dieser Regelanwendung gelöscht werden kann. Diese Annahme kann man sich später zunutze machen.

Nun geht man zu Schritt (2), oder man wiederholt dieses Vorgehen für jede der neu hinzugekommenen Prämissen, bis man nur noch Prämissen hat, die nicht mehr Konklusion einer Einführungsregel sein können.

(2) Für die nun zuoberst stehenden Formeln probiert man eine Beseitigungsregel, mit der die jeweilige Formel abgeleitet werden kann. Hier gibt es mehrere Möglichkeiten, sowohl bei der Wahl der Regel als auch bei der Wahl der Prämissen. Einen Anhaltspunkt für die Wahl können die Annahmen Γ sowie die in Schritt (1) gemerkten Annahmen darstellen.

(3) Für die gewählte Beseitigungsregel beschränkt man sich bei der Wahl der Prämisse(n) auf Formeln, in denen neben der Konklusion der Beseitigungsregel nur Teilformeln der Annahmen als Teilformeln vorkommen.

Ist die gewählte Beseitigungsregel ($\vee$ B), sind die Nebenprämissen schon durch die Konklusion festgelegt. Zur späteren Verwendung merkt man sich auch hier jene beiden Annahmen, die aufgrund der gewählten Hauptprämisse bei dieser Regelanwendung gelöscht werden können.

Gehe zu (1), wobei A nun eine der gewählten Prämissen sei.

Falls dieser Ansatz nicht zum Ziel führt, verwendet man in Schritt (2) statt einer Beseitigungsregel die Widerspruchsregel ($\perp$). Schlägt auch dies fehl, verwendet man die Widerspruchsregel schon in Schritt (1) anstelle einer Einführungsregel. Zudem kann es hilfreich sein, zwischendurch Teilableitungen aus den gemerkten und den in Γ gegebenen Annahmen von oben nach unten zu entwickeln.

Beispiele. (i) Wir greifen das eingangs behandelte Beispiel (vgl. S. 44f.) auf, und zeigen

$$\vdash A \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

durch Angabe einer Ableitung:

$$\dfrac{[A\vee(B\wedge C)]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[A]^1}{A\vee B}\,(\vee\mathrm{E}) \quad \dfrac{[A]^1}{A\vee C}\,(\vee\mathrm{E})}{(A\vee B)\wedge(A\vee C)}\,(\wedge\mathrm{E}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B\wedge C]^1}{B}\,(\wedge\mathrm{B})}{A\vee B}\,(\vee\mathrm{E}) \quad \dfrac{\dfrac{[B\wedge C]^1}{C}\,(\wedge\mathrm{B})}{A\vee C}\,(\vee\mathrm{E})}{(A\vee B)\wedge(A\vee C)}\,(\wedge\mathrm{E})}{\dfrac{(A\vee B)\wedge(A\vee C)}{A\vee(B\wedge C)\to(A\vee B)\wedge(A\vee C)}\,(\to\mathrm{E})^2}\,(\vee\mathrm{B})^1$$

Die Ableitung ist ein Beweis der Formel $A\vee(B\wedge C)\to(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.

(ii) Wir zeigen das De Morgansche Gesetz $\neg(A\wedge B)\vdash\neg A\vee\neg B$:

$$\dfrac{\neg(A\wedge B) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg A\vee\neg B)]^3 \quad \dfrac{[\neg A]^1}{\neg A\vee\neg B}\,(\vee\mathrm{E})}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{A}\,(\bot)^1 \quad \dfrac{\dfrac{[\neg(\neg A\vee\neg B)]^3 \quad \dfrac{[\neg B]^2}{\neg A\vee\neg B}\,(\vee\mathrm{E})}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{B}\,(\bot)^2}{A\wedge B}\,(\wedge\mathrm{E})}{\dfrac{\bot}{\neg A\vee\neg B}\,(\bot)^3}\,(\to\mathrm{B})$$

5.1 Strukturregeln

Theorem 5.8 *Es gelten die folgenden Strukturregeln:*

Strukturregeln

(i) Identität: $A\vdash A$.

(ii) Verdünnung: Wenn $\Gamma\vdash A$, *dann* $\Gamma,\Delta\vdash A$.

(iii) Kontraktion: Wenn $\Gamma,A,A\vdash B$, *dann* $\Gamma,A\vdash B$.

(iv) Schnitt: Wenn $\Gamma\vdash A$ *und* $\Delta,A\vdash B$, *dann* $\Gamma,\Delta\vdash B$.

Beweis. (i) Es ist A eine Ableitung $\mathscr{D}$ mit Endformel A und $Hyp(\mathscr{D})=A$. Somit gilt $A\vdash A$.

(ii) Angenommen $\Gamma\vdash A$. Dann muss es eine Ableitung $\mathscr{D}$ mit Endformel A und $Hyp\begin{pmatrix}\mathscr{D}\\A\end{pmatrix}\subseteq\Gamma$ geben. Wegen $Hyp\begin{pmatrix}\mathscr{D}\\A\end{pmatrix}\subseteq\Gamma\subseteq\Gamma\cup\Delta$ gibt es dann auch eine Ableitung $\mathscr{D}'$ mit Endformel A und $Hyp\begin{pmatrix}\mathscr{D}'\\A\end{pmatrix}\subseteq\Gamma\cup\Delta$. Also gilt $\Gamma,\Delta\vdash A$.

(iii) Angenommen $\Gamma,A,A\vdash B$. Da Γ,A,A für die Menge $\{\Gamma,A,A\}=\{\Gamma,A\}$ steht, gilt auch $\Gamma,A\vdash B$.

(iv) Angenommen, es gilt $\Gamma\vdash A$ und $\Delta,A\vdash B$. Dann muss es eine Ableitung $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathscr{D}_1}{A}$ mit $Hyp\begin{pmatrix}\mathscr{D}_1\\A\end{pmatrix}\subseteq\Gamma$ und eine Ableitung $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathscr{D}_2}{B}$ mit $Hyp\begin{pmatrix}\mathscr{D}_2\\B\end{pmatrix}\subseteq\Delta\cup\{A\}$ geben. Nun erweitern wir jede offene Annahme A in $\mathscr{D}_2$ zu einer Teilableitung $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathscr{D}_1}{A}$ von $\mathscr{D}_2$. Man erhält eine neue Ableitung $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathscr{D}_2'}{B}$ mit $Hyp\begin{pmatrix}\mathscr{D}_2'\\B\end{pmatrix}\subseteq(\Delta\cup\{A\})\setminus\{A\}\cup Hyp\begin{pmatrix}\mathscr{D}_1\\A\end{pmatrix}=\Gamma\cup\Delta$. Somit gibt es eine Ableitung $\mathscr{D}_2'$ mit Endformel B und $Hyp\begin{pmatrix}\mathscr{D}_2'\\B\end{pmatrix}\subseteq\Gamma\cup\Delta$. Also gilt $\Gamma,\Delta\vdash B$. QED

Bemerkung. Die Schnittregel drückt die Transitivität der Ableitbarkeitsrelation $\vdash$ aus. Die “weggeschnittene” Formel A bezeichnet man auch als *Schnittformel*. *Schnittformel*

Definition 5.9 Eine Regel *ableitbare Regel*

$$\frac{A_1 \quad \dots \quad A_n}{B}$$

mit Prämissenmenge $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ und Konklusion B heißt *ableitbar*, falls $\Gamma \vdash B$.

Die Schnittregel rechtfertigt die Anwendung abgeleiteter Regeln.

Beispiele. (i) Im obigen Beispiel (iii) wurde $\neg\neg A \vdash A$ (doppelte Negationsbeseitigung) gezeigt. Somit ist

$$\frac{\neg\neg A}{A}\,(\mathrm{DNB})$$

eine abgeleitete Regel.

Ableitungen der Form $\begin{array}{c}\mathscr{D}_1\\ \neg\neg A\\ \mathscr{D}_2\\ A\end{array}$ können damit abgekürzt werden zu $\begin{array}{c}\mathscr{D}_1\\ \dfrac{\neg\neg A}{A}\end{array}\,(\mathrm{DNB})$.

(ii) Aufgrund

$$\dfrac{\dfrac{\neg B \qquad \dfrac{A \to B \quad [A]^1}{B}\,(\to \mathrm{B})}{\bot}\,(\to \mathrm{B})}{\neg A}\,(\to \mathrm{E})^1$$

gilt $\neg B, A \to B \vdash \neg A$. Somit ist

$$\frac{\neg B \qquad A \to B}{\neg A}\,(\text{modus tollens})$$

eine abgeleitete Regel.

$\begin{array}{c}\mathscr{D}_1 \quad \mathscr{D}_2\\ \neg B, A \to B\\ \mathscr{D}_3\\ \neg A\end{array}$ kann damit abgekürzt werden zu $\begin{array}{c}\mathscr{D}_1 \qquad \mathscr{D}_2\\ \dfrac{\neg B \qquad A \to B}{\neg A}\end{array}\,(\text{modus tollens})$.

Bemerkungen. (i) Annahmen, die bei einer Regelanwendung gelöscht werden dürfen, müssen nicht gelöscht werden; dies entspricht der strukturellen Operation der *Verdünnung*. *Verdünnung*

Im Beweis von $\neg A \to (A \to B)$ ist Verdünnung wesentlich:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^2 \quad [A]^1}{\bot}\,(\to \mathrm{B})}{B}\,(\bot)}{A \to B}\,(\to \mathrm{E})^1}{\neg A \to (A \to B)}\,(\to \mathrm{E})^2$$

Die Anwendung von $(\bot)$ würde die Löschung von Annahmen $\neg B$ erlauben, die hier aber nicht vorgenommen wird.

(ii) Mehrere Vorkommen derselben Annahme können bei einer einzigen Regelanwendung gelöscht werden; dies entspricht der strukturellen Operation der *Kontraktion*. *Kontraktion*

Im Beweis des Satzes vom ausgeschlossenen Widerspruch $\neg(A \wedge \neg A)$ ist Kontraktion wesentlich:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge \neg A]^1}{\neg A}\,(\wedge\,\mathrm{B}) \qquad \dfrac{[A \wedge \neg A]^1}{A}\,(\wedge\,\mathrm{B})}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{\neg(A \wedge \neg A)}\,(\to\mathrm{E})^1$$

(iii) Neben Einführung und Beseitigung logischer Konstanten spielen also auch strukturelle Operationen bezüglich Annahmen eine Rolle. Im Kalkül des natürlichen Schließens sind diese Operationen nicht explizit durch eigene Regeln repräsentiert, sondern nur implizit durch die Festlegungen zur Löschung von Annahmen gegeben.

5.2 Widerspruchsregel und reductio ad absurdum

Beispiel. In I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, B 454 (Erste Antinomie), findet sich die folgende Argumentation:

> Thesis
>
> Die Welt hat einen Anfang in der Zeit [...]
>
> Beweis
>
> Denn, man nehme an, die Welt habe der Zeit nach keinen Anfang: so ist bis zu jedem gegebenen Zeitpunkte eine Ewigkeit abgelaufen, und mithin eine unendliche Reihe aufeinander folgender Zustände der Dinge in der Welt verflossen. Nun besteht aber eben darin die Unendlichkeit einer Reihe, daß sie durch sukzessive Synthesis niemals vollendet sein kann. Also ist eine unendliche verflossene Weltreihe unmöglich, mithin ein Anfang der Welt eine notwendige Bedingung ihres Daseins; welches zuerst zu beweisen war.

Darin wird unter Annahme der Negation der Thesis ("die Welt habe der Zeit nach keinen Anfang") zunächst ein Widerspruch abgeleitet ("eine unendliche verflossene Weltreihe [ist] unmöglich"), von dem dann auf die Thesis geschlossen wird. Das Argument verwendet eine reductio ad absurdum der Form

$$\dfrac{\begin{array}{c}\neg p\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{p}$$

wobei die Konklusion p nicht mehr von der Annahme $\neg p$ abhängt. Dies entspricht einer Anwendung der Widerspruchsregel $(\bot)$.

Die Bezeichnung *reductio ad absurdum* wird jedoch sowohl für Argumentationen der Form *reductio ad absurdum*

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg A} \qquad \text{als auch für} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{A}$$

verwendet. Die linke Argumentation entspricht einer Anwendung der Implikationseinführung

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A \to B}\,(\to \mathrm{E})$$

bei der B die Formel $\bot$ ist. Die rechte Argumentation stellt hingegen eine Anwendung der Widerspruchsregel ($\bot$) dar. Würde man statt der Widerspruchsregel ($\bot$) nur ($\to$ E) zulassen, erhielte man einen schwächeren Kalkül (die resultierende Logik bezeichnet man als *minimale Logik*), in dem die Widerspruchsregel keine ableitbare Regel ist. Man hat in diesem Fall zwar

$$\frac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg\neg A}\,(\to \mathrm{E})$$

kann aber von $\neg\neg A$ nicht auf A schließen, da dies gerade die Widerspruchsregel erfordert (vgl. das obige Beispiel (iii) auf S. 51 zu $\neg\neg A \vdash A$).

Beispiele. (i) Wir beweisen den Satz vom ausgeschlossenen Dritten (tertium non datur) $A \vee \neg A$, indem wir dessen Negation zum Widerspruch führen:

$$\frac{\dfrac{\neg A \qquad\qquad A}{\bot}\,\begin{matrix}\\(\to \mathrm{B})\end{matrix}}{A \vee \neg A}\,(\bot)^3 \quad\text{mit}\quad \neg A:\ \frac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)]^3 \quad \dfrac{[A]^1}{A \vee \neg A}\,(\vee \mathrm{E})}{\bot}\,(\to \mathrm{B})}{\neg A}\,(\to \mathrm{E})^1, \quad A:\ \frac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)]^3 \quad \dfrac{[\neg A]^2}{A \vee \neg A}\,(\vee \mathrm{E})}{\bot}\,(\to \mathrm{B})}{A}\,(\bot)^2$$

Hier wird in der linken Teilableitung unter der Annahme A ein Widerspruch $\bot$ abgeleitet, um dann mit Implikationseinführung ($\to$ E) von $\bot$ auf $\neg A$ zu schließen. In der rechten Teilableitung wird der Widerspruch hingegen unter Annahme von $\neg A$ abgeleitet, um dann mit der Widerspruchsregel ($\bot$) auf A zu schließen. In beiden Teilableitungen wurde zusätzlich die Annahme $\neg(A \vee \neg A)$ gemacht. Beide Vorkommen der Annahme werden bei Anwendung der Widerspruchsregel im letzten Schritt gelöscht.

(ii) Die folgende Ableitung von $A \vee \neg A$ kommt mit nur einer Anwendung der Widerspruchsregel aus:

$$\frac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)]^2 \quad \dfrac{[A]^1}{A \vee \neg A}\,(\vee \mathrm{E})}{\bot}\,(\to \mathrm{B})}{\neg A}\,(\to \mathrm{E})^1}{A \vee \neg A}\,(\vee \mathrm{E})}{\bot}\,(\to \mathrm{B})}{A \vee \neg A}\,(\bot)^2$$

($\to$ E) und ($\bot$) werden wie in (i) verwendet.

5.3 Korrektheit und Vollständigkeit

In der Semantik haben wir als zentrale Begriffe der Logik *logische Folgerung* ($\Gamma \vDash A$) und *Allgemeingültigkeit* ($\vDash A$) behandelt. Mit dem Kalkül des natürlichen Schließens haben wir als weitere zentrale Begriffe *Ableitbarkeit* ($\Gamma \vdash A$) und *Beweisbarkeit* ($\vdash A$) erhalten. Für das Verhältnis dieser Begriffe gilt Folgendes:

Theorem 5.10 (Korrektheit) *Wenn* $\Gamma \vdash A$*, dann* $\Gamma \vDash A$*. Das heißt, der Kalkül NK ist korrekt.*

Bemerkung. Um nachzuweisen, dass eine Formel A aus Annahmen Γ nicht ableitbar ist, genügt also der Nachweis, dass A aus Γ nicht logisch folgt. (Verwendung von Korrektheit per Kontraposition.)

Theorem 5.11 (Vollständigkeit) *Wenn* $\Gamma \vDash A$*, dann* $\Gamma \vdash A$*. Das heißt, der Kalkül NK ist vollständig.*

Für die Beweise von Korrektheit und Vollständigkeit siehe z. B. § 2.5 in D. van Dalen, *Logic and Structure*, 5th ed., Springer, 2013.

Korollar 5.12 *Insbesondere gilt für* $\Gamma = \emptyset$*:* $\vdash A$ *genau dann, wenn* $\vDash A$*. Das heißt, eine Formel ist genau dann beweisbar, wenn sie allgemeingültig ist.*

Bemerkung. Die Begriffe *logische Folgerung* und *Ableitbarkeit* sind zwar extensional gleich, da die Mengen der durch sie ausgezeichneten Gegenstände (geordnete Paare $\langle \Gamma, A \rangle$) gleich sind: $\{\langle \Gamma, A \rangle \mid \Gamma \vDash A\} = \{\langle \Gamma, A \rangle \mid \Gamma \vdash A\}$ (d. h. die Paare $\langle \Gamma, A \rangle$ mit der Eigenschaft $\Gamma \vDash A$ sind genau jene Paare $\langle \Gamma, A \rangle$ mit der Eigenschaft $\Gamma \vdash A$). Die Begriffe sind jedoch intensional verschieden, da die durch sie ausgezeichneten Gegenstände $\langle \Gamma, A \rangle$ auf verschiedene Weise gegeben sind. Gleiches gilt für *Allgemeingültigkeit* und *Beweisbarkeit*.

Korollar 5.13 *Sei* Γ *eine beliebige (möglicherweise unendliche) Menge von Formeln, und* A *eine beliebige Formel. Falls* $\Gamma \vDash A$ *gilt, gibt es eine endliche Teilmenge* Γ' *von* Γ*, so dass* $\Gamma' \vDash A$ *gilt.*

Beweis. Aufgrund Vollständigkeit gilt mit $\Gamma \vDash A$ auch $\Gamma \vdash A$. Nach Theorem 5.7 gibt es dann eine endliche Teilmenge $\Gamma' \subseteq \Gamma$, so dass $\Gamma' \vdash A$. Aufgrund Korrektheit gilt dann auch $\Gamma' \vDash A$. QED

6 Einleitung zur Quantorenlogik

Ganz zu Beginn (vgl. S. 7) hatten wir als Beispiel für einen gültigen Schluss angegeben:

$$\frac{\text{Alle Menschen sind sterblich.}\quad \text{Sokrates ist ein Mensch.}}{\text{Sokrates ist sterblich.}}$$

Mit den Mitteln der Aussagenlogik erhält man eine Formalisierung

$$p, q \vDash r$$

wobei p: Alle Menschen sind sterblich; q: Sokrates ist ein Mensch; r: Sokrates ist sterblich. Obgleich die Formalisierung aussagenlogisch adäquat ist, gilt die Folgerungsbehauptung $p, q \vDash r$ nicht (ein Gegenbeispiel ist die Bewertung h mit $[\![p]\!]^h = [\![q]\!]^h = \mathrm{w}$ und $[\![r]\!]^h = \mathrm{f}$). Aus Sicht der Aussagenlogik könnte man daraus folgern, dass auch das natürlichsprachliche Ausgangsargument nicht gültig ist.
Hingegen würde man aus Sicht des intuitiven Begriffs von Gültigkeit natürlichsprachlicher Argumente den Schluss ziehen, dass die formale Aussagenlogik nicht ausreicht, um alle intuitiv gültigen Argumente auch als formal gültige Schlüsse zu erfassen.
Der Grund dafür besteht in der mangelnden Ausdrucksstärke der formalen Sprache der Aussagenlogik. Diese ermöglicht bestenfalls eine adäquate Formalisierung natürlichsprachlicher Aussagen auf der Ebene ganzer Aussagen, bzw. von mit Konnektiven aus Aussagen zusammengesetzten Aussagen. In unserem Beispiel kommen jedoch nur Aussagen ohne Konnektive vor, so dass als Formalisierung nur die angegebene bleibt. Eine Betrachtung des intuitiv gleichwertigen, gültigen Schlusses

$$\frac{}{\text{Wenn alle Menschen sterblich sind, und Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich.}}$$

führt auch nicht weiter. Zwar kommen nun Konnektive vor, doch die aussagenlogisch adäquate Formalisierung dieses Schlusses als

$$\vDash (p \land q) \to r$$

stellt eine ungültige Behauptung der Allgemeingültigkeit von $(p \land q) \to r$ dar.
Als eine erste Präzisierung des intuitiven Begriffs von Gültigkeit hatten wir vorgeschlagen:

> Ein Schluss ist *gültig*, falls es keine Interpretation gibt, für die zwar die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist.

Zur besseren Vergleichbarkeit mit dem Begriff der aussagenlogischen Folgerung können wir diese Präzisierung auch so fassen:

> Ein Schluss von Prämissen Γ auf eine Konklusion A ist *gültig* genau dann, wenn für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt: Wenn die Prämissen Γ unter $\mathcal{I}$ wahr sind, dann ist die Konklusion A unter $\mathcal{I}$ wahr.

Dieser Begriff ist offensichtlich weiter gefasst als der aussagenlogische Begriff der logischen Folgerung, da Interpretationen hier nicht allein auf Bewertungen beschränkt sind. Dies ermöglicht es uns, auch innerhalb von aus aussagenlogischer Sicht unzerlegbaren Aussagen für bestimmte Komponenten verschiedene Interpretationen zuzulassen. Diese Komponenten hatten wir im Beispiel durch Zeichen P, Q, C repräsentiert (vgl. S. 8):

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Alle } P \text{ sind } Q.\\ C \text{ ist } P.\end{array}}{C \text{ ist } Q.}$$

Eine Interpretation besteht nun in der Angabe von Bedeutungen für P, Q und C. Mit Blick auf den ursprünglichen Schluss stellt man fest, dass die möglichen Bedeutungen von P und Q von verschiedener Art wie die möglichen Bedeutungen von C sein müssen. Zum Beispiel steht Q anstelle des Eigenschaftswortes “sterblich”, während C anstelle des Namens (Designators) “Sokrates” steht. Für Q wird man deshalb als Bedeutungen nur Eigenschaften (d. h. Attribute von Gegenständen oder Relationen zwischen Gegenständen) zulassen, während man für C nur Gegenstände (Individuen) als Bedeutungen zulässt. Für die Kopula (“ist”, “sind”) haben wir keine verschiedenen Interpretationen zugelassen; das ist jedoch unwesentlich, da wir die Kopula immer auch als Bestandteil der Eigenschaftswörter auffassen können. Wesentlich ist aber, dass wir im Fall des Quantors “alle” keine verschiedenen Interpretationen zulassen, da wir diesen als logische Konstante behandeln wollen.

Um diese zusätzlichen Interpretationsmöglichkeiten im Rahmen der formalen Logik behandeln zu können, müssen wir die formale Sprache der Aussagenlogik in geeigneter Weise erweitern. Als Resultat werden wir die formale Sprache der Quantorenlogik erhalten.

Dazu führen wir zunächst Prädikatsymbole $P, Q, R, \ldots$ und Individuenkonstanten $k, k', l, \ldots$ ein. Prädikatsymbole werden anstelle von Eigenschaftswörtern verwendet. Individuenkonstanten übernehmen die Funktion von Designatoren, d. h. sie stehen anstelle von Ausdrücken, die einzelne Gegenstände bezeichnen. Um auch über beliebige Gegenstände etwas sagen zu können, werden wir Individuenvariablen $x, y, z, \ldots$ verwenden. Schließlich führen wir den Allquantor $\forall$ und den Existenzquantor $\exists$ ein, mit denen quantifizierte Aussagen über beliebige Gegenstände gebildet werden können. Anhand von Beispielen werden diese Spracherweiterungen im Folgenden motiviert und deren Funktion erläutert.

6.1 Prädikatsymbole und Individuenkonstanten

Beispiel. Die Aussage

Sokrates ist ein Mensch

enthält den Namen “Sokrates”. Das, was übrigbleibt, wenn man den Namen entfernt, ist das Prädikat:

. . . ist ein Mensch

An die Stelle der Auslassung “. . .” können beliebige Namen treten. Für jede Einsetzung eines Namens erhält man eine neue Aussage; z. B.

Aristoteles ist ein Mensch

oder

Tübingen ist ein Mensch.

Man kann auch sagen, dass das Prädikat “. . . ist ein Mensch” eine Argumentstelle hat, was so geschrieben werden kann:

ist ein Mensch(...)

Setzt man den Namen “Sokrates” als Argument ein, erhält man den Ausdruck

ist ein Mensch(Sokrates)

In dieser Form wird deutlich gemacht, dass die Ausgangsaussage “Sokrates ist ein Mensch” so gelesen werden kann: Die Eigenschaft, ein Mensch zu sein, trifft auf das mit dem Namen “Sokrates” bezeichnete Individuum zu; bzw.: Sokrates hat die Eigenschaft, ein Mensch zu sein. Unter Verwendung des (1-stelligen) Prädikatsymbols P kann man entsprechend schreiben:

$P(\ldots)$

Setzt man eine Individuenkonstante k ein, erhält man die Aussage

$P(k)$

welche besagt, dass die Eigenschaft P auf k zutrifft. Legt man zusätzlich fest, dass P für die Eigenschaft steht, ein Mensch zu sein, und dass k das Individuum Sokrates bezeichnet, so stellt $P(k)$ eine Formalisierung der Ausgangsaussage “Sokrates ist ein Mensch” dar. Entsprechend kann man festlegen, dass das (1-stellige) Prädikatsymbol Q für die Eigenschaft steht, sterblich zu sein. Dann ist $Q(k)$ eine Formalisierung der Aussage “Sokrates ist sterblich”.

Prädikate können auch mehr als eine Argumentstelle haben. Zu deren Formalisierung verwendet man entsprechend mehrstellige Prädikatsymbole.

Beispiel. Die Aussage

Der Neckar fließt durch Tübingen

enthält die beiden Namen “Neckar” und “Tübingen”. Entfernt man beide, bleibt das 2-stellige Prädikat

... fließt durch ...

bzw.

fließt durch(..., ...)

übrig. Bei mehrstelligen Prädikaten kommt es auf die Reihenfolge der Argumente an. Sei R ein 2-stelliges Prädikatsymbol (bzw. Relationszeichen), das für die Eigenschaft “fließt durch” stehe, und bezeichne die Individuenkonstante k den Neckar und l die Stadt Tübingen, so erhält man mit

$R(k, l)$

die der natürlichsprachlichen Ausgangsaussage “Der Neckar fließt durch Tübingen” entsprechende wahre Aussage. Hingegen ist

$R(l, k)$

eine falsche Aussage (sie entspricht “Tübingen fließt durch den Neckar”).

Bemerkung. Individuen müssen nicht immer durch Eigennamen wie "Tübingen" bezeichnet sein. Zum Beispiel wird in der Aussage

> Der Verfasser der *Kritik der reinen Vernunft* lebte in Königsberg

ein Individuum (I. Kant) durch den Designator "der Verfasser der *Kritik der reinen Vernunft*" bezeichnet. Als weiterer Designator kommt der Name "Königsberg" vor, der die Stadt Königsberg bezeichnet.
Durch Weglassung von Designatoren können hier folgende Prädikate übrigbleiben:

(i) Der Verfasser der *Kritik der reinen Vernunft* lebte in ...

Man erhält ein 1-stelliges Prädikat der Form $S(\ldots)$.

(ii) ... lebte in Königsberg

Man erhält ein anderes 1-stelliges Prädikat $T(\ldots)$ derselben Form.

(iii) ... lebte in ...

Man erhält ein 2-stelliges Prädikat der Form $R(\ldots,\ldots)$.

Lässt man auch die "leere" Weglassung zu, so bleibt als Prädikat die Aussage selbst:

(iv) Der Verfasser der *Kritik der reinen Vernunft* lebte in Königsberg.

Man erhält ein 0-stelliges Prädikat der Form P (d. h. ein Prädikat ohne Argumentstelle).

Wir lassen auch 0-stellige Prädikatsymbole wie P zu. Sie haben dieselbe Funktion wie die Aussagesymbole $p, q, r, \ldots$ in der Aussagenlogik.

6.2 Individuenvariablen

Um auch Aussagen über beliebige Individuen machen zu können, erweitern wir unsere Sprache nun um Individuenvariablen $x, y, z, \ldots$.

Beispiel. Statt der Aussage

> Alle Menschen sind sterblich

kann man auch sagen

> Für alle Individuen gilt: Wenn ein Individuum ein Mensch ist, dann ist dieses Individuum sterblich.

"Ein Individuum" und "dieses Individuum" stehen hier für ein beliebiges, aber in beiden Fällen identisches Individuum. Unter Verwendung der Individuenvariable x kann man sagen:

> Für alle x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann ist x sterblich.

Auf das "dieses" kann also verzichtet werden, da wir für beide Fälle dieselbe Variable x verwendet haben. Unter Verwendung der 1-stelligen Prädikatsymbole P und Q können wir dies weiter umschreiben zu

> Für alle x gilt: Wenn $P(x)$, dann $Q(x)$.

Den hinteren Teil "Wenn $P(x)$, dann $Q(x)$" können wir aussagenlogisch formalisieren:

> Für alle x gilt: $(P(x) \to Q(x))$

wobei $P(x)$: x ist ein Mensch; $Q(x)$: x ist sterblich.

6.3 Quantoren

Als weitere Spracherweiterung führen wir jetzt das Symbol $\forall$ für den Allquantor "für alle" ein. Damit können wir die Formalisierung aus dem vorherigen Beispiel fortsetzen:

Beispiel. Aus "Für alle x gilt: $(P(x) \to Q(x))$" wird $\forall x(P(x) \to Q(x))$.

Eine Formalisierung des Schlusses

$$\frac{\text{Alle Menschen sind sterblich.} \quad \text{Sokrates ist ein Mensch.}}{\text{Sokrates ist sterblich.}}$$

kann damit wie folgt lauten: $\forall x(P(x) \to Q(x)), P(k) \vDash Q(k)$, wobei

$P(x)$: x ist ein Mensch

$Q(x)$: x ist sterblich

k: Sokrates

Diese Formalisierung weist eine wesentlich feinere Struktur als die eingangs betrachtete aussagenlogische Formalisierung auf. Dadurch sind weitaus vielfältigere Interpretationen möglich, die wir in der Semantik der Quantorenlogik untersuchen werden.

Bemerkung. Natürlichsprachlich wird "alle" in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht:

(i) *Distributiv*, wie z. B. in "Alle Menschen sind sterblich", wo man "alle" auch durch "jeder" ersetzen kann: "Jeder Mensch ist sterblich".

(ii) *Kollektiv*, wie z. B. in "Alle Vorlesungen kann man nicht an einem Nachmittag halten", wo man sich mit "alle" auf eine Gesamtheit von Gegenständen bezieht.

Die beiden Verwendungen sind zu unterscheiden. Würde man z. B. das "alle" in (ii) nicht kollektiv, sondern distributiv verstehen, könnte man folgern: "Die heutige Vorlesung kann nicht an einem Nachmittag gehalten werden".
Der Allquantor $\forall$ wird ausschließlich für das distributiv verstandene "alle" verwendet.

Als weiteren Quantor betrachten wir den Existenzquantor "es gibt ein", für den wir das Symbol $\exists$ verwenden.

Bemerkung. Statt "es gibt ein" sagt man auch "einige sind" oder "manche sind". Man verwendet den Existenzquantor $\exists$ aber immer in der Bedeutung "es gibt mindestens ein". Natürlichsprachlich kann "es gibt ein" auch in der Bedeutung "es gibt genau ein" und "einige sind" in der Bedeutung "es gibt mehr als ein" gebraucht werden. Bei Formalisierungen ist deshalb auf den Kontext zu achten.

Beispiel. Die Aussage

Es gibt einen Menschen

kann schrittweise über

Es gibt ein x, für das gilt: x ist ein Mensch

Es gibt ein x, für das gilt: $P(x)$

zu

$$\exists x P(x)$$

umgeformt werden, wobei P wieder für die Eigenschaft, ein Mensch zu sein, stehe.

Beispiel. Eine Aussage wie

> Einige Menschen sind Logiker

kann schrittweise umgeschrieben werden zu

> Es gibt ein x, für das gilt: x ist ein Mensch, und x ist ein Logiker
> Es gibt ein x, für das gilt: $(P(x) \wedge S(x))$

wobei das Prädikatsymbol S für die Eigenschaft stehe, ein Logiker zu sein. Unter Verwendung des Symbols $\exists$ wird daraus schließlich

$$\exists x(P(x) \wedge S(x))$$

als Formalisierung der Ausgangsaussage "Einige Menschen sind Logiker".

Bemerkungen. (i) Eine Formalisierung $\exists x(P(x) \to S(x))$ wäre nicht adäquat, da diese aufgrund der Bedeutung der Implikation schon dann wahr wäre, wenn es ein Individuum gibt, für das $P(x)$ nicht gilt.

(ii) Bei der Formalisierung von "Alle Menschen sind sterblich" wäre hingegen $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ nicht adäquat, da Letzteres nur dann wahr ist, wenn alle Individuen Menschen und sterblich sind.

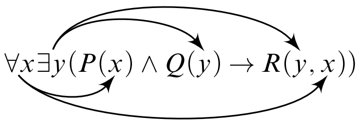
(iii) Dass die Quantoren "alle" und "einige" nicht wie Designatoren verwendet werden können, kann man sich an einem Beispiel klarmachen:

Die Aussage "München ist groß und schön" ist gleichbedeutend mit der Aussage "München ist groß und München ist schön". Ersetzt man nun den Designator "München" durch den Quantor "einiges", so erhält man "einiges ist groß und einiges ist schön". Dies drückt jedoch nicht aus, dass es etwas gibt, dass zugleich groß und schön ist, wie dies für München behauptet wurde. Noch deutlicher wird der Unterschied, wenn wir "schön" durch "klein" ersetzen. Dann erhält man die wahre Aussage "einiges ist groß und einiges ist klein", während "einiges ist groß und klein" eine falsche Aussage ist. Die Ersetzung eines Designators ("München") durch einen Quantor ("einiges") hat also dazu geführt, dass die beiden Aussagen nicht mehr gleichbedeutend sind.

Entsprechendes kann man sich für den Allquantor überlegen. Die Quantoren haben also eine andere sprachliche Funktion als die Designatoren.

(iv) Bei den Quantoren handelt es sich um *variablenbindende* Operatoren. Sie unterscheiden sich dadurch wesentlich von den aussagenlogischen Operatoren, den Konnektiven. Konnektive verbinden Formeln zu einer neuen Formel, wobei erstere dann unmittelbare Teilformeln letzterer sind. In Formeln der Form $\forall x A$ und $\exists x A$ stellen die Quantoren $\forall x$ und $\exists x$ zusätzlich eine Verbindung zu allen Vorkommen der Variablen x in A her, d. h. einschließlich der Vorkommen von x in Teilformeln der unmittelbaren Teilformel A.

Zur Veranschaulichung:



$$\forall x \exists y (P(x) \land Q(y) \rightarrow R(y, x))$$

Die Pfeile drücken die Bindung der Variablen durch den jeweiligen Quantor aus.

(Die Einführung von Quantoren als variablenbindende Operatoren durch G. Frege, *Begriffsschrift* (1879) stellt einen wichtigen Schritt in der Entwicklung der Logik dar.)

Die durch die Spracherweiterungen gewonnene Ausdrucksstärke kommt insbesondere dann zum Tragen, wenn mehrere Quantoren in einer Aussage verwendet werden müssen.

Beispiele. Es sei

k: Sokrates
$S(x, y)$: x sieht y

Die Variablen x und y stehen hier für beliebige Individuenvariablen $x, y, z, \ldots$. Wichtig ist, dass x und y prinzipiell verschiedene Variablen sein können, aber nicht müssen; d. h. es darf anstelle von x und y dasselbe oder Verschiedenes stehen. Hingegen dürfte bei einer Festlegung wie "$S(x, y)$: x sieht x" an beiden Argumentstellen von S nur dasselbe stehen.
Den Individuenbereich (d. h. den Bereich der Gegenstände, über den quantifiziert wird) beschränken wir auf Menschen.
Formalisierungen:

(i) Es gibt jemanden, der Sokrates sieht. $\exists x S(x, k)$
(ii) Sokrates sieht jemanden. (Es gibt jemanden, den Sokrates sieht.) $\exists x S(k, x)$
(iii) Jeder sieht jeden. $\forall x \forall y S(x, y)$
(iv) Jeder sieht jemanden. $\forall x \exists y S(x, y)$
(v) Einer sieht jeden. (Es gibt jemanden, der jeden sieht.) $\exists x \forall y S(x, y)$
(vi) Jeder wird von jemandem gesehen. $\forall y \exists x S(x, y)$
(vii) Es gibt jemanden, der von jedem gesehen wird. $\exists y \forall x S(x, y)$
(viii) Es gibt jemanden, der jemanden sieht. $\exists x \exists y S(x, y)$
(ix) Jeder sieht sich selbst. $\forall x S(x, x)$
(x) Es gibt jemanden, der sich selbst sieht. $\exists x S(x, x)$

Die vorgenommenen Spracherweiterungen bilden die Grundlage der Quantorenlogik. Da hierbei neben Quantoren Prädikate eine herausragende Rolle spielen, bezeichnet man die Quantorenlogik auch als *Prädikatenlogik*. Eine weitere Bezeichnung ist *Logik erster Stufe* (engl. *first-order logic*).

Nach diesen einleitenden Bemerkungen legen wir nun die formale Sprache der Quantorenlogik noch etwas präziser fest.

7 Die formale Sprache der Quantorenlogik

Definition 7.1 Wir erweitern das *Alphabet* um folgende Zeichen: *Alphabet*

(i) *Quantoren*: ∀ (Allquantor, “für alle”) und ∃ (Existenzquantor, “es gibt”).

(ii) *Terme*:
  - *Individuenvariablen* (kurz: *Variablen*): $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
  - *Individuenkonstanten* (kurz: *Konstanten*): $k, k', k_1, k_2, \ldots, l, \ldots$

(iii) *Relationszeichen* (bzw. *Prädikatsymbole*): $P, Q, R, \ldots$

(Gegebenenfalls mit fester Stelligkeit, so dass z. B. R^1 ein 1-stelliges und R^2 ein 2-stelliges Relationszeichen ist. 0-stellige Relationszeichen entsprechen Aussagesymbolen.)

(iv) Komma: ,

Bemerkung. Als metasprachliche Variablen für Terme verwenden wir im Folgenden Buchstaben $r, s, t, t_1, t_2, \ldots$.
Wir verzichten aber auf gesonderte metasprachliche Variablen wie z. B. $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ für objektsprachliche Variablen $x, y, z, \ldots$ und auf metasprachliche Variablen wie z. B. $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ für objektsprachliche Konstanten $k, k', l, \ldots$; ebenso verzichten wir auf metasprachliche Variablen wie z. B. $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots$ für objektsprachliche Relationszeichen $P, Q, R, \ldots$.
Stattdessen verwenden wir objektsprachliche Variablen und Relationszeichen gelegentlich auch als metasprachliche Variablen für objektsprachliche Zeichen der jeweiligen Art. Durch den Kontext wird immer klar sein, was gemeint ist.
Zum Beispiel wird in der folgenden Definition von Formeln das Zeichen R als metasprachliche Variable für beliebige objektsprachliche Relationszeichen verwendet, und das Zeichen x wird als metasprachliche Variable für beliebige objektsprachliche Individuenvariablen verwendet.

Definition 7.2 Wir erweitern die Definition von *Formeln* wie folgt: *Formel*

(i) Ist R ein n-stelliges Relationszeichen und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $R(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel, die wir *atomare Formel* bzw. *Atom* nennen.

(Abkürzend kann man auch $Rt_1 \ldots t_n$ schreiben. Im Fall 0-stelliger Relationszeichen R schreiben wir statt $R()$ stets R.)

(ii) Ist A eine Formel und ist x eine Variable, dann sind $\forall x A$ und $\exists x A$ ebenfalls Formeln.

Definition 7.3 Wir ergänzen die Definition von (unmittelbare) Teilformel um die Klausel: A ist *unmittelbare Teilformel* von $\forall x A$ und $\exists x A$. *unmittelbare Teilformel*

Bemerkungen. (i) Die Quantoren binden stärker als die übrigen logischen Konstanten. Klammerersparnis entsprechend. *Bindungsstärke*

(ii) Das *Vorkommen* eines Zeichens sei nur anhand eines Beispiels erläutert: In der Formel $\forall x(P(x) \wedge Q(x, y))$ kommt x dreimal und y einmal vor. *Vorkommen*

Definition 7.4 Wir definieren *freie* bzw. *gebundene* Variablenvorkommen: *frei/gebunden*

(i) Jedes Variablenvorkommen in einer atomaren Formel ist frei.

(ii) Die freien bzw. gebundenen Variablenvorkommen in A und B sind auch freie bzw. gebundene Variablenvorkommen in $\neg A$, $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$ und $(A \leftrightarrow B)$.

(iii) Jedes freie Vorkommen von x in A ist ein gebundenes Vorkommen von x in $\forall xA$ und $\exists xA$.

Alle anderen freien bzw. gebundenen Variablenvorkommen in A sind auch freie bzw. gebundene Variablenvorkommen in $\forall xA$ und $\exists xA$.

Die freien Vorkommen von x in A liegen in den Formeln $\forall xA$ bzw. $\exists xA$ im *Wirkungsbereich* des Allquantors $\forall x$ bzw. des Existenzquantors $\exists x$. *Wirkungsbereich*

Es sei $\mathrm{FV}(A)$ die Menge der Variablen, die in einer Formel A frei vorkommen. Ist $\mathrm{FV}(A) \neq \emptyset$, so heißt die Formel A *offen*. Ist $\mathrm{FV}(A) = \emptyset$, dann heißt A *geschlossen* oder *Aussage*. *offen/geschlossen*

Bemerkung. Bei metasprachlichen Variablen für Formeln A schreiben wir z. B. $A(x)$, um auszudrücken, dass x in A frei vorkommen kann. (Der Ausdruck $A(x)$ steht also i. A. nicht für ein Atom wie z. B. $P(x)$, sondern für eine beliebige Formel.)

Beispiele. Für die Variablenvorkommen gilt:

(i) $R(x, y, y)$ – x, y sind frei.

(ii) $\exists z(Q(z, k) \to \neg R(x, y, y))$ – x, y sind frei; z ist gebunden. Der Wirkungsbereich des Existenzquantors $\exists z$ ist die unmittelbare Teilformel $(Q(z, k) \to \neg R(x, y, y))$, in der z frei vorkommt.

(In $\exists z$ ist z weder frei noch gebunden.)

Es ist $\mathrm{FV} = \{x, y\}$. Die Formel ist also offen.

(iii) $\exists y\, \overbrace{(P(x, y) \lor \exists z\, \underbrace{(Q(z, k) \to \neg R(x, y, y))}_{\text{Wirkungsbereich von } \exists z})}^{\text{Wirkungsbereich von } \exists y}$ – x ist frei; y, z sind gebunden.

(In $\exists y$ ist y weder frei noch gebunden.)

Es ist $\mathrm{FV} = \{x\}$. Die Formel ist also offen.

(iv) $\forall xP(x) \land Q(x)$ – Das erste Vorkommen von x ist weder frei noch gebunden; das zweite ist gebunden, das dritte frei (nur $P(x)$ steht im Wirkungsbereich des Allquantors $\forall x$, nicht aber $Q(x)$).

Es ist $\mathrm{FV} = \{x\}$. Die Formel ist also offen.

(v) $\forall x \exists y(P(x) \lor Q(y, x))$ – x, y sind gebunden.

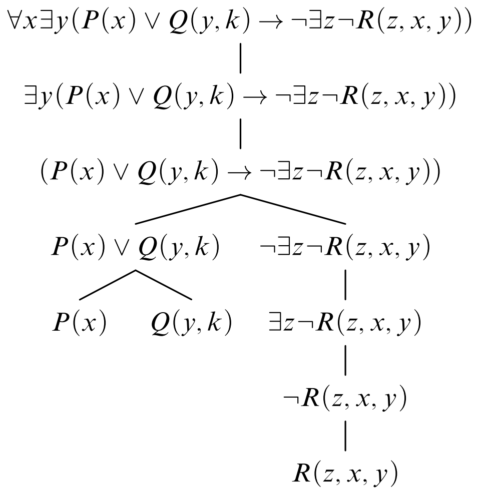
Es ist $\mathrm{FV} = \emptyset$. Es handelt sich also um eine geschlossene Formel, d. h. um eine Aussage.

Definition 7.5 Die Definition von *Strukturbaum* erweitern wir um die folgende Klausel: *Strukturbaum*

(iv) Die Strukturbäume $Sb(\forall xA)$ bzw. $Sb(\exists xA)$ von Formeln $\forall xA$ bzw. $\exists xA$ sind

$$\begin{array}{ccc} \forall xA & & \exists xA \\ | & \text{bzw.} & | \\ Sb(A) & & Sb(A) \end{array}$$

Beispiel. Der Strukturbaum der Formel $\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y,k) \to \neg \exists z \neg R(z,x,y))$ ist:



Die Formel enthält die drei atomaren Formeln $P(x)$, $Q(y,k)$ und $R(z,x,y)$.

8 Semantik der Quantorenlogik

Zur Bestimmung des Wahrheitswerts einer aussagenlogischen Formel genügte die Betrachtung von Bewertungen h, d. h. von Interpretationen der in der Formel vorkommenden Aussagesymbole durch Wahrheitswerte. Bei quantorenlogischen Formeln müssen zusätzlich Interpretationen der in der Formel vorkommenden Individuenkonstanten und Relationszeichen betrachtet werden. Individuenkonstanten werden durch Gegenstände interpretiert, und n-stellige Relationszeichen werden durch n-stellige Relationen zwischen Gegenständen interpretiert (bzw. im Fall 1-stelliger Relationszeichen durch Eigenschaften von Gegenständen, und im Fall 0-stelliger Relationszeichen durch Wahrheitswerte). Interpretationen ordnen diesen nicht-logischen Zeichen der formalen Sprache also Bedeutungen zu wie folgt:

formale Sprache	*zugeordnete Bedeutung,*	*dargestellt als*
Aussagesymbol	Wahrheitswert	leere bzw. nichtleere Menge
0-stelliges Relationszeichen	Wahrheitswert	leere bzw. nichtleere Menge
Individuenkonstante	Gegenstand	Element einer Menge
1-stelliges Relationszeichen	1-stellige Relation	Menge von Gegenständen
2-stelliges Relationszeichen	2-stellige Relation	Menge geordneter Paare
3-stelliges Relationszeichen	3-stellige Relation	Menge von Tripeln
⋮	⋮	⋮
n-stelliges Relationszeichen	n-stellige Relation	Menge von n-Tupeln

Für die Interpretationen können beliebige Mengen von Gegenständen zugelassen werden. Insbesondere kann auch eine Beschränkung auf einen bestimmten Gegenstandsbereich vorgenommen werden. Wählt man zum Beispiel den Bereich der natürlichen Zahlen (d. h. die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$), so muss jeder Konstante eine natürliche Zahl, und jedem Relationszeichen eine Relation zwischen natürlichen Zahlen zugeordnet werden. Dabei sind jedoch nur Interpretationen für jene Konstanten und Relationszeichen anzugeben, die auch tatsächlich verwendet werden. Im Folgenden betrachten wir deshalb quantorenlogische formale Sprachen $\mathscr{L}$, in denen nur bestimmte Konstanten und Relationszeichen vorkommen. Die Kombination von Gegenstandsbereich und entsprechender Interpretation für eine Sprache $\mathscr{L}$ wird als (*mengentheoretische*) *Struktur* für $\mathscr{L}$ bezeichnet.

8.1 Strukturen

Definition 8.1 Eine *Struktur* für eine Sprache $\mathscr{L}$ ist ein geordnetes Paar $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$, wobei M eine nichtleere Menge ist und $\mathcal{I}$ eine Funktion, die jedem Symbol aus $\mathscr{L}$ eine *Interpretation* zuordnet wie folgt:

Struktur

Interpretation

(i) $\mathcal{I}(k) \in M$ für Konstanten $k \in \mathscr{L}$,

(ii) $\mathcal{I}(R) \subseteq M^n$, falls $R \in \mathscr{L}$ ein n-stelliges Relationszeichen ist ($n \geq 1$),

(iii) $\mathcal{I}(R) \in \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$, falls $R \in \mathscr{L}$ ein 0-stelliges Relationszeichen, d. h. ein Aussagesymbol ist, wobei $\mathrm{w} := \emptyset$ und $\mathrm{f} := M$.

Die Menge M heißt *Gegenstandsbereich* (oder auch *Individuenbereich*, *Universum*).

Gegenstandsbereich

Gemäß Klausel (i) ist jeder Konstante $k \in \mathscr{L}$ ein Gegenstand aus M zuzuordnen.

Beispiel. Ist M die Menge der Menschen und $k_1, l \in \mathscr{L}$, dann ist $\mathcal{I}$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(k_1) &= \text{Sokrates} \\ \mathcal{I}(l) &= \text{Aristoteles} \end{aligned}$$

eine Interpretation der Konstanten in $\mathscr{L}$.

Gemäß Klausel (ii) ist für $n \geq 1$ jedem n-stelligen Relationszeichen $R \in \mathscr{L}$ eine n-stellige Relation auf M^n zuzuordnen. (M^n ist die Menge aller n-Tupel, die mit Elementen aus M gebildet werden können.)

Beispiel. Ist $M = \{\text{Sokrates, Alexander der Große, Aristoteles, Platon}\}$, dann kann die Interpretation $\mathcal{I}(R)$ des 2-stelligen Relationszeichens R als Relation "... ist Schüler von ..." wie folgt als Menge von geordneten Paaren extensional notiert werden (d. h. durch explizite Angabe aller Elemente; hier: Paare $\langle m_1, m_2 \rangle$):

$\mathcal{I}(R) = \{\langle \text{Aristoteles, Platon} \rangle, \langle \text{Platon, Sokrates} \rangle, \langle \text{Alexander der Große, Aristoteles} \rangle\}$

Alternativ kann die Menge intensional notiert werden (d. h. durch Angabe der Eigenschaft, die auf alle Elemente zutreffen muss):

$$\mathcal{I}(R) = \{\langle m_1, m_2 \rangle \mid m_1 \text{ ist Schüler von } m_2\}$$

wobei m_1 und m_2 für Gegenstände in M stehen.

Allgemein werden Interpretationen n-stelliger Relationszeichen für $n \geq 2$ als Mengen von n-Tupeln $\langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle$ angegeben, d. h. je nach Stelligkeit als Paare $\langle m_1, m_2 \rangle$, Tripel $\langle m_1, m_2, m_3 \rangle$, Quadrupel $\langle m_1, m_2, m_3, m_4 \rangle$ usw. Ein 1-Tupel $\langle m_1 \rangle$ sei dasselbe wie der Gegenstand m_1. Da Paare $\langle m_1, m_2 \rangle$ als Mengen von Mengen $\{\{m_1\}, \{m_1, m_2\}\}$ definiert werden können, und n-Tupel $\langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle$ auf geordnete Paare $\langle \langle m_1, m_2, \ldots, m_{n-1} \rangle, m_n \rangle$ zurückgeführt werden können, müssen letztlich nur Mengen vorausgesetzt werden.
Interpretationen 0-stelliger Relationszeichen $R \in \mathscr{L}$ gemäß Klausel (iii) entsprechen aussagenlogischen Bewertungen h. Für Aussagesymbole $p, q, r, \ldots$ könnte man also statt z. B. $\mathcal{I}(p) = \text{w}$ auch $h(p) = \text{w}$ schreiben, um auszudrücken, dass p in einer Struktur $\mathfrak{M}$ der Wahrheitswert w zugeordnet wird. Im Unterschied zu Interpretationen $\mathcal{I}$ sind jedoch Bewertungen h nicht für 0-stellige Relationszeichen R definiert.
Die mengentheoretische Festlegung der beiden Wahrheitswerte durch $\text{w} := \emptyset$ und $\text{f} := M$ in Strukturen $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ ist möglich, da für jede Struktur $M \neq \emptyset$ gefordert wird (und stets $\emptyset \subset M$ gilt). Auch für 0-stellige Relationszeichen R (bzw. Aussagesymbole) gilt damit immer $\mathcal{I}(R) \subseteq M$, so dass sich Interpretationen $\mathcal{I}$ in jedem Fall ausschließlich auf den Gegenstandsbereich M beziehen.

Beispiele. Die Sprache $\mathscr{L}_s$ enthalte lediglich die beiden 1-stelligen Relationszeichen P und Q, sowie die Konstante k.

(i) Sei der Gegenstandsbereich $M = \{\text{Neckar, Tübingen}\}$ und die Interpretation $\mathcal{I}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(P) &= \{\text{Neckar}\} \\ \mathcal{I}(Q) &= \{\text{Neckar, Tübingen}\} \\ \mathcal{I}(k) &= \text{Neckar} \end{aligned}$$

Dann ist $\langle M, \mathcal{I} \rangle$ eine Struktur für $\mathscr{L}_s$.

(ii) Nun umfasse der Gegenstandsbereich M_s beliebige Gegenstände, und die Interpretation $\mathcal{I}_s$ sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_s(P) &= \{m \mid m \text{ ist ein Mensch}\} \\ \mathcal{I}_s(Q) &= \{m \mid m \text{ ist ein sterblich}\} \\ \mathcal{I}_s(k) &= \text{Sokrates} \end{aligned}$$

d. h. durch $\mathcal{I}_s$ wird dem Prädikat*symbol* P die *Eigenschaft* (1-stellige Relation) zugeordnet, ein Mensch zu sein, dem Prädikat*symbol* Q wird die *Eigenschaft* zugeordnet, sterblich zu sein, und der Individuenkonstante (d. h. dem *Term*) k wird der *Gegenstand* Sokrates zugeordnet.

Dann ist $\mathfrak{S} = \langle M_s, \mathcal{I}_s \rangle$ ebenfalls eine Struktur für $\mathscr{L}_s$.

Beispiel. $\mathscr{L}$ enthalte lediglich die Konstanten $k', k_1, k_2, \ldots$ und ein 2-stelliges Relationszeichen Q.

- Der Gegenstandsbereich M sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- die Interpretation der Konstanten sei durch $\mathcal{I}(k') = 5$ und $\mathcal{I}(k_n) = n$ gegeben (d. h. $\mathcal{I}$ ordnet der Individuenkonstante (d. h. dem *Term*) $k' \in \mathscr{L}$ als *Gegenstand* die Zahl $5 \in \mathbb{N}$ zu; den Individuenkonstanten (d. h. den *Termen*) $k_n \in \mathscr{L}$ ordnet $\mathcal{I}$ als *Gegenstände* die Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu, z. B. $\mathcal{I}(k_7) = 7$),
- und die Interpretation von Q sei $\mathcal{I}(Q) = \{\langle n, n' \rangle \mid n < n'\} \subseteq \mathbb{N}^2$ (d. h. das 2-stellige Relations*zeichen* wird durch $\mathcal{I}$ als die 2-stellige kleiner-als-*Relation* auf $\mathbb{N}^2$ interpretiert; es ist z. B. $\langle 5, 3 \rangle \notin \mathcal{I}(Q)$, da $5 \not< 3$).

Dann ist $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ eine Struktur für die Sprache $\mathscr{L}$.

8.2 Variablenbelegungen

Durch Strukturen $\langle M, \mathcal{I} \rangle$ für eine Sprache $\mathscr{L}$ können wir schon jeder variablenfreien Formel $R(k_1, \ldots, k_n)$ in $\mathscr{L}$ eine Bedeutung zuordnen. Um beliebigen Formeln $R(t_1, \ldots, t_n)$, in denen auch Variablen vorkommen können, ebenfalls eine Bedeutung zuordnen zu können, benötigen wir zusätzlich Variablenbelegungen. Diese ordnen jeder Variable einen Gegenstand in M zu.

Definition 8.2 Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ eine Struktur. Eine *Variablenbelegung* in $\mathfrak{M}$ ist eine Funktion v, die jeder Variable x einen Wert $v(x) \in M$ zuordnet. (Also $v : \textsc{Var} \to M$, wobei Var die Menge aller Variablen sei.)

Variablenbelegung

Unterscheidet sich eine Variablenbelegung v' höchstens durch die Zuordnung $v'(x) = m \in M$ von einer Variablenbelegung v, so schreiben wir $v[x \mapsto m]$ für v'. Es gilt

$$v[x \mapsto m](y) = \begin{cases} m & \text{falls } x = y, \\ v(y) & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Die Variablenbelegung $v' = v[x \mapsto m]$ heißt *Variante* von v. Da v' sich von v nur durch die Belegung von x unterscheidet, bezeichnet man v' auch als x-*Variante* von v.

Variante

Beispiele. Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ für $\mathscr{L}$ aus dem vorherigen Beispiel.

(i) Dann ist durch

$$v(x) = 4, \quad v(y) = 7, \quad v(z) = 0, \quad v(z_1) = 7, \quad \dots$$

eine Variablenbelegung v in $\mathfrak{N}$ gegeben.

(ii) Nun ändern wir v zu einer neuen Variablenbelegung v' ab, indem wir der Variable y statt 7 den Gegenstand 11 zuordnen:

$$v'(x) = 4, \ \ v'(y) = 11, \ \ v'(z) = 0, \ \ v'(z_1) = 7, \ \ \dots$$

Die Variablenbelegung v' ist eine Variante (genauer: eine y-Variante) von v, da $v' = v[y \mapsto 11]$.

(iii) Des Weiteren ist z. B. $v[z \mapsto 0]$, also die Variablenbelegung v selbst, eine (triviale) z-Variante von v.

Interpretationen $\mathcal{I}(k)$ für Konstanten $k \in \mathscr{L}$ und Variablenbelegungen v (für alle Variablen) können zu einer Termbelegung zusammengefasst werden:

Definition 8.3 Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ eine Struktur für $\mathscr{L}$, v eine Variablenbelegung in $\mathfrak{M}$ und Term die Menge aller Terme. Dann ist die *Termbelegung* als Funktion

Termbelegung

$$[\![\ ]\!]^{\mathfrak{M}}_{v} : \textsc{Term} \to M$$

definiert durch:

$$[\![x]\!]^{\mathfrak{M}}_{v} := v(x), \text{ falls } x \text{ eine Variable ist,}$$
$$[\![k]\!]^{\mathfrak{M}}_{v} := \mathcal{I}(k), \text{ falls } k \text{ eine Konstante in } \mathscr{L} \text{ ist.}$$

Für Konstanten $k \notin \mathscr{L}$ ist $[\![k]\!]^{\mathfrak{M}}_{v}$ nicht definiert.

Beispiel. Für die Struktur $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ und die Variablenbelegung v' erhalten wir beispielsweise die Termbelegungen $[\![k_{11}]\!]^{\mathfrak{N}}_{v'} = 11$ und $[\![y]\!]^{\mathfrak{N}}_{v'} = 11$. Für die Variablenbelegung v ist $[\![y]\!]^{\mathfrak{N}}_{v} = [\![z_1]\!]^{\mathfrak{N}}_{v} = [\![k_7]\!]^{\mathfrak{N}}_{v} = 7$. Für die Konstante $l \notin \mathscr{L}$ ist $[\![l]\!]^{\mathfrak{N}}_{v}$ nicht definiert.

8.3 Gültigkeit

Nachdem wir nun in der Lage sind, sowohl den nicht-logischen Zeichen (Individuenkonstanten und Relationszeichen) als auch den Variablen Bedeutungen zuzuordnen, können wir schließlich auch die Bedeutung der logischen Konstanten (insbesondere von $\forall$ und $\exists$) festlegen. Die Semantik der Quantorenlogik geben wir durch die induktive Definition einer Relation $\mathfrak{M} \vDash_v A$ zwischen Strukturen $\mathfrak{M}$ und Formeln A unter Variablenbelegungen v an:

Definition 8.4 Sei $\mathfrak{M}$ eine Struktur $\langle M, \mathcal{I} \rangle$, v eine Variablenbelegung und $[\![\ ]\!]^{\mathfrak{M}}_{v}$ eine Termbelegung. Wir definieren die Relation $\mathfrak{M} \vDash_v A$ (“*A gilt in der Struktur $\mathfrak{M}$ unter der Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}$*”) wie folgt:

A gilt in $\mathfrak{M}$ unter v

Für n-stellige Relationszeichen R mit $n \geq 1$:

$$\mathfrak{M} \vDash_v R(t_1, \dots, t_n) \ :\Longleftrightarrow \ \langle [\![t_1]\!]^{\mathfrak{M}}_{v}, \dots, [\![t_n]\!]^{\mathfrak{M}}_{v} \rangle \in \mathcal{I}(R)$$

(Entsprechend sei $\mathfrak{M} \nvDash_v R(t_1, \dots, t_n) \ :\Longleftrightarrow \ \langle [\![t_1]\!]^{\mathfrak{M}}_{v}, \dots, [\![t_n]\!]^{\mathfrak{M}}_{v} \rangle \notin \mathcal{I}(R)$.)

Für 0-stellige Relationszeichen R (bzw. Aussagesymbole):

$$\mathfrak{M} \vDash_v R \;:\Longleftrightarrow\; \mathcal{I}(R) = \mathrm{w}$$

(Entsprechend sei $\mathfrak{M} \nvDash_v R \;:\Longleftrightarrow\; \mathcal{I}(R) = \mathrm{f}$.)

Für die mit logischen Konstanten gebildeten Formeln:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M} \vDash_v \top \\
&\mathfrak{M} \nvDash_v \bot \\
\mathfrak{M} \vDash_v \neg A \;&:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \nvDash_v A \\
\mathfrak{M} \vDash_v A \wedge B \;&:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \vDash_v A \text{ und } \mathfrak{M} \vDash_v B \\
\mathfrak{M} \vDash_v A \vee B \;&:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \vDash_v A \text{ oder } \mathfrak{M} \vDash_v B \\
\mathfrak{M} \vDash_v A \to B \;&:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \nvDash_v A \text{ oder } \mathfrak{M} \vDash_v B \\
&\Longleftrightarrow\; \text{Wenn } \mathfrak{M} \vDash_v A\text{, dann } \mathfrak{M} \vDash_v B \\
\mathfrak{M} \vDash_v A \leftrightarrow B \;&:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \vDash_v A \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{M} \vDash_v B \\
\mathfrak{M} \vDash_v \forall x A(x) \;&:\Longleftrightarrow\; \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \vDash_{v'} A(x) \\
\mathfrak{M} \vDash_v \exists x A(x) \;&:\Longleftrightarrow\; \text{Es gibt eine } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \vDash_{v'} A(x)
\end{aligned}$$

Bemerkung. Die Klauseln für die Quantoren können auch wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \vDash_v \forall x A(x) \;&:\Longleftrightarrow\; \text{Für jedes } m \in M \text{ gilt } \mathfrak{M} \vDash_{v[x \mapsto m]} A(x) \\
\mathfrak{M} \vDash_v \exists x A(x) \;&:\Longleftrightarrow\; \text{Es gibt ein } m \in M\text{, so dass } \mathfrak{M} \vDash_{v[x \mapsto m]} A(x)
\end{aligned}$$

(wobei M der Gegenstandsbereich von $\mathfrak{M}$ ist).

Definition 8.5

(i) Wir definieren *Gültigkeit in einer Struktur* ("*A gilt in der Struktur $\mathfrak{M}$*"):

Gültigkeit in einer Struktur

$$\mathfrak{M} \vDash A \;:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \vDash_v A \text{ für alle Variablenbelegungen } v \text{ in } \mathfrak{M}.$$

(ii) Falls A in $\mathfrak{M}$ gilt (d. h. falls $\mathfrak{M} \vDash A$), heißt die Struktur $\mathfrak{M}$ *Modell von A*.

Modell von A

(iii) Falls $\mathfrak{M}$ kein Modell von A ist, schreiben wir auch $\mathfrak{M} \nvDash A$. In diesem Fall heißt $\mathfrak{M}$ *Gegenmodell* (oder *Gegenbeispiel*) zu A.

Gegenmodell

Bemerkungen. (i) Im Fall aussagenlogischer Formeln A waren lediglich Aussagesymbole durch Wahrheitswerte zu interpretieren. Dies geschah durch Bewertungen h, für die wir die Relation $h \vDash A$ ("A gilt in h", "A ist wahr unter h") definiert hatten.

(ii) Die Relation $\mathfrak{M} \vDash A$ ("A gilt in der Struktur $\mathfrak{M}$") ist der dazu analoge quantorenlogische Begriff. Statt "A gilt in $\mathfrak{M}$" sagt man auch "A ist in $\mathfrak{M}$ wahr", bzw. statt "A gilt nicht in $\mathfrak{M}$" ($\mathfrak{M} \nvDash A$) auch "A ist in $\mathfrak{M}$ falsch".

(iii) Diese Art von Semantik bezeichnet man als *modelltheoretische Semantik*. (Sie geht zurück auf A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, Studia Philosophica **1** (1935), 261–405.)

Beispiel. Die in Beispiel (ii) auf S. 70 angegebene Struktur $\mathfrak{S} = \langle M_s, \mathcal{I}_s \rangle$ mit uneingeschränktem Gegenstandsbereich M_s und der durch

$$\mathcal{I}_s(P) = \{m \mid m \text{ ist ein Mensch}\}$$

$$\mathcal{I}_s(Q) = \{m \mid m \text{ ist ein sterblich}\}$$
$$\mathcal{I}_s(k) = \text{Sokrates}$$

gegebenen Interpretation $\mathcal{I}_s$ für die Sprache $\mathscr{L}_s$ ist ein Modell der Formeln $P(k)$, $Q(k)$ und $\forall x(P(x) \to Q(x))$.

Sei v eine beliebige Variablenbelegung in $\mathfrak{S}$.

- Für $P(k)$ gilt
$$\mathfrak{S} \vDash_v P(k) \iff [\![k]\!]_v^{\mathfrak{S}} \in \mathcal{I}_s(P)$$
Die rechte Seite gilt, da $[\![k]\!]_v^{\mathfrak{S}} = \text{Sokrates}$, und Sokrates $\in \mathcal{I}_s(P)$. Damit gilt auch $\mathfrak{S} \vDash_v P(k)$. Da v beliebig ist, gilt $\mathfrak{S} \vDash P(k)$, d. h. $\mathfrak{S}$ ist ein Modell von $P(k)$.
- Entsprechend gilt auch $\mathfrak{S} \vDash Q(k)$, da Sokrates $\in \mathcal{I}_s(Q)$.
- Für $\forall x(P(x) \to Q(x))$ gilt

  $\mathfrak{S} \vDash_v \forall x(P(x) \to Q(x))$

  $\iff$ Für jede x-Variante v' von v in $\mathfrak{S}$: $\mathfrak{S} \vDash_{v'} P(x) \to Q(x)$

  $\iff$ Für jede x-Variante v' von v in $\mathfrak{S}$: Wenn $\mathfrak{S} \vDash_{v'} P(x)$, dann $\mathfrak{S} \vDash_{v'} Q(x)$

  $\iff$ Für jede x-Variante v' von v in $\mathfrak{S}$: Wenn $[\![x]\!]_{v'}^{\mathfrak{S}} \in \mathcal{I}_s(P)$, dann $[\![x]\!]_{v'}^{\mathfrak{S}} \in \mathcal{I}_s(Q)$

  Angenommen $v' = v[x \mapsto m]$ für ein $m \in \mathcal{I}_s(P)$. In diesem Fall gilt sowohl $\mathfrak{S} \vDash_{v'} P(x)$, da $[\![x]\!]_{v'}^{\mathfrak{S}} = m \in \mathcal{I}_s(P)$, als auch $\mathfrak{S} \vDash_{v'} Q(x)$, da $[\![x]\!]_{v'}^{\mathfrak{S}} = m \in \mathcal{I}_s(Q)$. Letzteres folgt wegen $\mathcal{I}_s(P) \subset \mathcal{I}_s(Q)$; dies sieht man den intensional notierten Mengen $\mathcal{I}_s(P)$ und $\mathcal{I}_s(Q)$ nicht an, aber wir gehen davon aus, dass alle Menschen sterblich sind. Somit gilt: Wenn $[\![x]\!]_{v'}^{\mathfrak{S}} \in \mathcal{I}_s(P)$, dann $[\![x]\!]_{v'}^{\mathfrak{S}} \in \mathcal{I}_s(Q)$.

  Ist hingegen $v' = v[x \mapsto m]$ für ein $m \notin \mathcal{I}_s(P)$, so ist $\mathfrak{S} \nvDash_{v'} P(x)$. Damit gilt ebenfalls: Wenn $[\![x]\!]_{v'}^{\mathfrak{S}} \in \mathcal{I}_s(P)$, dann $[\![x]\!]_{v'}^{\mathfrak{S}} \in \mathcal{I}_s(Q)$.

  Somit gilt für jede x-Variante v' von v in $\mathfrak{S}$: Wenn $[\![x]\!]_{v'}^{\mathfrak{S}} \in \mathcal{I}_s(P)$, dann $[\![x]\!]_{v'}^{\mathfrak{S}} \in \mathcal{I}_s(Q)$.

  Da v beliebig ist, gilt $\mathfrak{S} \vDash \forall x(P(x) \to Q(x))$. Die Struktur $\mathfrak{S}$ ist also auch ein Modell von $\forall x(P(x) \to Q(x))$.

Beispiele. Wir betrachten die Formel $\forall x \exists y(S(y) \land R(x,y))$.

(i) Die Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ mit
$$M = \{m_1, m_2\}$$
$$\mathcal{I}(S) = \{m_1\}$$
$$\mathcal{I}(R) = \{\langle m_1, m_1\rangle, \langle m_2, m_1\rangle\}$$
ist ein Modell der Formel.

Sei v eine beliebige Variablenbelegung in $\mathfrak{M}$. Es gilt

$\mathfrak{M} \vDash_v \forall x \exists y(S(y) \land R(x,y))$

$\iff$ Für jede x-Variante v' von v in $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \vDash_{v'} \exists y(S(y) \land R(x,y))$

$\iff$ Für jede x-Variante v' von v in $\mathfrak{M}$ gibt es eine y-Variante v'' von v' in $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \vDash_{v''} S(y) \land R(x,y)$

$\iff$ Für jede x-Variante v' von v in $\mathfrak{M}$ gibt es eine y-Variante v'' von v' in $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \vDash_{v''} S(y)$ und $\mathfrak{M} \vDash_{v''} R(x,y)$

$\iff$ Für jede x-Variante v' von v in $\mathfrak{M}$ gibt es eine y-Variante v'' von v' in $\mathfrak{M}$:

$$\llbracket y \rrbracket^{\mathfrak{M}}_{v''} \in \mathcal{I}(S) \text{ und } \langle \llbracket x \rrbracket^{\mathfrak{M}}_{v''}, \llbracket y \rrbracket^{\mathfrak{M}}_{v''} \rangle \in \mathcal{I}(R)$$

Da M zwei Gegenstände enthält, gibt es zwei x-Varianten v' von v in $\mathfrak{M}$: $v[x \mapsto m_1]$ und $v[x \mapsto m_2]$. Mit der y-Variante $v'' = v'[y \mapsto m_1]$ von v' gilt für die erste x-Variante $\llbracket y \rrbracket^{\mathfrak{M}}_{v''} = m_1 \in \mathcal{I}(S)$ und $\langle \llbracket x \rrbracket^{\mathfrak{M}}_{v''}, \llbracket y \rrbracket^{\mathfrak{M}}_{v''} \rangle = \langle m_1, m_1 \rangle \in \mathcal{I}(R)$; für die zweite x-Variante gilt $\llbracket y \rrbracket^{\mathfrak{M}}_{v''} = m_1 \in \mathcal{I}(S)$ und $\langle \llbracket x \rrbracket^{\mathfrak{M}}_{v''}, \llbracket y \rrbracket^{\mathfrak{M}}_{v''} \rangle = \langle m_2, m_1 \rangle \in \mathcal{I}(R)$.

Damit ist für jede x-Variante v' von v in $\mathfrak{M}$ eine y-Variante v'' von v' in $\mathfrak{M}$ gefunden, so dass $\mathfrak{M} \vDash_{v''} S(y) \land R(x, y)$. Also gilt $\mathfrak{M} \vDash_v \forall x \exists y (S(y) \land R(x, y))$. Da v beliebig ist, gilt $\mathfrak{M} \vDash \forall x \exists y (S(y) \land R(x, y))$, d. h. $\mathfrak{M}$ ist ein Modell von $\forall x \exists y (S(y) \land R(x, y))$.

(ii) Hingegen ist die Struktur $\mathfrak{M}' = \langle \{m_1, m_2\}, \mathcal{I}' \rangle$ mit

$$\mathcal{I}'(S) = \{m_2\}$$
$$\mathcal{I}'(R) = \{\langle m_1, m_1 \rangle, \langle m_2, m_1 \rangle\}$$

ein Gegenmodell für die Formel.

Denn für die x-Variante $v' = v[x \mapsto m_1]$ in $\mathfrak{M}'$ gibt es nun keine y-Variante v'' von v' in $\mathfrak{M}'$, so dass $\mathfrak{M}' \vDash_{v''} S(y)$ und $\mathfrak{M}' \vDash_{v''} R(x, y)$: Für $v'' = v'[y \mapsto m_1]$ ist $\mathfrak{M}' \nvDash_{v''} S(y)$, da $\llbracket y \rrbracket^{\mathfrak{M}'}_{v''} = m_1 \notin \mathcal{I}(S)$; und für $v'' = v'[y \mapsto m_2]$ ist $\mathfrak{M}' \nvDash_{v''} R(x, y)$, da $\langle \llbracket x \rrbracket^{\mathfrak{M}'}_{v''}, \llbracket y \rrbracket^{\mathfrak{M}'}_{v''} \rangle = \langle m_1, m_2 \rangle \notin \mathcal{I}(R)$.

Somit gibt es eine Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}'$ (nämlich v mit $v(x) = m_1$ und $v(y)$ beliebig), für die $\mathfrak{M}' \nvDash_v \forall x \exists y (S(y) \land R(x, y))$; also $\mathfrak{M}' \nvDash \forall x \exists y (S(y) \land R(x, y))$, d. h. $\mathfrak{M}'$ ist ein Gegenmodell zu $\forall x \exists y (S(y) \land R(x, y))$.

Die Berücksichtigung von Variablenbelegungen ist nötig, um auch bei offenen Formeln eine Aussage über deren Gültigkeit machen zu können.

Sei z. B. $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ mit $M = \{m, m'\}$ und $\mathcal{I}(P) = \{m, m'\}$ für das 1-stellige Relationszeichen P. Die Formel $\forall x P(x)$ soll in $\mathfrak{M}$ unter einer Variablenbelegung v genau dann gelten, wenn die offene Formel $P(x)$ für alle Gegenstände in M gilt. Um Letzteres auszudrücken, können wir jedoch *nicht* einfach schreiben, dass $P(m)$ und $P(m')$ gilt. Denn m und m' sind keine Zeichen unserer Objektsprache, sondern Gegenstände in M; die Ausdrücke "$P(m)$" und "$P(m')$" sind somit keine Formeln. Hingegen können wir sagen, dass die offene Formel $P(x)$ für jede Zuordnung eines Gegenstands in M zur freien Variable x, also hier für die beiden x-Varianten $v' = v[x \mapsto m]$ und $v'' = v[x \mapsto m']$, gilt. Es ist sowohl $\mathfrak{M} \vDash_{v'} P(x)$ als auch $\mathfrak{M} \vDash_{v''} P(x)$, da sowohl $v'(x) = m \in \mathcal{I}(P)$ als auch $v''(x) = m' \in \mathcal{I}(P)$.

Das begriffliche Hilfsmittel der Varianten benötigen wir auch, um eine Aussage über die Gültigkeit von z. B. $\forall x Q(x, y)$ in $\mathfrak{M}$ unter einer Variablenbelegung v machen zu können. Sei wieder $M = \{m, m'\}$, $\mathcal{I}(Q) = \{\langle m, m \rangle, \langle m', m \rangle\}$ für das 2-stellige Relationszeichen Q, und $v(y) = m$. Sowohl für die x-Variante $v' = v[x \mapsto m]$ als auch für die x-Variante $v'' = v[x \mapsto m']$ gilt $Q(x, y)$, denn $\langle \llbracket x \rrbracket^{\mathfrak{M}}_{v'}, \llbracket y \rrbracket^{\mathfrak{M}}_{v'} \rangle = \langle m, m \rangle \in \mathcal{I}(Q)$ und $\langle \llbracket x \rrbracket^{\mathfrak{M}}_{v''}, \llbracket y \rrbracket^{\mathfrak{M}}_{v''} \rangle = \langle m', m \rangle \in \mathcal{I}(Q)$. Die offene Formel $Q(x, y)$ gilt also für jede x-Variante von v in $\mathfrak{M}$. Somit gilt auch $\forall x Q(x, y)$ in $\mathfrak{M}$ unter v.

Für die Gültigkeit einer Formel A in einer Struktur $\mathfrak{M}$ unter einer Variablenbelegung v sind jedoch nur jene Variablen relevant, die in A frei vorkommen. Denn es gilt:

Theorem 8.6 (Koinzidenz) *Sei A eine beliebige Formel und $\mathfrak{M}$ eine beliebige Struktur, und seien v und v' zwei Variablenbelegungen, so dass für jede freie Variable x in A gilt: $v(x) = v'(x)$. Dann gilt $\mathfrak{M} \vDash_v A \iff \mathfrak{M} \vDash_{v'} A$.*

8.4 Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Ganz analog zur Aussagenlogik interessieren wir uns in der Quantorenlogik für folgende Eigenschaften von Formeln:

Definition 8.7 (i) A heißt *erfüllbar* (oder *konsistent*), falls es eine Struktur $\mathfrak{M}$ und eine Variablenbelegung v gibt, so dass $\mathfrak{M} \models_v A$. *Erfüllbarkeit*

Ist A eine geschlossene Formel, dann heißt A *erfüllbar*, falls es eine Struktur $\mathfrak{M}$ gibt, so dass $\mathfrak{M} \models A$, d. h. falls A ein Modell hat.

Andernfalls heißt A *unerfüllbar* (oder *inkonsistent* oder *kontradiktorisch*).

(ii) *Allgemeingültigkeit*: $\models A \;:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \models A$ für alle Strukturen $\mathfrak{M}$. *Allgemeingültigkeit*

(iii) A heißt *kontingent*, falls A erfüllbar, aber nicht allgemeingültig ist.

Für geschlossene Formeln ist dies genau dann der Fall, wenn es sowohl ein Modell für A als auch ein Gegenmodell zu A gibt.

Beispiele. Wir betrachten wieder die Struktur $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ mit

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}(k') = 5 \\ &\mathcal{I}(k_n) = n \quad (\text{d. h. } \mathcal{I}(k_0) = 0, \mathcal{I}(k_1) = 1, \mathcal{I}(k_2) = 2, \ldots) \\ &\mathcal{I}(Q) = \{\langle n, n' \rangle \mid n < n'\} \subseteq \mathbb{N}^2 \end{aligned}$$

(i) Es ist $\mathfrak{N} \not\models_v Q(k', k_3)$, da $\langle [\![k']\!]^{\mathfrak{N}}_v, [\![k_3]\!]^{\mathfrak{N}}_v \rangle = \langle 5, 3 \rangle \notin \mathcal{I}(Q)$. (Es ist $5 \not< 3$.)

Die Variablenbelegung v spielt keine Rolle, da $Q(k', k_3)$ eine geschlossene Formel ist. Folglich gilt $\mathfrak{N} \not\models_v Q(k', k_3)$ für alle v. Also $\mathfrak{N} \not\models Q(k', k_3)$.

Die Formel $Q(k', k_3)$ ist jedoch erfüllbar, da z. B. die Struktur $\mathfrak{N}' = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I}' \rangle$ mit $\mathcal{I}'(Q) = \{\langle n, n' \rangle \mid n > n'\} \subseteq \mathbb{N}^2$, und $\mathcal{I}'(k') = 5$, $\mathcal{I}'(k_3) = 3$, ein Modell von $Q(k', k_3)$ ist, d. h. $\mathfrak{N}' \models Q(k', k_3)$.

(ii) Sei v' die Variablenbelegung mit $v'(y) = 11$ und $v'(z_1) = 7$. Dann ist $\mathfrak{N} \models_{v'} Q(z_1, y)$, da $\langle [\![z_1]\!]^{\mathfrak{N}}_{v'}, [\![y]\!]^{\mathfrak{N}}_{v'} \rangle = \langle 7, 11 \rangle \in \mathcal{I}(Q)$. (Es ist $7 < 11$.)

Die Formel $Q(z_1, y)$ ist also erfüllbar. Die Struktur $\mathfrak{N}$ ist jedoch kein Modell von $Q(z_1, y)$, da es eine Variablenbelegung v in $\mathfrak{N}$ gibt (z. B. $v(y) = v(z_1) = 7$), so dass $\mathfrak{N} \not\models_v Q(z_1, y)$.

(iii) Für beliebige Variablenbelegungen v gilt $\mathfrak{N} \models_v \forall x \exists y Q(x, y)$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} \models_v \forall x \exists y Q(x,y) &\iff \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{N}\text{: } \mathfrak{N} \models_{v'} \exists y Q(x,y) \\ &\iff \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{N} \\ &\ \text{gibt es eine } y\text{-Variante } v'' \text{ von } v' \text{ in } \mathfrak{N}\text{: } \mathfrak{N} \models_{v''} Q(x,y) \end{aligned}$$

Sei v beliebig, und $v' = v[x \mapsto n]$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Setze $v'' = v'[y \mapsto n+1]$. Dann ist $\mathfrak{N} \models_{v''} Q(x, y)$, da $\langle [\![x]\!]^{\mathfrak{N}}_{v''}, [\![y]\!]^{\mathfrak{N}}_{v''} \rangle = \langle n, n+1 \rangle \in \mathcal{I}(Q)$.

Da v beliebig, gilt $\mathfrak{N} \models \forall x \exists y Q(x, y)$. Die Struktur $\mathfrak{N}$ ist also ein Modell von $\forall x \exists y Q(x, y)$.

Keine der betrachteten Formeln ist allgemeingültig. Ein Gegenmodell ist z. B. die Struktur $\mathfrak{M} = \langle \{m\}, \mathcal{I}'' \rangle$ mit $\mathcal{I}''(Q) = \{\langle m, m' \rangle \mid m \neq m'\}$ (und $\mathcal{I}''(k) = m$ für alle Konstanten $k \in \mathscr{L}$).

Da es für $Q(k', k_3)$ und $\forall x \exists y Q(x, y)$ mit $\mathfrak{N}$ auch ein Modell gibt, sind diese Formeln kontingent. Für $Q(z_1, y)$ lässt sich ebenfalls ein Modell angeben: Für $\mathfrak{M}^* = \langle \{m\}, \mathcal{I}^* \rangle$ mit $\mathcal{I}^*(Q) = \{\langle m, m \rangle\}$, und $\mathcal{I}^*(k) = m$ für alle Konstanten $k \in \mathscr{L}$, gilt für jede Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}^*$ (es gibt nur eine, mit $v(z_1) = v(y) = m$) $\mathfrak{M}^* \vDash_v Q(z_1, y)$. Damit ist auch $Q(z_1, y)$ kontingent.

Für das Verhältnis von Quantorenlogik und Aussagenlogik gilt offensichtlich:

Theorem 8.8 (konservative Erweiterung) *Die Quantorenlogik ist eine konservative Erweiterung der Aussagenlogik. Das heißt, jede allgemeingültige aussagenlogische Formel ist auch in der Quantorenlogik allgemeingültig.*

Theorem 8.9 (Permanenz) *Hat eine quantorenlogische Formel A die Form einer allgemeingültigen aussagenlogischen Formel B, so ist auch A allgemeingültig. Diese Eigenschaft bezeichnet man als Permanenz der Aussagenlogik in der Quantorenlogik.*

Beispiel. Sei A die quantorenlogische Formel

$$((\forall x \neg P(x) \to \exists y \forall z R(y, z)) \to \forall x \neg P(x)) \to \forall x \neg P(x)$$

Die Formel A hat die Form der aussagenlogisch allgemeingültigen Formel

$$((p \to q) \to p) \to p$$

Damit ist auch A allgemeingültig.

Bemerkung. Für beliebige (offene oder geschlossene) Formeln A und B gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \vDash \neg A &\implies \mathfrak{M} \nvDash A \\ \mathfrak{M} \vDash A \to B &\implies \text{Wenn } \mathfrak{M} \vDash A, \text{ dann } \mathfrak{M} \vDash B \\ \mathfrak{M} \vDash A \text{ oder } \mathfrak{M} \vDash B &\implies \mathfrak{M} \vDash A \vee B \end{aligned}$$

Die umgekehrte Richtung “$\Longleftarrow$” gilt i. A. jeweils *nicht*. Es gilt aber

$$\mathfrak{M} \vDash A \wedge B \iff \mathfrak{M} \vDash A \text{ und } \mathfrak{M} \vDash B$$

Ein Gegenbeispiel für $\mathfrak{M} \nvDash A \implies \mathfrak{M} \vDash \neg A$ ist die offene Formel $R(x, y)$ zusammen mit der Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$, wobei $M = \{0, 1\}$ und $\mathcal{I}(R) = \{\langle n, n' \rangle \mid n = n'\} \subseteq M^2$. Es gilt $\mathfrak{M} \nvDash R(x, y)$, da es eine Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}$ gibt, so dass $\mathfrak{M} \nvDash_v R(x, y)$. Ist z. B. $v(x) = 0$ und $v(y) = 1$, so ist $\langle [\![x]\!]_v^{\mathfrak{M}}, [\![y]\!]_v^{\mathfrak{M}} \rangle = \langle 0, 1 \rangle \notin \mathcal{I}(R)$, da $0 \neq 1$. Hingegen gilt $\mathfrak{M} \vDash \neg R(x, y)$ *nicht*, da es eine Variablenbelegung v' in $\mathfrak{M}$ gibt, z. B. $v'(x) = v'(y) = 1$, so dass $\mathfrak{M} \nvDash_{v'} \neg R(x, y)$, und somit $\mathfrak{M} \nvDash \neg R(x, y)$.

Für *geschlossene* Formeln A und B gelten jeweils beide Richtungen, d. h. es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \vDash \neg A &\iff \mathfrak{M} \nvDash A \\ \mathfrak{M} \vDash A \to B &\iff \text{Wenn } \mathfrak{M} \vDash A, \text{ dann } \mathfrak{M} \vDash B \\ \mathfrak{M} \vDash A \vee B &\iff \mathfrak{M} \vDash A \text{ oder } \mathfrak{M} \vDash B \end{aligned}$$

(und, wie schon festgestellt, $\mathfrak{M} \vDash A \wedge B \iff \mathfrak{M} \vDash A$ und $\mathfrak{M} \vDash B$).

8.5 Logische Folgerung

Nun geben wir den Begriff der logischen Folgerung für die Quantorenlogik an. Für Formelmengen Γ schreiben wir $\mathfrak{M} \vDash_v \Gamma$, falls $\mathfrak{M} \vDash_v A$ für alle Formeln $A \in \Gamma$, bzw. $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, falls Γ eine Menge von geschlossenen Formeln (d. h. von Aussagen) ist.

logische Folgerung

Definition 8.10 Sei $\Gamma \subseteq \mathscr{L}$ eine Formelmenge und $A \in \mathscr{L}$ eine Formel. Aus Γ *folgt (quantoren-)logisch* A (Notation: $\Gamma \vDash A$), falls für alle Strukturen $\mathfrak{M}$ für $\mathscr{L}$ und alle Variablenbelegungen v in $\mathfrak{M}$ gilt: Wenn $\mathfrak{M} \vDash_v \Gamma$, dann $\mathfrak{M} \vDash_v A$. Das heißt

$$\Gamma \vDash A \;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle } \mathfrak{M} \text{ für } \mathscr{L} \text{ und alle } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: Wenn } \mathfrak{M} \vDash_v \Gamma, \text{ dann } \mathfrak{M} \vDash_v A.$$

Bemerkungen. (i) Für Formeln mit freien Variablen ist die logische Folgerung hier so definiert, dass $\Gamma \vDash A$ für jede Variablenbelegung gilt.

(ii) Für geschlossene Formeln (d. h. für Aussagen) vereinfacht sich der Begriff der logischen Folgerung. Sei $\Gamma \subseteq \mathscr{L}$ eine Menge von Aussagen und $A \in \mathscr{L}$ eine Aussage. Dann ist *logische Folgerung* definiert durch:

$$\Gamma \vDash A \;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle } \mathfrak{M} \text{ für } \mathscr{L}\text{: Wenn } \mathfrak{M} \vDash \Gamma, \text{ dann } \mathfrak{M} \vDash A.$$

Die rechte Seite bedeutet (nach Definition 8.5 (i)):

Für alle $\mathfrak{M}$ für $\mathscr{L}$: Wenn für alle v in $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \vDash_v \Gamma$, dann für alle v in $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \vDash_v A$.

(iii) Der Begriff der logischen Folgerung beruht (wie auch schon in der Aussagenlogik) auf der Idee der Wahrheitskonservierung: Eine Folgerungsbehauptung $\Gamma \vDash A$ gilt genau dann, wenn stets für gültige Prämissen Γ auch die Konklusion A gültig ist.

Beispiel. Nun können wir die Frage beantworten, ob der folgende natürlichsprachliche Schluss gültig ist:

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.

Sokrates ist sterblich.

Die Formalisierung der Prämissen ergab $\forall x(P(x) \to Q(x))$ bzw. $P(k)$, die der Konklusion $Q(k)$. Damit lautet die Frage:

$$\text{Gilt } \forall x(P(x) \to Q(x)), P(k) \vDash Q(k)\,?$$

Da die Folgerungsbehauptung $\forall x(P(x) \to Q(x)), P(k) \vDash Q(k)$ nur Aussagen enthält, genügt es, zu zeigen, dass

$$\text{Wenn } \mathfrak{M} \vDash \forall x(P(x) \to Q(x)) \text{ und } \mathfrak{M} \vDash P(k), \text{ dann } \mathfrak{M} \vDash Q(k).$$

Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ eine beliebige Struktur für die Sprache $\mathscr{L}_s$, welche die beiden 1-stelligen Prädikatsymbole P und Q, sowie die Konstante k enthält. Es ist $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), P(k)\} \subseteq \mathscr{L}_s$ und $Q(k) \in \mathscr{L}_s$.
Angenommen, es gilt $\mathfrak{M} \vDash \forall x(P(x) \to Q(x))$ und $\mathfrak{M} \vDash P(k)$. Da

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M} \vDash \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ &\quad \Longleftrightarrow \text{ Für jede Variablenbelegung } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \vDash_v P(x) \to Q(x) \end{aligned}$$

$\iff$ Für jede Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}$: Wenn $\mathfrak{M} \vDash_v P(x)$, dann $\mathfrak{M} \vDash_v Q(x)$

$\iff$ Für jede Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}$: Wenn $[\![x]\!]_v^{\mathfrak{M}} \in \mathcal{I}(P)$, dann $[\![x]\!]_v^{\mathfrak{M}} \in \mathcal{I}(Q)$

gilt für jede Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}$:

$$\text{Wenn } [\![x]\!]_v^{\mathfrak{M}} \in \mathcal{I}(P), \text{ dann } [\![x]\!]_v^{\mathfrak{M}} \in \mathcal{I}(Q); \tag{1}$$

und da

$$\mathfrak{M} \vDash P(k) \iff [\![k]\!]_v^{\mathfrak{M}} \in \mathcal{I}(P)$$

gilt

$$[\![k]\!]_v^{\mathfrak{M}} \in \mathcal{I}(P) \tag{2}$$

Betrachte die Variablenbelegung v mit $v(x) = m$ für einen Gegenstand $m \in M$, und sei $[\![k]\!]_v^{\mathfrak{M}} = m$; da der Gegenstandsbereich einer Struktur stets nichtleer ist, muss es mindestens einen solchen Gegenstand m geben. Dann gilt $m \in \mathcal{I}(P)$ aufgrund von (2), und somit wegen (1) auch $m \in \mathcal{I}(Q)$. Damit gilt $\mathfrak{M} \vDash Q(k)$. Da $\mathfrak{M}$ für $\mathscr{L}_s$ beliebig ist, gilt für alle $\mathfrak{M}$ für $\mathscr{L}_s$: Wenn $\mathfrak{M} \vDash \forall x(P(x) \to Q(x))$ und $\mathfrak{M} \vDash P(k)$, dann $\mathfrak{M} \vDash Q(k)$. Das heißt, es gilt

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), P(k) \vDash Q(k)$$

Da die Formalisierung adäquat ist, ist der natürlichsprachliche Schluss gültig.

Im Unterschied zur Aussagenlogik ist die Quantorenlogik nicht entscheidbar:

Theorem 8.11 (Unentscheidbarkeit der Quantorenlogik)

(i) Es gibt kein Verfahren, das für beliebige Formelmengen Γ und beliebige Formeln A entscheidet, ob $\Gamma \vDash A$.

(ii) Erfüllbarkeit ist ebenfalls unentscheidbar.

Beweis. Siehe A. Church, *A Note on the Entscheidungsproblem*, The Journal of Symbolic Logic **1** (1936), 40–41, und A. M. Turing, *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*, Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, **42** (1936), 230–265. QED

9 Gesetze der Quantorenlogik und pränexe Normalform

Im Folgenden behandeln wir einige grundlegende Gesetze der Quantorenlogik. Eine besondere Anwendung dieser Gesetze besteht in der Konstruktion von Formeln in sogenannter pränexer Normalform, die wir im Anschluss betrachten.

9.1 Gesetze der Quantorenlogik

Logische Äquivalenz ist unter Verwendung der quantorenlogischen Folgerung "$\models$" als direkte Erweiterung der aussagenlogischen Äquivalenz definiert (und wie in der Aussagenlogik eine Äquivalenzrelation):

Definition 9.1 Zwei quantorenlogische Formeln A und B heißen *logisch äquivalent*, falls $A \models B$ und $B \models A$. Notation: $A \mathrel{=\!\!|\!\models} B$. *logisch äquivalent*

Auch in der Quantorenlogik gilt:

Theorem 9.2 (Import-Export) *$A_1, \ldots, A_n \models B$ genau dann, wenn $\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$.*

Beweis. Analog zum Beweis in der Aussagenlogik. QED

Korollar 9.3 *Für zwei quantorenlogische Formeln A und B gilt $A \mathrel{=\!\!|\!\models} B$ genau dann, wenn $\models A \leftrightarrow B$.*

Bemerkung. Wir verwenden hier den in Definition 8.10 angegebenen Begriff der logischen Folgerung. Würde man stattdessen den in Bemerkung (ii) zu Definition 8.10 für geschlossene Formeln angegebenen vereinfachten Begriff auch für offene Formeln verwenden, so würde das Import-Export-Theorem nur noch für geschlossene Formeln gelten. Für beliebige (offene oder geschlossene Formeln) gilt dann zwar noch Export (d. h., wenn $\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$, dann $A_1, \ldots, A_n \models B$), aber Import (d. h., wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$, dann $\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$) gilt nicht mehr allgemein.
Es ist z. B. $P(x) \models \forall y P(y)$, aber $\not\models P(x) \to \forall y P(y)$. Sei $\{P(x), \forall y P(y)\} \subseteq \mathscr{L}$, $\mathfrak{M}$ für $\mathscr{L}$ beliebig und $\mathfrak{M} \models P(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \models P(x) &\iff \text{Für alle } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \models_v P(x) \\
&\iff \mathfrak{M} \models \forall x P(x) \\
&\iff \mathfrak{M} \models \forall y P(y)
\end{aligned}$$

Also insbesondere: $\mathfrak{M} \models P(x) \implies \mathfrak{M} \models \forall y P(y)$, d. h. $P(x) \models \forall y P(y)$, da $\mathfrak{M}$ für $\mathscr{L}$ beliebig. Jedoch gilt *nicht* $\models P(x) \to \forall y P(y)$. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \models P(x) \to \forall y P(y) &\iff \text{Für alle } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \models_v P(x) \to \forall y P(y) \\
&\iff \text{Für alle } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: Wenn } \mathfrak{M} \models_v P(x)\text{, dann } \mathfrak{M} \models_v \forall y P(y) \\
&\iff \text{Für alle } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: Wenn } \mathfrak{M} \models_v P(x)\text{, dann } \mathfrak{M} \models_{v'} P(y) \\
& \text{ für jede } y\text{-Variante } v' \text{ von } v
\end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{M} = \langle \{m_1, m_2\}, \mathcal{I} \rangle$ mit $\mathcal{I}(P) = \{m_1\}$. Dann ist $\mathfrak{M} \models_v P(x)$ für $v(x) = m_1$, aber für die y-Variante $v' = v[y \mapsto m_2]$ gilt $\mathfrak{M} \not\models_{v'} P(y)$. Somit $\mathfrak{M} \not\models P(x) \to \forall y P(y)$, also auch $\not\models P(x) \to \forall y P(y)$.

Theorem 9.4 (Dualität)

(i) $\neg\forall xA \dashv\models \exists x\neg A,$ *(iii)* $\forall xA \dashv\models \neg\exists x\neg A,$

(ii) $\neg\exists xA \dashv\models \forall x\neg A,$ *(iv)* $\exists xA \dashv\models \neg\forall x\neg A.$

Beweis. Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I}\rangle$ eine beliebige Struktur mit $m \in M$ beliebig, und sei v eine beliebige Variablenbelegung in $\mathfrak{M}$.

(i) Es ist zu zeigen, dass nicht sowohl $\mathfrak{M} \models_v \neg\forall xA$ als auch $\mathfrak{M} \nvDash_v \exists x\neg A$ gilt. Aus $\mathfrak{M} \models_v \neg\forall xA$ folgt $\mathfrak{M} \nvDash_v \forall xA$. Somit muss es eine x-Variante v' von v in $\mathfrak{M}$ geben, so dass $\mathfrak{M} \nvDash_{v'} A$, d. h. $\mathfrak{M} \models_{v'} \neg A$. Also $\mathfrak{M} \models_v \exists x\neg A$.

Des Weiteren ist zu zeigen, dass nicht sowohl $\mathfrak{M} \models_v \exists x\neg A$ als auch $\mathfrak{M} \nvDash_v \neg\forall xA$ gilt. Aus $\mathfrak{M} \models_v \exists x\neg A$ folgt, dass es eine x-Variante v' von v in $\mathfrak{M}$ geben muss, so dass $\mathfrak{M} \models_{v'} \neg A$, d. h. $\mathfrak{M} \nvDash_{v'} A$. Folglich $\mathfrak{M} \nvDash_v \forall xA$, d. h. $\mathfrak{M} \models_v \neg\forall xA$.

(ii) und (iii) als Übungsaufgabe.

(iv) Angenommen $\mathfrak{M} \models_v \exists xA$. Dann gibt es eine x-Variante $v' = v[x \mapsto m]$ in $\mathfrak{M}$, so dass $\mathfrak{M} \models_{v'} A$, also $\mathfrak{M} \nvDash_{v'} \neg A$, und folglich $\mathfrak{M} \nvDash_v \forall x\neg A$, d. h. $\mathfrak{M} \models_v \neg\forall x\neg A$.

Angenommen $\mathfrak{M} \nvDash_v \exists xA$. Dann gibt es keine x-Variante v' von v, so dass $\mathfrak{M} \models_{v'} A$. Damit gilt $\mathfrak{M} \models_{v'} \neg A$ für jede x-Variante v' von v in $\mathfrak{M}$. Folglich $\mathfrak{M} \models_v \forall x\neg A$, d. h. $\mathfrak{M} \nvDash_v \neg\forall x\neg A$. QED

Theorem 9.5 (Vertauschung) *(i)* $\forall x\forall yA \dashv\models \forall y\forall xA,$ *(ii)* $\exists x\exists yA \dashv\models \exists y\exists xA.$

Beweis. (i) Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I}\rangle$ eine beliebige Struktur und v eine beliebige Variablenbelegung in $\mathfrak{M}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models_v \forall x\forall yA &\iff \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \models_{v'} \forall yA \\ &\iff \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M} \text{ und} \\ & \text{ für jede } y\text{-Variante } v'' \text{ von } v' \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \models_{v''} A \end{aligned}$$

Seien m_1 und m_2 zwei beliebige, möglicherweise identische Gegenstände in M. Es gilt

$$v'' = v[x \mapsto m_1][y \mapsto m_2] = v[y \mapsto m_2][x \mapsto m_1] = v'$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models_v \forall x\forall yA &\iff \text{Für jede } y\text{-Variante } v'' \text{ von } v' \text{ in } \mathfrak{M} \text{ und} \\ & \text{ für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \models_{v'} A \\ &\iff \text{Für jede } y\text{-Variante } v'' \text{ von } v' \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \models_{v''} \forall xA \\ &\iff \mathfrak{M} \models_v \forall y\forall xA \end{aligned}$$

(ii) analog. QED

Theorem 9.6 *Es gilt die logische Folgerung* $\exists x\forall yA \models \forall y\exists xA.$
(Die Umkehrung gilt jedoch nicht; d. h. $\forall x\exists yA \nvDash \exists y\forall xA.$*)*

Beweis. Übungsaufgabe. QED

Theorem 9.7 (Leere Quantoren)
Falls x nicht frei in A vorkommt, gilt: (i) $\forall xA \dashv\models A,$ *(ii)* $\exists xA \dashv\models A.$

Beweis. Übungsaufgabe. QED

Theorem 9.8 (Distributivität über $\wedge$ und $\vee$)
(i) $\exists x(A \vee B) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \exists x A \vee \exists x B$, *(ii)* $\forall x(A \wedge B) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \forall x A \wedge \forall x B$.

Beweis. (i) Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ eine beliebige Struktur und v eine beliebige Variablenbelegung in $\mathfrak{M}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \models_v \exists x(A \vee B) &\iff \text{Es gibt eine } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \models_{v'} A \vee B \\
&\iff \text{Es gibt eine } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{:} \\
&\qquad \mathfrak{M} \models_{v'} A \text{ oder } \mathfrak{M} \models_{v'} B \\
&\iff \text{Es gibt eine } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \models_{v'} A \\
&\qquad \text{oder es gibt eine } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \models_{v'} B \\
&\iff \mathfrak{M} \models_v \exists x A \text{ oder } \mathfrak{M} \models_v \exists x B \\
&\iff \mathfrak{M} \models_v \exists x A \vee \exists x B
\end{aligned}$$

(ii) analog. QED

Theorem 9.9 *Es gelten die beiden logischen Folgerungen:*
(i) $\exists x(A \wedge B) \models \exists x A \wedge \exists x B$, *(ii)* $\forall x A \vee \forall x B \models \forall x(A \vee B)$.
(Die Umkehrungen gelten jedoch nicht; d. h. $\exists x A \wedge \exists x B \not\models \exists x(A \wedge B)$ *und* $\forall x(A \vee B) \not\models \forall x A \vee \forall x B$*.)*

Beweis. Übungsaufgabe. QED

Um ausdrücken zu können, dass Formeln, die sich lediglich durch ihre gebundenen Variablen unterscheiden, zueinander logisch äquivalent sind, benötigen wir das Hilfsmittel der Substitution.

Substitution

Definition 9.10 Sei A eine Formel, x eine Variable und t ein Term. Eine *Substitution* $A\,[x/t]$ ist das Resultat der Ersetzung aller freien Vorkommen von x in A durch t. Kommt x in A im Wirkungsbereich eines Quantors $\forall y$ oder $\exists y$ für eine Variable y vor, so ist $A\,[x/y]$ nicht definiert. Andernfalls ist $A\,[x/y]$ das Resultat der Ersetzung aller freien Vorkommen von x in A durch y.

Bemerkungen. (i) Falls x in A nicht frei vorkommt, ist $A\,[x/y]$ identisch mit A.

(ii) Die Operation $[x/t]$ wirkt global, d. h. auf die gesamte links von $[x/t]$ stehende Formel. Möchte man die Wirkung auf eine Teilformel einschränken, muss entsprechend geklammert werden.

(iii) Man beachte, dass das Vorkommen von x bei den Quantoren $\forall x$ und $\exists x$ weder frei noch gebunden ist. Deshalb ist z. B. $\forall x P(y)\,[x/z]$ die Formel $\forall x P(y)$, und *nicht* etwa $\forall z P(y)$.

Beispiele. (i) $\exists x(P(x) \vee Q(y))\,[y/k]$ ist $\exists x(P(x) \vee Q(k))$.

(ii) $\forall x(P(y) \to R(x,y))\,[y/k]$ ist $\forall x(P(k) \to R(x,k))$.

(iii) $\exists x R(x,y)\,[y/x]$ ist nicht definiert.

(iv) $P(x) \wedge (R(x,y)\,[x/z])$ ist $P(x) \wedge R(z,y)$.

(v) $P(x) \wedge R(x,y)\,[x/z]$ ist $P(z) \wedge R(z,y)$.

Theorem 9.11 (Gebundene Umbenennung)
Falls y nicht frei in A vorkommt, gilt:
(i) $\forall xA \dashv\models \forall y(A\,[x/y])$, *(ii)* $\exists xA \dashv\models \exists y(A\,[x/y])$.

Beweis. Offensichtlich, da Substitution nicht induktiv, sondern global definiert wurde. QED

Beispiele. (i) $\forall xP(x) \dashv\models \forall yP(y)$.

(ii) $\exists xP(x) \wedge Q(y) \dashv\models \exists yP(y) \wedge Q(y)$.

(iii) $\forall x\exists yR(x,y) \dashv\models \forall x\exists zR(x,z)$.

(iv) Hingegen sind $\exists xR(x,y)$ und $\exists yR(y,y)$ nicht logisch äquivalent.

In Beispiel (ii) und (iii) haben wir auch das schon aus der Aussagenlogik bekannte Ersetzungstheorem verwendet, das für die Quantorenlogik erweitert werden kann. Den Beweis werden wir per Induktion über dem Formelaufbau führen. Dazu erläutern wir zunächst kurz, was das ist.

Induktionsbeweis

Bemerkung. Die Voraussetzung für einen *Induktionsbeweis* ist die Existenz eines *Induktionsmaßes*, nach dem die Gegenstände, über denen Induktion geführt werden soll, wie die natürlichen Zahlen geordnet werden können. Dies garantiert die Gültigkeit eines *Induktionsprinzips* für diese Gegenstände, denn für die natürlichen Zahlen gilt das *Prinzip der mathematischen Induktion:*

Angenommen, für eine Eigenschaft E gelten die Bedingungen

(1) $E(0)$, *d. h.* 0 *hat die Eigenschaft E, und*

(2) für jede natürliche Zahl n: wenn $E(n)$, *dann* $E(n+1)$.

Dann hat jede natürliche Zahl die Eigenschaft E.

Als (nicht-logische) Regel hat das Prinzip der mathematischen Induktion im natürlichen Schließen die Form

$$\frac{n \in \mathbb{N} \qquad E(0) \qquad \begin{matrix}[E(n)]\\ E(n+1)\end{matrix}}{\forall nE(n)}$$

wobei n in keiner Annahme außer $E(n)$ vorkommen darf, von der die Prämisse $E(n+1)$ abhängt.
Bei einem Beweis per Induktion über dem Formelaufbau nutzt man aus, dass Formeln gemäß ihrer Komplexität wie die natürlichen Zahlen geordnet werden können.
Die Komplexität einer Formel kann man z. B. als Anzahl der in ihr vorkommenden logischen Konstanten festlegen; man spricht dann vom *Grad g* einer Formel, induktiv definiert wie folgt:

Grad

(i) $g(A) := 0$, falls A atomar,

(ii) $g(*A) := g(A) + 1$, falls $*$ eine 1-stellige logische Konstante $\neg$, $\forall$ oder $\exists$ ist,

(iii) $g(A \circ B) := g(A) + g(B) + 1$, falls $\circ$ ein 2-stelliges Konnektiv $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ oder $\leftrightarrow$ ist.

Verschiedene Formeln können denselben Grad haben; z. B. ist

$$\begin{aligned} g(\forall xR \wedge \bot) &= g(\forall xR) + g(\bot) + 1 \\ &= g(\forall xR) + 0 + 1 \\ &= g(R) + 1 + 0 + 1 \\ &= 0 + 1 + 0 + 1 = 2 = g(p \wedge q \rightarrow r) \end{aligned}$$

Eine Induktion über dem Grad einer Formel erfordert deshalb eine Fallunterscheidung, bei der Bedingung (2) des Prinzips der mathematischen Induktion für jede logische Konstante nachgewiesen werden muss.

Bei einer Induktion über dem Formelaufbau zum Nachweis einer Eigenschaft E für alle Formeln nimmt man an, dass die unmittelbaren Teilformeln einer beliebigen Formel A die Eigenschaft E haben. Dann weist man nach, dass unter dieser Annahme auch die aus diesen Teilformeln zusammengesetzte Formel A die Eigenschaft E hat (vgl. Bedingung (2)). Dieser Nachweis ist der *Induktionsschritt*, die dabei gemachte Annahme ist die *Induktionsannahme*. Zusätzlich muss gezeigt werden, dass auch die Formeln kleinster Komplexität (also die atomaren Formeln) die Eigenschaft E haben (vgl. Bedingung (1) im Prinzip der mathematischen Induktion). Dieser Nachweis ist der *Induktionsanfang*. Sind Induktionsanfang und Induktionsschritt (für jede logische Konstante) gezeigt, kann unter Verwendung des Induktionsprinzips geschlossen werden, dass alle Formeln die Eigenschaft E haben.

Zur Veranschaulichung: Seien $UT(A)$ die unmittelbaren Teilformeln von A. Dann hat ein solcher Induktionsbeweis im natürlichen Schließen die Form

$$\dfrac{\begin{matrix} \\ \text{IA} \\ E(A)\text{, für alle Atome} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [E(UT(A))]^k \\ \text{IS} \\ E(A) \end{matrix}}{\text{Für alle Formeln } A\text{: } E(A)} \; (\text{Induktionsprinzip})^k$$

Hierbei steht IA für den Beweis des Induktionsanfangs, und IS steht für die Ableitung von $E(A)$ aus Annahmen $E(UT(A))$, d. h. für den Induktionsschritt.

(Für Weiteres zur mathematischen Induktion siehe z. B. R. M. Smullyan, *Logical Labyrinths*, A K Peters, 2009.)

Nun zum Theorem:

Theorem 9.12 (Ersetzungstheorem) *Es sei A eine Teilformel von B, und es sei B' das Resultat der Ersetzung von A durch A' in B. Dann gilt $B \dashv\vDash B'$, falls $A \dashv\vDash A'$.*

Beweis. Per Induktion über dem Aufbau der Formel B:

Induktionsanfang: B sei atomar. Dann ist A mit B identisch. Mit $A \dashv\vDash A'$ gilt dann auch $B \dashv\vDash B'$.

Induktionsannahme: Die Behauptung (d. h. das Ersetzungstheorem) gelte für die unmittelbaren Teilformeln einer Formel B.

Induktionsschritt: Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Struktur und v eine beliebige Variablenbelegung in $\mathfrak{M}$.

1. Fall: B sei $\exists xA$. Es ist zu zeigen, dass $B \dashv\vDash B'$. Ist $\mathfrak{M} \vDash_v \exists xA$, so gibt es eine x-Variante v' von v in $\mathfrak{M}$, für die $\mathfrak{M} \vDash_{v'} A$. Das ist wegen $A \dashv\vDash A'$ genau dann der Fall,

wenn es eine x-Variante v' von v in $\mathfrak{M}$ gibt, so dass $\mathfrak{M} \vDash_{v'} A'$. Somit gilt $\mathfrak{M} \vDash_v \exists x A'$, d. h. $\mathfrak{M} \vDash B'$.

2. Fall: B sei $\forall x A$. Es ist wieder zu zeigen, dass $B \dashv\vDash B'$. Ist $\mathfrak{M} \vDash_v \forall x A$, so gilt für jede x-Variante v' von v in $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \vDash_{v'} A$, was wegen $A \dashv\vDash A'$ genau dann der Fall ist, wenn für jede x-Variante v' von v in $\mathfrak{M}$ gilt: $\mathfrak{M} \vDash_{v'} A'$. Somit gilt $\mathfrak{M} \vDash_v \forall x A'$, d. h. $\mathfrak{M} \vDash B'$.

3. Fall: B beginne nicht mit einem Quantor, d. h. B sei $\neg A$ oder habe die Form $A \circ C$ bzw. $C \circ A$ für ein 2-stelliges Konnektiv $\circ$. Es ist wieder zu zeigen, dass $B \dashv\vDash B'$.

- B sei $\neg A$. Es gilt $\mathfrak{M} \vDash_v \neg A$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \nvDash_v A$. Dies gilt wegen $A \dashv\vDash A'$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \nvDash_v A'$, was genau dann gilt, wenn $\mathfrak{M} \vDash_v \neg A'$, d. h. $\mathfrak{M} \vDash_v B'$.
- B sei $A \wedge C$. Es gilt $\mathfrak{M} \vDash_v A \wedge C$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \vDash_v A$ und $\mathfrak{M} \vDash_v C$. Wegen $A \dashv\vDash A'$ gilt dann auch $\mathfrak{M} \vDash_v A'$, und damit $\mathfrak{M} \vDash_v A' \wedge C$, d. h. $\mathfrak{M} \vDash_v B'$. Entsprechend für $C \wedge A$.

Für die restlichen Konnektive zeigt man den Induktionsschritt analog. QED

Theorem 9.13 (Eingeschränkte Distributivität über $\rightarrow$)
Falls x nicht frei in B vorkommt, gilt:

(i) $\forall x A \rightarrow B \dashv\vDash \exists x(A \rightarrow B)$, *(iii)* $B \rightarrow \forall x A \dashv\vDash \forall x(B \rightarrow A)$,

(ii) $\exists x A \rightarrow B \dashv\vDash \forall x(A \rightarrow B)$, *(iv)* $B \rightarrow \exists x A \dashv\vDash \exists x(B \rightarrow A)$.

Beweis. (i)

$$\begin{aligned} \forall x A \rightarrow B &\dashv\vDash \neg\forall x A \vee B && \text{(Aussagenlogik)} \\ &\dashv\vDash \exists x \neg A \vee B && \text{(Dualität, Ersetzung)} \\ &\dashv\vDash \exists x \neg A \vee \exists x B && \text{(Leerer Quantor, Ersetzung)} \\ &\dashv\vDash \exists x(\neg A \vee B) && \text{(Distributivität über } \vee\text{)} \\ &\dashv\vDash \exists x(A \rightarrow B) && \text{(Aussagenlogik, Ersetzung)} \end{aligned}$$

(ii)-(iv) analog. QED

Beispiel. Es gilt $\vDash \exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y))$. Denn

$$\begin{aligned} \exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y)) &\dashv\vDash \forall x P(x) \rightarrow \forall y P(y) && \text{(Eingeschr. Distrib. über } \rightarrow\text{; (i))} \\ &\dashv\vDash \forall x P(x) \rightarrow \forall x P(x) && \text{(Geb. Umbenennung, Ersetzung)} \\ &\dashv\vDash p \rightarrow p && \text{(Permanenz)} \end{aligned}$$

Da $\vDash p \rightarrow p$, muss auch $\vDash \exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y))$ gelten.

Theorem 9.14 (Eingeschränkte Distributivität über $\wedge$ und $\vee$)
Falls x nicht frei in B vorkommt, gilt:

(i) $\exists x(A \wedge B) \dashv\vDash \exists x A \wedge B$, *(iii)* $\forall x(A \wedge B) \dashv\vDash \forall x A \wedge B$,

(ii) $\exists x(A \vee B) \dashv\vDash \exists x A \vee B$, *(iv)* $\forall x(A \vee B) \dashv\vDash \forall x A \vee B$.

Beweis. (i)

$$\begin{aligned} \exists x(A \wedge B) &\dashv\vDash \neg\forall x \neg(A \wedge B) && \text{(Dualität)} \\ &\dashv\vDash \neg\forall x(\neg A \vee \neg B) && \text{(Aussagenlogik)} \\ &\dashv\vDash \neg\forall x(A \rightarrow \neg B) && \text{(Aussagenlogik)} \\ &\dashv\vDash \neg(\exists x A \rightarrow \neg B) && \text{(Eingeschr. Distrib. über } \rightarrow\text{; (ii))} \\ &\dashv\vDash \neg(\neg\exists x A \vee \neg B) && \text{(Aussagenlogik)} \\ &\dashv\vDash \exists x A \wedge B && \text{(Aussagenlogik)} \end{aligned}$$

Außer im 1. Umformungsschritt wurde überall auch das Ersetzungstheorem verwendet.

(ii)-(iv) analog. QED

Wir fassen die Gesetze noch in einem Überblick zusammen. Die uneingeschränkten Gesetze gelten für beliebige Formeln A und B sowie für beliebige Variablen x und y; bei den eingeschränkten Gesetzen ist die jeweils angegebene Variablenbedingung zu beachten.

Uneingeschränkte Gesetze	*Eingeschränkte Gesetze*
Dualität	*Leere Quantoren*
$\neg\forall xA \dashv\models \exists x\neg A, \quad \forall xA \dashv\models \neg\exists x\neg A$	Falls x nicht frei in A vorkommt, gilt:
$\neg\exists xA \dashv\models \forall x\neg A, \quad \exists xA \dashv\models \neg\forall x\neg A$	$\forall xA \dashv\models A, \quad \exists xA \dashv\models A$
Vertauschung	*Gebundene Umbenennung*
$\forall x\forall yA \dashv\models \forall y\forall xA$	Falls y nicht frei in A vorkommt, gilt:
$\exists x\exists yA \dashv\models \exists y\exists xA$	$\forall xA \dashv\models \forall y(A\,[x/y]), \quad \exists xA \dashv\models \exists y(A\,[x/y])$
$\exists x\forall yA \models \forall y\exists xA$	*Eingeschränkte Distributivität über* $\to$
	Falls x nicht frei in B vorkommt, gilt:
	$\forall xA \to B \dashv\models \exists x(A \to B)$
	$\exists xA \to B \dashv\models \forall x(A \to B)$
	$B \to \forall xA \dashv\models \forall x(B \to A)$
	$B \to \exists xA \dashv\models \exists x(B \to A)$
Distributivität über $\wedge$ *und* $\vee$	*Eingeschränkte Distributivität über* $\wedge$ *und* $\vee$
$\exists x(A \vee B) \dashv\models \exists xA \vee \exists xB$	Falls x nicht frei in B vorkommt, gilt:
$\forall x(A \wedge B) \dashv\models \forall xA \wedge \forall xB$	$\exists x(A \wedge B) \dashv\models \exists xA \wedge B$
	$\exists x(A \vee B) \dashv\models \exists xA \vee B$
$\exists x(A \wedge B) \models \exists xA \wedge \exists xB$	$\forall x(A \wedge B) \dashv\models \forall xA \wedge B$
$\forall xA \vee \forall xB \models \forall x(A \vee B)$	$\forall x(A \vee B) \dashv\models \forall xA \vee B$

9.2 Pränexe Normalform

Definition 9.15 Eine Formel A ist in *pränexer Normalform*, falls sie für $n \geq 0$ die Form *pränexe Normalform*

$$\mathrm{Q}_1 x_1 \ldots \mathrm{Q}_n x_n C$$

hat, wobei

(i) in C keine Quantoren vorkommen,

(ii) Q_i entweder $\forall$ oder $\exists$ ist,

(iii) und alle x_i paarweise verschieden sind.

$\mathrm{Q}_1 x_1 \ldots \mathrm{Q}_n x_n$ heißt *Präfix* der Formel A, und C heißt *Kern* (oder *Matrix*) von A. *Präfix, Kern*

Bemerkung. Im Fall $n = 0$ kommen in A keine Quantoren vor, d. h. A ist identisch mit C.

Beispiele. (i) $\exists x \exists y \forall z (S(x, y, z) \wedge R(x, y))$ ist in pränexer Normalform.

(ii) $\forall x \exists y (R(x, y) \to \exists z P(z))$ ist nicht in pränexer Normalform.

Theorem 9.16 *Sei A eine Formel. Dann gibt es eine Formel B in pränexer Normalform, so dass A und B logisch äquivalent sind.*

Beweis. Wir geben ein Verfahren zur Konstruktion einer pränexen Normalform an:

(1) Streiche leere Quantoren in A (Theorem 9.7). Das Resultat sei die Formel A_1.

(2) Benenne gebundene Variablen in A_1 so um (Theorem 9.11), dass alle Quantoren verschiedene Variablen haben, und keine Variable sowohl frei als auch gebunden vorkommt. Das Resultat sei die Formel A_2.

(3) Ziehe Quantoren gemäß den Theoremen 9.4, 9.13 und 9.14 nach außen. Das Resultat sei die Formel A_3.

Die Formel A_3 ist die gesuchte Formel B in pränexer Normalform. Da ausschließlich Äquivalenzumformungen verwendet wurden, sind A und B logisch äquivalent. QED

Bemerkung. Die pränexe Normalform einer Formel ist nicht eindeutig bestimmt, da

(i) unterschiedliche gebundene Umbenennungen möglich sind,

(ii) die Reihenfolge, in der Quantoren nach außen gezogen werden können, nicht festgelegt ist,

(iii) und der Kern prinzipiell durch jede zu diesem logisch äquivalente, quantorenfreie Formel ersetzt werden darf.

Beispiele. Wir konstruieren pränexe Normalformen mit dem im Beweis zu Theorem 9.16 angegebenen Verfahren. (Zur besseren Lesbarkeit verwenden wir die abkürzende Schreibweise bei Relationszeichen.)

(i) $\forall z (\exists x Px \to \neg \exists x Qxy)$

$$\begin{aligned}
&\dashv\models \exists x Px \to \neg \exists x Qxy && \text{(Leerer Quantor)}\\
&\dashv\models \exists x Px \to \neg \exists z Qzy && \text{(Gebundene Umbenennung)}\\
&\dashv\models \exists x Px \to \forall z \neg Qzy && \text{(Dualität)}\\
&\dashv\models \forall z (\exists x Px \to \neg Qzy) && \text{(Eingeschränkte Distributivität über } \to)\\
&\dashv\models \forall z \forall x (Px \to \neg Qzy) && \text{(Eingeschränkte Distributivität über } \to)
\end{aligned}$$

Im 1., 2. und 3. Umformungsschritt wurde auch das Ersetzungstheorem verwendet.

(ii) $\exists y (\forall x (Px \to Qx) \vee \neg \forall x (Qx \vee Rxk))$

$$\begin{aligned}
&\dashv\models \forall x (Px \to Qx) \vee \neg \forall x (Qx \vee Rxk) && \text{(Leerer Quantor)}\\
&\dashv\models \forall x (Px \to Qx) \vee \neg \forall y (Qy \vee Ryk) && \text{(Gebundene Umbenennung)}\\
&\dashv\models \forall x (Px \to Qx) \vee \exists y \neg (Qy \vee Ryk) && \text{(Dualität)}\\
&\dashv\models \forall x ((Px \to Qx) \vee \exists y \neg (Qy \vee Ryk)) && \text{(Eingeschr. Distributivität über } \vee)\\
&\dashv\models \forall x \exists y ((Px \to Qx) \vee \neg (Qy \vee Ryk)) && \text{(Eingeschr. Distributivität über } \vee)
\end{aligned}$$

Im 2. und 3. Umformungsschritt wurde auch das Ersetzungstheorem verwendet.

Bemerkung. Bei Formeln in pränexer Normalform ist der Formelaufbau in einen aussagenlogischen und einen quantorenlogischen Teil getrennt. Das heißt, im Strukturbaum einer solchen Formel kommen (von den Blättern zur Wurzel hin betrachtet) in den unteren Ebenen ausschließlich aussagenlogische Konstanten hinzu, während in den oberen Ebenen ausschließlich Quantoren hinzukommen. Diese Trennung ist wichtig für das automatische Beweisen.

10 Kalkül des natürlichen Schließens

Wir erweitern den aussagenlogischen Kalkül NK für die Quantorenlogik, indem wir Einführungs- und Beseitigungsregeln für die Quantoren $\forall$ und $\exists$ hinzufügen. Der resultierende Kalkül ist korrekt und vollständig für die Quantorenlogik.

10.1 Der quantorenlogische Kalkül NK

Die Anwendbarkeit von $\forall$-Einführungs- und $\exists$-Beseitigungsregel unterliegt Einschränkungen bezüglich Vorkommen freier Variablen. Um diese Einschränkungen möglichst einfach formulieren zu können, werden wir an Stelle freier Variablen sogenannte Individuenparameter verwenden. Terme sind nun entweder Individuenparameter oder Individuenkonstanten. Wir modifizieren die formale Sprache der Quantorenlogik also wie folgt:

Definition 10.1 (i) Freie Variablen schreiben wir jetzt als *Individuenparameter* (kurz: *Parameter*): $a, b, c, a_1, a_2, \ldots.$ *Individuenparameter*

(Für gebundene Variablen verwenden wir nach wie vor $x, y, z, x_1, x_2, \ldots.$)

(ii) *Terme* sind nun *Terme*
- Parameter: $a, b, c, a_1, a_2, \ldots,$
- Konstanten (wie gehabt): $k, k', k_1, k_2, \ldots, l, \ldots.$

Bemerkungen. (i) Wie schon bei Variablen, verzichten wir auch bei Parametern auf gesonderte metasprachliche Variablen.

(ii) Als metasprachliche Variablen für Terme verwenden wir wie bisher Buchstaben $r, s, t, t_1, t_2, \ldots.$

Zur Notation beliebiger Formeln A legen wir fest:

Definition 10.2 (i) $A(a)$ bedeutet, dass der Parameter a in der Formel A vorkommt.

(ii) $A(t)$ bedeutet, dass der Term t in der Formel A vorkommt.

(iii) $\forall x A(x)$ bzw. $\exists x A(x)$ bedeutet, dass die Variable x in der Formel A gebunden vorkommt, weil A im Wirkungsbereich von $\forall x$ bzw. von $\exists x$ steht.

Beispiele. (i) Die Formel

$$\forall x P(x, y) \wedge Q(z, z, k)$$

schreiben wir jetzt als

$$\forall x P(x, a) \wedge Q(b, b, k)$$

(ii) Das Formelschema $\forall x A(x, a, b)$ steht für Formeln, in denen die Parameter a und b vorkommen, und die Variable x durch $\forall x$ gebunden ist.

Ein Beispiel für eine solche Formel ist $\forall x(P(b, x) \rightarrow \exists y Q(a, x, b))$. (Der Quantor $\exists y$ ist hier ein leerer Quantor, da in seinem Wirkungsbereich y nicht vorkommt.)

(iii) Im Kontext von $\exists x \forall y A(x, y)$ bedeutet $\forall y A(a, y)$, dass die vormals gebundene Variable x jetzt als Parameter a frei vorkommt.

Im Kontext von $A(a, b)$ bedeutet $\forall y A(a, y)$, dass die vormals freie Variable, d. h. der Parameter b, jetzt als gebundene Variable y vorkommt.

Definition 10.3 (i) Der *Kalkül NK des natürlichen Schließens (für klassische Quantorenlogik)* besteht aus den in Definition 5.1 angegebenen aussagenlogischen Regeln zusammen mit den folgenden quantorenlogischen Regeln:

Kalkül NK

Einführungsregel	*Beseitigungsregel*
$\dfrac{A(a)}{\forall x A(x)}\,(\forall\,\mathrm{E})$ a in keiner Annahme, von der $A(a)$ abhängt	$\dfrac{\forall x A(x)}{A(t)}\,(\forall\,\mathrm{B})$
$\dfrac{A(t)}{\exists x A(x)}\,(\exists\,\mathrm{E})$	$\dfrac{\exists x A(x) \qquad \overset{[A(a)]}{C}}{C}\,(\exists\,\mathrm{B})$ a nicht in C und in keiner Annahme außer $A(a)$, von der C abhängt

Zur Einführung und Beseitigung leerer Quantoren lassen wir bei diesen Regeln auch zu, dass von A, sofern x in A nicht frei vorkommt, ohne Weiteres auf $\forall x A$ oder $\exists x A$ geschlossen werden darf, sowie auch umgekehrt von $\forall x A$ oder $\exists x A$ auf A.

(ii) Der Parameter a bei Anwendungen der Regeln ($\forall$ E) und ($\exists$ B) heißt *Eigenparameter*.

Eigenparameter

(iii) Die einschränkende Bedingung bezüglich des Eigenparameters a bei ($\forall$ E) und ($\exists$ B) heißt *Eigenparameterbedingung*.

(iv) Die Prämisse $\exists x A(x)$ der Regel ($\exists$ B) heißt auch *Hauptprämisse*, die Prämisse C auch *Nebenprämisse*.

Bemerkungen. (i) Die All-Einführungsregel ($\forall$ E) besagt, dass von der Prämisse $A(a)$, in der a als Parameter vorkommt, zur Konklusion $\forall x A(x)$ übergegangen werden darf, wobei jedes Vorkommen von a in A durch die nun gebundene Variable x ersetzt wurde.

Die offene Formel $A(a)$ kann man auch lesen als "A trifft auf ein beliebiges a zu". Dass a beliebig ist, wird gerade durch die Eigenparameterbedingung ausgedrückt: Bei einer Anwendung von ($\forall$ E) darf die Prämisse $A(a)$ von keiner Annahme abhängen, in der a ebenfalls vorkommt. (Andernfalls wäre a in $A(a)$ nicht beliebig, da zusätzliche Voraussetzungen bezüglich a bestünden.)

Man beachte, dass von $A(a)$ als Annahme nie zu $\forall x A(x)$ übergegangen werden darf, da die Prämisse $A(a)$ als Annahme von sich selbst abhängt. In diesem Fall ist die Eigenparameterbedingung also immer verletzt.

(ii) Die Allbeseitigungsregel ($\forall$ B) besagt, dass von der Prämisse $\forall x A(x)$ zur Konklusion $A(t)$ übergegangen werden darf, wobei Vorkommen von x in A durch den Term t ersetzt werden dürfen.

Bei einer konkreten Anwendung ist die Konklusion entweder $A(a)$, für einen Parameter a, oder $A(k)$, für eine Konstante k.

(iii) Die Existenzeinführungsregel ($\exists$ E) besagt, dass von der Prämisse $A(t)$ zur Konklusion $\exists x A(x)$ übergegangen werden darf, wobei Vorkommen von t in A durch die gebundene Variable x ersetzt werden dürfen.

Bei einer konkreten Anwendung ist die Prämisse entweder $A(a)$, für einen Parameter a, oder $A(k)$, für eine Konstante k.

(iv) Die Existenzbeseitigungsregel ($\exists$ B) besagt, dass von der Hauptprämisse $\exists x A(x)$ und der Nebenprämisse C zur Konklusion C übergegangen werden darf, wobei die Konklusion nicht mehr von Annahmen $A(a)$ abhängt, von denen die Nebenprämisse noch abhängen kann.

Die Eigenparameterbedingung drückt wieder aus, dass a beliebig ist. Käme a in C vor, oder in weiteren (d. h. von $A(a)$ verschiedenen) Annahmen, von denen die Nebenprämisse C abhängt, so würden über A hinaus zusätzliche Bedingungen bezüglich a bestehen. Mit anderen Worten, es würde dann nicht nur vorausgesetzt, dass auf a die Eigenschaft A zutrifft, sondern dass auch jene Eigenschaften zutreffen, die in den zusätzlichen, von $A(a)$ verschiedenen Annahmen formuliert sind. Die Hauptprämisse sagt aber lediglich, dass es einen Gegenstand gibt, der die Eigenschaft A hat; über die Existenz von Gegenständen, auf die neben A noch weitere Eigenschaften zutreffen, sagt die Hauptprämisse nichts. Ein Übergang zur Konklusion wäre in diesem Fall also nicht gerechtfertigt.

Definition 10.4 *Ableitungen* in NK definieren wir als Erweiterung von Definition 5.2 wie folgt. Sind $\mathscr{D}$ und $\mathscr{D}'$ Ableitungen, dann sind auch die folgenden Bäume Ableitungen:

Ableitung

$$\dfrac{\overset{\mathscr{D}}{A(a)}}{\forall x A(x)}\,(\forall\,\mathrm{E}) \qquad\qquad \dfrac{\overset{\mathscr{D}}{\forall x A(x)}}{A(t)}\,(\forall\,\mathrm{B})$$

a in keiner Annahme,
von der $A(a)$ abhängt

$$\dfrac{\overset{\mathscr{D}}{A(t)}}{\exists x A(x)}\,(\exists\,\mathrm{E}) \qquad\qquad \dfrac{\overset{\mathscr{D}}{\exists x A(x)} \qquad \overset{[A(a)]}{\overset{\mathscr{D}'}{C}}}{C}\,(\exists\,\mathrm{B})$$

a nicht in C und in keiner Annahme
außer $A(a)$, von der C abhängt

Die in den Definitionen 5.3-5.6 festgelegten Begriffe und Notationen können direkt übernommen werden (wobei wir davon ausgehen, dass die rekursive Definition 5.5 von *Annahmenmenge* in offensichtlicher Weise für Ableitungen gemäß Definition 10.4 erweitert wurde). Die in Theorem 5.8 angegebenen Strukturregeln gelten entsprechend auch hier.

Beispiele. (i) Wir zeigen $\forall x(P(x) \to Q(x)), P(k) \vdash Q(k)$ durch Angabe einer Ableitung in NK:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(P(x) \to Q(x))}{P(k) \to Q(k)}\,(\forall\,\mathrm{B}) \qquad P(k)}{Q(k)}\,(\to\mathrm{B})$$

(Man vergleiche dies mit dem Nachweis von $\forall x(P(x) \to Q(x)), P(k) \vDash Q(k)$.)

(ii) Wir zeigen $\exists x P(x) \vdash \exists y P(y)$:

$$\dfrac{\exists x P(x) \qquad \dfrac{[P(a)]^1}{\exists y P(y)}\,(\exists\,\mathrm{E})}{\exists y P(y)}\,(\exists\,\mathrm{B})^1$$

(Vergleiche Theorem 9.11 (ii).)

(iii) Wir zeigen $\neg\forall x\neg A(x) \vdash \exists x A(x)$:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\forall x\neg A(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x A(x)]^2 \qquad \dfrac{[A(a)]^1}{\exists x A(x)}\,(\exists\,\mathrm{E})}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{\neg A(a)}\,(\to\mathrm{E})^1}{\forall x\neg A(x)}\,(\forall\,\mathrm{E})}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{\exists x A(x)}\,(\bot)^2$$

(Vergleiche Theorem 9.4 (iv).)

Bemerkung. Die Ableitung in Beispiel (iii) zeigt, dass prinzipiell auch dann auf eine Existenzaussage $\exists x A(x)$ geschlossen werden kann, wenn überhaupt kein Gegenstand vorgewiesen wird, der die Eigenschaft A hat. Um die Existenz eines Gegenstands mit der Eigenschaft A zu zeigen, genügt es, zu zeigen, dass es nicht der Fall ist, dass allen Gegenständen die Eigenschaft A nicht zukommt (hier als Annahme $\neg\forall x\neg A(x)$). Mit anderen Worten, $\exists x A(x)$ muss *nicht* in jedem Fall per Existenzeinführungsregel ($\exists$ E) mit Prämisse $A(k)$ abgeleitet werden, d. h. aus der Aussage, dass der Gegenstand k die Eigenschaft A hat:

$$\begin{array}{c}\mathscr{D}\\ \dfrac{A(k)}{\exists x A(x)}\,(\exists\,\mathrm{E})\end{array}$$

(bzw. mit der Prämisse $A(a)$, die besagt, dass ein beliebiger Gegenstand die Eigenschaft A hat).

Dies ist ein Merkmal der klassischen Quantorenlogik. Hingegen gilt in der *konstruktiven* bzw. *intuitionistischen Logik* für jede geschlossene Formel $\exists x A(x)$: Wenn $\exists x A(x)$ beweisbar ist, dann ist auch $A(k)$ beweisbar, für eine Konstante k.

Einen Kalkül für die intuitionistische Logik erhält man durch Abschwächung der (klassischen) Widerspruchsregel ($\bot$) zur (intuitionistischen) *ex falso-Regel*

$$\dfrac{\bot}{A}$$

bei der im Unterschied zur Widerspruchsregel Annahmen der Form $\neg A$ nicht gelöscht werden können. Dieser Kalkül ist also schwächer als NK.

Weitere Beispiele. (iv) Wir zeigen $\exists x\forall y A(x,y) \vdash \forall y\exists x A(x,y)$ durch Angabe einer Ableitung in NK:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\forall y A(x,y) \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y A(a,y)]^1}{A(a,b)}\,(\forall\,\mathrm{B})}{\exists x A(x,b)}\,(\exists\,\mathrm{E})}{\exists x A(x,b)}\,(\exists\,\mathrm{B})^1}{\forall y\exists x A(x,y)}\,(\forall\,\mathrm{E})$$

Im rechten Zweig könnte von $\forall y A(a,y)$ mit ($\forall$ B) zu $A(a,k)$ übergegangen werden, für eine Konstante k. Dann dürfte jedoch im letzten Schritt von $\exists x A(x,k)$ nicht mit ($\forall$ E) auf $\forall y \exists x A(x,y)$ geschlossen werden, da bei ($\forall$ E) ein Parameter verlangt wird.

(Vergleiche Theorem 9.6.)

(v) Wir zeigen, dass $\exists x A(x) \to \boldsymbol{B} \vdash \forall x(A(x) \to \boldsymbol{B})$, falls der Parameter a nicht in $\boldsymbol{B}$ vorkommt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x A(x) \to \boldsymbol{B} \qquad \dfrac{[A(a)]^1}{\exists x A(x)}\,(\exists\,\mathrm{E})}{\boldsymbol{B}}\,(\to\mathrm{B})}{A(a) \to \boldsymbol{B}}\,(\to\mathrm{E})^1}{\forall x(A(x) \to \boldsymbol{B})}\,(\forall\,\mathrm{E})$$

Statt der Annahme $A(a)$ hätte man auch die (weniger allgemeine) Annahme $A(k)$, für eine Konstante k, als Prämisse von ($\exists$ E) wählen können. Allerdings könnte dann von $A(k) \to \boldsymbol{B}$ nicht mit ($\forall$ E) auf die Endformel geschlossen werden, da ($\forall$ E) in der Prämisse einen Parameter verlangt.

Die Einschränkung, dass der Parameter a nicht in $\boldsymbol{B}$ vorkommt, ist nötig, da a Eigenparameter von ($\forall$ E) ist. Käme a in $\boldsymbol{B}$ vor, würde die Prämisse von ($\forall$ E) von einer Annahme abhängen (nämlich von $\exists x A(x) \to \boldsymbol{B}(a)$), in der a vorkommt. Damit wäre die Eigenparameterbedingung verletzt. (Die Annahme $A(a)$ ist hingegen unproblematisch, da diese bei Anwendung von ($\to$ E) geschlossen wurde; die Prämisse von ($\forall$ E) hängt also nicht mehr von der Annahme $A(a)$ ab.)

(Vergleiche Theorem 9.13 (ii).)

Zur Notwendigkeit der Eigenparameterbedingung bei (∀ E) und (∃ B)

Um die Notwendigkeit der Eigenparameterbedingung bei den Regeln ($\forall$ E) und ($\exists$ B) noch etwas deutlicher zu machen, betrachten wir folgende *inkorrekte* Ableitungen für die Ableitbarkeitsbehauptungen $\exists x \boldsymbol{P}(x) \vdash \forall x \boldsymbol{P}(x)$ und $\exists x \boldsymbol{P}(x), \exists x \neg \boldsymbol{P}(x) \vdash \bot$. Die Eigenparameterbedingung wird dabei jeweils verletzt. (Es gibt keine korrekten Ableitungen, die diese Ableitbarkeitsbehauptungen beweisen würden, d. h. es ist $\exists x \boldsymbol{P}(x) \nvdash \forall x \boldsymbol{P}(x)$ und $\exists x \boldsymbol{P}(x), \exists x \neg \boldsymbol{P}(x) \nvdash \bot$.)

(i) *Inkorrekte* Ableitung für $\exists x \boldsymbol{P}(x) \vdash \forall x \boldsymbol{P}(x)$:

↯

$$\dfrac{\exists x \boldsymbol{P}(x) \qquad \dfrac{[\boldsymbol{P}(a)]^1}{\forall x \boldsymbol{P}(x)}\,(\forall\,\mathrm{E})\lightning}{\forall x \boldsymbol{P}(x)}\,(\exists\,\mathrm{B})^1$$

↯

Die Anwendung von ($\forall$ E) ist *inkorrekt*, da an dieser Stelle $\boldsymbol{P}(a)$ eine offene Annahme ist, und somit der Eigenparameter a von ($\forall$ E) in einer Annahme vorkommt, von der $\boldsymbol{P}(a)$ abhängt (offene Annahmen hängen von sich selbst ab). Die Eigenparameterbedingung von ($\forall$ E) ist also verletzt. (Die nachfolgende Anwendung von ($\exists$ B) ist korrekt.)

(ii) Weitere *inkorrekte* Ableitung für $\exists x \boldsymbol{P}(x) \vdash \forall x \boldsymbol{P}(x)$:

↯

$$\dfrac{\dfrac{\exists x \boldsymbol{P}(x) \qquad [\boldsymbol{P}(a)]^1}{\boldsymbol{P}(a)}\,(\exists\,\mathrm{B})^1\lightning}{\forall x \boldsymbol{P}(x)}\,(\forall\,\mathrm{E})$$

↯

Die Anwendung von $(\exists\,\mathrm{B})$ ist *inkorrekt*, da der Eigenparameter a in der Prämisse $P(a)$ von $(\exists\,\mathrm{B})$ vorkommt. Die Eigenparameterbedingung von $(\exists\,\mathrm{B})$ ist also verletzt. (Die nachfolgende Anwendung von $(\forall\,\mathrm{E})$ ist korrekt.)

(iii) Man sieht hier auch, dass

$$\lightning \qquad \frac{\exists x A(x)}{A(t)}\,\lightning \qquad \lightning$$

keine korrekte Existenzbeseitigungsregel sein kann. Denn damit wäre

$$\lightning \qquad \dfrac{\dfrac{\exists x P(x)}{P(a)}\,\lightning}{\forall x P(x)}\,(\forall\,\mathrm{E}) \qquad \lightning$$

eine Ableitung für $\exists x P(x) \vdash \forall x P(x)$.

(iv) Eine weitere *inkorrekte* Ableitung für $\exists x P(x) \vdash \forall x P(x)$ ist:

$$\lightning \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x P(x) \qquad \dfrac{[\neg P(a)]^2 \qquad [P(a)]^1}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{\bot}\,(\exists\,\mathrm{B})^1\,\lightning}{P(a)}\,(\bot)^2}{\forall x P(x)}\,(\forall\,\mathrm{E}) \qquad \lightning$$

Die Anwendung von $(\exists\,\mathrm{B})$ ist *inkorrekt*, da der Eigenparameter a in einer Annahme außer $P(a)$ vorkommt, nämlich in der an dieser Stelle ebenfalls noch offenen Annahme $\neg P(a)$, von der die Nebenprämisse $\bot$ abhängt. Auch hier ist also die Eigenparameterbedingung von $(\exists\,\mathrm{B})$ verletzt. (Die Anwendung von $(\forall\,\mathrm{E})$ ist korrekt.)

(v) *Inkorrekte* Ableitung für $\exists x P(x), \exists x \neg P(x) \vdash \bot$:

$$\lightning \qquad \dfrac{\exists x \neg P(x) \qquad \dfrac{\exists x P(x) \qquad \dfrac{[\neg P(a)]^2 \qquad [P(a)]^1}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{\bot}\,(\exists\,\mathrm{B})^1\,\lightning}{\bot}\,(\exists\,\mathrm{B})^2 \qquad \lightning$$

Die erste Anwendung von $(\exists\,\mathrm{B})$ ist *inkorrekt*, da hier der Eigenparameter a in einer Annahme außer $P(a)$ vorkommt, nämlich in $\neg P(a)$, von der die Prämisse $\bot$ dieser Regelanwendung abhängt. Die Eigenparameterbedingung der ersten Anwendung von $(\exists\,\mathrm{B})$ ist also verletzt. (Hingegen ist die zweite Anwendung von $(\exists\,\mathrm{B})$ korrekt, da hier die Annahme $P(a)$ schon geschlossen ist, und der Eigenparameter a aus $\neg P(a)$ somit in keiner Annahme außer $\neg P(a)$ mehr vorkommt, von der die Prämisse $\bot$ an dieser Stelle abhängt.)

Definierbarkeit von $\forall$ bzw. $\exists$

Statt Regelpaare sowohl für $\forall$ als auch für $\exists$ einzuführen, genügt es, nur für einen der beiden Quantoren ein Regelpaar anzugeben.
Gibt man z. B. Regeln für den Allquantor $\forall$ an, dann kann $\exists x A(x)$ durch $\neg\forall x \neg A(x)$ definiert werden. Der resultierende Kalkül sei $\mathrm{NK}_\forall$, und die durch ihn gegebene Ableitbarkeitsrelation sei $\vdash_\forall$. Damit $\mathrm{NK}_\forall$ gleichwertig zu NK ist (d. h., damit $\vdash_\forall\, = \,\vdash$ gilt), muss Folgendes gelten:

Theorem 10.5 *(i)* $A(t) \vdash_{\forall} \exists x A(x)$, *für beliebige Terme* t.

(ii) *Wenn* $\Gamma, A(a) \vdash_{\forall} C$, *dann* $\Gamma, \exists x A(x) \vdash_{\forall} C$, *wobei* Γ *eine Menge von Annahmen ist, und der Parameter* a *nicht in* C *und in keiner Annahme in* Γ *vorkommt, von der* C *abhängt.*

Beweis. (i) Sei t ein beliebiger Term. Dann ist

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x \neg A(x)]^1}{\neg A(t)}\,(\forall\,\mathrm{B}) \qquad A(t)}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{\neg\forall x \neg A(x)}\,(\to\mathrm{E})^1$$

eine Ableitung in $\mathrm{NK}_{\forall}$. Somit gilt mit $\exists x A(x) := \neg\forall x\neg A(x)$, dass $A(t) \vdash_{\forall} \exists x A(x)$.

Man erhält also die NK-Regel $\dfrac{A(t)}{\exists x A(x)}\,(\exists\,\mathrm{E})$.

(ii) Sei $\begin{matrix}\Gamma, A(a)\\ \mathscr{D}\\ C\end{matrix}$ eine Ableitung von C aus Γ und $A(a)$, wobei Γ eine Menge von Annahmen ist, und der Parameter a nicht in C und in keiner Annahme in Γ vorkommt, von der C abhängt. Dann gilt wegen

$$\dfrac{\dfrac{\neg\forall x\neg A(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg C]^2 \qquad \begin{matrix}\Gamma, [A(a)]^1\\ \mathscr{D}\\ C\end{matrix}}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{\neg A(a)}\,(\to\mathrm{E})^1}{\forall x\neg A(x)}\,(\forall\,\mathrm{E})}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{C}\,(\bot)^2$$

unter Verwendung von $\exists x A(x) := \neg\forall x \neg A(x)$, dass $\Gamma, \exists x A(x) \vdash_{\forall} C$.

Man erhält also die NK-Regel

$$\dfrac{\exists x A(x) \qquad \begin{matrix}[A(a)]\\ C\end{matrix}}{C}\,(\exists\,\mathrm{B})$$

mit entsprechender Eigenparameterbedingung. QED

Entsprechend kann man sich auch auf den Existenzquantor $\exists$ beschränken, und dann $\forall x A(x)$ durch $\neg\exists x\neg A(x)$ definieren. Der resultierende Kalkül sei $\mathrm{NK}_{\exists}$; seine Ableitbarkeitsrelation sei $\vdash_{\exists}$. Damit $\mathrm{NK}_{\exists}$ gleichwertig zu NK ist (d. h., damit $\vdash_{\exists} = \vdash$ gilt), muss Folgendes gelten:

Theorem 10.6 *(i)* *Wenn* $\Gamma \vdash_{\exists} A(a)$, *dann* $\Gamma \vdash_{\exists} \forall x A(x)$, *wobei* Γ *eine Menge von Annahmen ist, und der Parameter* a *in keiner Annahme in* Γ *vorkommt, von der* $A(a)$ *abhängt.*

(ii) $\forall x A(x) \vdash_{\exists} A(t)$, *für beliebige Terme* t.

Beweis.

(i) Sei $\begin{matrix}\Gamma\\ \mathscr{D}\\ A(a)\end{matrix}$ eine Ableitung von $A(a)$ aus Γ, wobei Γ eine Menge von Annahmen ist, und der Parameter a in keiner Annahme in Γ vorkommt, von der $A(a)$ abhängt. Dann gilt wegen

$$\dfrac{[\exists x\neg A(x)]^2 \qquad \dfrac{[\neg A(a)]^1 \quad \begin{matrix}\Gamma\\ \mathscr{D}\\ A(a)\end{matrix}}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{\dfrac{\bot}{\neg\exists x\neg A(x)}\,(\to\mathrm{E})^2}\,(\exists\,\mathrm{B})^1$$

unter Verwendung von $\forall x A(x) := \neg\exists x\neg A(x)$, dass $\Gamma \vdash_{\exists} \forall x A(x)$.

Man erhält also die NK-Regel

$$\dfrac{A(a)}{\forall x A(x)}\,(\forall\,\mathrm{E})$$

mit entsprechender Eigenparameterbedingung.

(ii) Sei t ein beliebiger Term. Dann ist

$$\dfrac{\dfrac{\neg\exists x\neg A(x) \qquad \dfrac{[\neg A(t)]^1}{\exists x\neg A(x)}\,(\exists\,\mathrm{E})}{\bot}\,(\to\mathrm{B})}{A(t)}\,(\bot)^1$$

eine Ableitung in $\mathrm{NK}_{\exists}$. Somit gilt mit $\forall x A(x) := \neg\exists x\neg A(x)$, dass $\forall x A(x) \vdash_{\exists} A(t)$.

Man erhält also die NK-Regel $\dfrac{\forall x A(x)}{A(t)}\,(\forall\,\mathrm{B})$. QED

10.2 Korrektheit und Vollständigkeit

Der quantorenlogische Kalkül NK ist für den semantischen Begriff der quantorenlogischen Folgerung korrekt und vollständig. Es gilt:

Theorem 10.7 (Korrektheit und Vollständigkeit)

(i) Korrektheit von NK: Wenn $\Gamma \vdash A$, *dann* $\Gamma \vDash A$.

(ii) Vollständigkeit von NK: Wenn $\Gamma \vDash A$, *dann* $\Gamma \vdash A$.

Wie schon in der Aussagenlogik, gilt auch hier:

Korollar 10.8 *(i) Ist* $\Gamma = \emptyset$, *dann gilt* $\vdash A$ *genau dann, wenn* $\vDash A$. *Das heißt, eine Formel ist genau dann beweisbar, wenn sie allgemeingültig ist.*

(ii) Sei Γ *eine beliebige (möglicherweise unendliche) Menge von Formeln, und* A *eine beliebige Formel. Falls* $\Gamma \vDash A$ *gilt, gibt es eine endliche Teilmenge* Γ' *von* Γ, *so dass* $\Gamma' \vDash A$ *gilt.*

Bemerkungen. (i) Die Zusammenfassung von Korrektheit und Vollständigkeit in der Aussage “$\Gamma \vdash A$ genau dann, wenn $\Gamma \vDash A$” bezeichnet man oft einfach als *Vollständigkeitssatz*.

(ii) Den ersten Beweis eines Vollständigkeitssatzes (für den sogenannten engeren Funktionenkalkül) gab K. Gödel, *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*, Dissertation, Universität Wien, 1929. (In: S. Feferman et al. (Hrsg.), *Kurt Gödel, Collected Works, Volume I, Publications 1929-1936*, Oxford University Press, 1986.)

(iii) Für einen Beweis des Vollständigkeitssatzes für den Kalkül des natürlichen Schließens siehe z. B. § 4.1 in D. van Dalen, *Logic and Structure*, 5th ed., Springer, 2013.

Literaturverzeichnis

A. Church, *A Note on the Entscheidungsproblem*, The Journal of Symbolic Logic **1** (1936), 40–41.

G. Frege, *Begriffsschrift*, Nebert, 1879.

G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen*, Mathematische Zeitschrift **39** (1935), 176–210, 405–431.

K. Gödel, *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*, Dissertation, Universität Wien, 1929. (In: S. Feferman et al. (Hrsg.), *Kurt Gödel, Collected Works, Volume I, Publications 1929-1936*, Oxford University Press, 1986.)

V. Halbach, *The Logic Manual*, Oxford University Press, 2010.

P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, Springer, 1974.

W. Hodges, *Logic*, Penguin, 2001.

R. I. G. Hughes (Hrsg.), *A Philosophical Companion to First-Order Logic*, Hackett, 1993.

I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft* (1781/87), Meiner, 1998.

J. Mittelstraß (Hrsg.), *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, J. B. Metzler, 2005.

D. Prawitz, *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study*, Almqvist & Wiksell, 1965. Neuauflage 2006, Dover Publications.

P. Schroeder-Heister, *Einführung in die Logik*, Skript zur Vorlesung, 2008.

R. M. Smullyan, *Logical Labyrinths*, A K Peters, 2009.

A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, Studia Philosophica **1** (1935), 261–405.

A. M. Turing, *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*, Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, **42** (1936), 230–265.

D. van Dalen, *Logic and Structure*, 5th ed., Springer, 2013.

Sachverzeichnis