Mathematische Logik I

— Foliensatz 7 —

Dr. Michael Arndt

Wintersemester 2014/15

Vorbemerkungen

Bisher wurden zwei zentrale Konzeptionen der Logik eingeführt:

1. Die Folgerung ($\models$) wird semantisch definiert über die Betrachtung aller (möglichen) Interpretationen der Formeln.

   Die Wahrheit der Prämissen erzwingt in einem Schluss die Wahrheit der Konklusion.

   Die Bedeutung der Junktoren wird durch Wahrheitsfunktionen festgelegt.

2. Das Ableiten ($\vdash$) wird syntaktisch definiert über die regelkonforme Anwendung von Schlussregeln eines Kalküls.

   Beim Ableiten ist das Erreichen der Endformel, ausgehend von den Prämissen, entscheidend.

   Die Bedeutung der Junktoren ist durch die Schlussregeln festgelegt.

Vorbemerkungen

Im Folgenden wird die Vollständigkeit von NK' bewiesen.

Damit ist die Gleichwertigkeit beider Konzeptionen gemeint.

Die Vollständigkeit (im weiten Sinn) umfaßt dabei zwei Richtungen. Seien $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ und $\phi \in \mathrm{PROP}$.

1. Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann $\Gamma \models \phi$ (Korrektheit des Kalküls).

   "Was abgeleitet werden kann, kann auch gefolgert werden."

2. Wenn $\Gamma \models \phi$, dann $\Gamma \vdash \phi$ (Vollständigkeit des Kalküls).

   "Was gefolgert werden kann, kann auch abgeleitet werden."

Vorbemerkungen

Die Verwendung von “Vollständigkeit” als übergeordneten Begriff legt nahe, dass der Folgerungsbegriff als primär, der Ableitungsbegriff als sekundär verstanden wird.

Ursprünglich wurde dies auch tatsächlich so gesehen.

Es gibt allerdings auch philosophische Konzeptionen der Logik, die das Ableiten als primär ansehen.

Letztlich kann festgehalten werden, dass beide Konzeptionen unabhängig voneinander motiviert werden können und prinzipiell unabhängig voneinander eingeführt werden können.

Vorbemerkungen

Weitere Bemerkungen:

1. Um die Argumente bei voller Allgemeinheit kurz zu halten, wird im Folgenden grundsätzlich von einer Sprache über der funktional-vollständigen Junktorenmenge $\{\wedge, \rightarrow, \bot\}$ ausgegangen.
2. Das folgende leicht einsichtige Argument wird in diesem Paragraphen wiederholt verwendet:

$$\text{Wenn } \Gamma \models \phi, \text{ dann } \Delta \cup \Gamma \models \phi.$$

Korrektheit

Proposition 1 (Korrektheit)

Für jede Ableitung $\mathfrak{D}$ mit Endformel ϕ gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$.

Beweis:

Durch Induktion über dem Aufbau der Ableitung $\mathfrak{D}$.

I. Induktionsanfang:

Es ist $\mathfrak{D} \doteq \phi$, d.h. $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \{\phi\}$ und Endformel von $\mathfrak{D}$ ist ϕ.

Trivialerweise gilt: $\phi \models \phi$.

Korrektheit

II. Induktionsvoraussetzung:

Die Aussage gelte bereits für Ableitungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$.

III. Induktionsschluss:

$$\mathfrak{D} \doteq \dfrac{\begin{array}{cc} \mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2 \\ \phi & \psi \end{array}}{\phi \wedge \psi}\ (\wedge I) \qquad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \cup \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_2)$$

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \models \phi$ und $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_2) \models \psi$.

Da $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_i) \subseteq \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$, gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$ und $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \psi$.

Daraus folgt sofort: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi \wedge \psi$.

Korrektheit

$$\mathfrak{D} \doteq \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1\\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\phi}\,(\wedge E_1) \qquad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$$

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \models \phi \wedge \psi$.

Mit $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ gilt schon: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi \wedge \psi$.

Also auch: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$.

$$\mathfrak{D} \doteq \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1\\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\psi}\,(\wedge E_2)$$

Analog!

Korrektheit

$$\mathfrak{D} \doteq \quad \dfrac{\begin{matrix} \mathfrak{D}_1 & & \mathfrak{D}_2 \\ \phi & & \phi \to \psi \end{matrix}}{\psi} \, (\to E) \qquad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \cup \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_2)$$

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \models \phi$ und $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_2) \models \phi \to \psi$.

Da $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_i) \subseteq \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$, gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$ und $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi \to \psi$.

Daraus folgt sofort: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \psi$.

Korrektheit

$$\mathfrak{D} \doteq \cfrac{\begin{array}{c}[\phi]^k \\ \mathfrak{D}_1 \\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi}\ (\to I{:}k)$$

Aufgrund der möglichen Löschung kann keine einfache Aussage über die Annahmenmengen getroffen werden.

Es sind folgende drei Fälle zu unterscheiden:

- Kein Vorkommen von ϕ in bisheriger Ableitung:
  $\phi \notin \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ und $\phi \notin \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.
- Ein Vorkommen von ϕ wurde nicht gelöscht:
  $\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ und $\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.
- Alle Vorkommen von ϕ wurden gelöscht:
  $\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ und $\phi \notin \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.

Korrektheit

$$\mathfrak{D} \doteq \cfrac{\begin{array}{c}[\phi]^k \\ \mathfrak{D}_1 \\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi}\ (\to I{:}k)$$

Aufgrund der möglichen Löschung kann keine einfache Aussage über die Annahmenmengen getroffen werden.

Jedenfalls gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \subseteq \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \cup \{\phi\}$.

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \models \psi$, und damit $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \cup \{\phi\} \models \psi$.

In allen drei Fällen folgt mittels Import-/Export-Theorem sofort: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi \to \psi$.

Falls $\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$, so gilt nach Anwendung des Theorems zunächst $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \setminus \{\phi\} \models \phi \to \psi$, aber nach Verdünnung $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi \to \psi$.

Korrektheit

$$\mathfrak{D} \doteq \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\phi \to \bot]^k \\ \mathfrak{D}_1 \\ \bot\end{array}}{\phi}\ (\mathsf{RAA}{:}k)$$

Analog zu oben sind wieder 3 Fälle zu unterscheiden:

- $(\phi \to \bot) \notin \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ und damit auch: $(\phi \to \bot) \notin \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$,
- $(\phi \to \bot) \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ und $(\phi \to \bot) \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$,
- $(\phi \to \bot) \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ und $(\phi \to \bot) \notin \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \models \bot$, also ist $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ nicht erfüllbar.

Korrektheit

$$\mathfrak{D} \;\doteq\; \dfrac{\begin{array}{c}[\phi \to \bot]^k \\ \mathfrak{D}_1 \\ \bot\end{array}}{\phi}\,(\mathrm{RAA}{:}k)$$

In den ersten beiden Fällen gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$.

Damit folgt aus der Unerfüllbarkeit von $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$.

Angenommen, es würde im dritten Fall gelten: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \not\models \phi$.

Dann gäbe es eine Belegung v derart, dass:

Für jedes $\psi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ gilt $[\![\psi]\!]_v = 1$, und $[\![\phi]\!]_v = 0$.

Korrektheit

$$\mathfrak{D} \doteq \cfrac{\begin{array}{c}[\phi \to \bot]^k \\ \mathfrak{D}_1 \\ \bot\end{array}}{\phi}\ (\mathsf{RAA}{:}k)$$

Insbesondere gilt dann auch: $[\![\phi \to \bot]\!]_v = 1$.

Da $\mathsf{Hyp}(\mathfrak{D}_1) = \mathsf{Hyp}(\mathfrak{D}) \cup \{\phi \to \bot\}$, wäre eine Belegung gefunden, die $\mathsf{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ erfüllt. WIDERSPRUCH.

Also doch: $\mathsf{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$.

Damit wurden alle möglichen Ableitungen betrachtet. Die Aussage ist gezeigt. $\square$

Korrektheit

Theorem 2 (Korrektheit von NK′)

Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *Menge von Aussagen und* $\phi \in \mathrm{PROP}$ *eine Formel.*

Wenn $\Gamma \vdash \phi$*, dann auch* $\Gamma \models \phi$*.*

<u>Beweis:</u>

Es gelte $\Gamma \vdash \phi$.

Nach Definition der Ableitbarkeit gilt: Es gibt eine Ableitung $\mathfrak{D}$ mit Endformel ϕ, wobei für die offenen Annahmen $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \Gamma$ gilt.

Mit dem Satz zur Korrektheit von Ableitungen gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$.

Daraus folgt direkt für $\Gamma \supseteq \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$: $\Gamma \models \phi$. $\square$

Konsistenz

Definition 3 (Konsistenz)

Eine (evtl. unendliche) Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ heißt *konsistent*, falls $\Gamma \nvdash \bot$.

Andernfalls heißt Γ *inkonsistent*.

Bemerkung:

Aus einer inkonsistenten Menge von Annahmen lässt sich die Absurdität herleiten, aus einer konsistenten nicht.

Konsistenz

Lemma 4 (Konsistenz)

Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *eine Menge von Aussagen. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

1. Γ *ist konsistent.*
2. *Es gibt keine Formel* $\phi \in \mathrm{PROP}$, *so dass:* $\Gamma \vdash \phi$ *und* $\Gamma \vdash \phi \to \bot$.
3. *Es gibt* $\phi \in \mathrm{PROP}$ *mit:* $\Gamma \nvdash \phi$.

Beweis:

Der Beweis verbleibt als leichte Übung. $\square$

Konsistenz erfüllbarer Mengen

Lemma 5 (Konsistenz erfüllbarer Mengen)

Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *eine Menge von Aussagen. Gibt es eine Belegung* v*, so dass für jedes* $\psi \in \Gamma$ *gilt:* $[\![\psi]\!]_v = 1$*, dann ist* Γ *konsistent.*

<u>Beweis:</u>

Sei v eine Belegung, so dass für jedes $\psi \in \Gamma$ gilt: $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Angenommen Γ ist inkonsistent, d.h. $\Gamma \vdash \bot$.

Konsistenz erfüllbarer Mengen

Dann gibt es eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$, so dass $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \phi \to \bot$.

Damit gilt mit der Korrektheit des Kalküls: $\Gamma \models \phi$ und $\Gamma \models \phi \to \bot$.

Damit muss nach der Definition der Folgerung für die gewählte Belegung v gelten:

$$[\![\phi]\!]_v = 1 \text{ und } [\![\phi \to \bot]\!]_v = 1$$

WIDERSPRUCH zur Definition von Bewertungen.

Also ist Γ doch konsistent. $\square$

Maximale Konsistenz

Definition 6 (Maximale Konsistenz)

Eine Menge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ heißt *maximal-konsistent*, falls Γ konsistent ist und für jede konsistente Obermenge $\Gamma' \supseteq \Gamma$ gilt, dass $\Gamma' = \Gamma$.

Bemerkung:

Eine maximal-konsistente Menge von Aussagen Γ hat keine echte konsistente Erweiterung.

D.h. dass wenn man zu Γ eine Aussage hinzufügt, die noch nicht in Γ enthalten ist, so ist die resultierende Menge inkonsistent.

Abzählbarkeit von PROP

Der im Folgenden wird wesentlich eine Abzählung von PROP benötigt. Diese kann z.B. wie folgt angegeben werden:

Zunächst wird jedem Zeichen des Alphabets fortlaufend eine natürliche Zahl größer 0 zugeordnet:

α	(	)	$\wedge$	$\rightarrow$	$\bot$	p_0	p_1	$\dots$
$N(\alpha)$	1	2	3	4	5	6	7	$\dots$

Damit können beliebige Formeln wie folgt kodiert werden:

$$K : \mathrm{PROP} \to \mathbb{N} : \phi \doteq \alpha_1\alpha_1 \dots \alpha_n \mapsto \prod_{k=1}^{n} \pi_k^{N(\alpha_k)}$$

Dabei ist π_k die k-te Primzahl.

Abzählbarkeit von PROP

Aufgrund der eindeutigen Lesbarkeit von Formeln ist diese Kodierung K wohldefiniert.

Aufgrund der eindeutigen Zerlegbarkeit einer natürlichen Zahl in ihre Primfaktoren injektiv.

Hieraus läßt sich eine Abzählung $f : \mathbb{N} \to \mathrm{PROP} : n \mapsto \phi_n$ gewinnen.

Genauer: Es läßt sich eine primitiv-rekursive Funktion g angeben, so dass $g(n)$ der Kode für die Formel ϕ_n ist.

Konsistente Erweiterbarkeit

Proposition 7 (Konsistente Erweiterbarkeit)

Jede konsistente Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *läßt sich zu einer maximal-konsistenten Menge* $\Gamma' \supseteq \Gamma$ *erweitern.*

Beweis:

Sei Γ konsistente Menge von Aussagen und $\{\phi_k \in \mathrm{PROP} : \ k \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von PROP.

Definiere nun rekursiv eine aufsteigende Folge von Formelmengen:

$$\Gamma_0 =_{\mathrm{def}} \Gamma \text{ und } \Gamma_{n+1} =_{\mathrm{def}} \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \text{falls } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \text{ konsistent} \\ \Gamma_n & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Konstruktion ist klar, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass Γ_n konsistent ist.

Konsistente Erweiterbarkeit

Setze nun: $\widehat{\Gamma} =_{\text{def}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$. Dann gilt:

1. $\widehat{\Gamma} \supseteq \Gamma$ ist konsistent.

   Angenommen nicht. Dann $\widehat{\Gamma} \vdash \bot$.

   Dann gibt es Ableitung $\mathfrak{D}$ mit $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \widehat{\Gamma}$ und Endformel $\bot$.

   Da $\text{Hyp}(\mathfrak{D})$ endlich ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\phi_k \in \text{Hyp}(\mathfrak{D})$ und für alle $l > k$ ist $\phi_l \notin \text{Hyp}(\mathfrak{D})$.

   Nach Konstruktion gilt: $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \Gamma_{k+1}$.

   Damit gilt aber: $\Gamma_{k+1} \vdash \bot$.

   Widerspruch zur Konsistenz von Γ_{k+1}.

   Also ist $\widehat{\Gamma}$ tatsächlich konsistent.

Konsistente Erweiterbarkeit

Setze nun: $\widehat{\Gamma} =_{\mathrm{def}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$. Dann gilt:

2. $\widehat{\Gamma}$ ist maximal.

   Angenommen nicht, dann gibt es ein $\phi_k \in \mathrm{PROP} \setminus \widehat{\Gamma}$, so dass $\widehat{\Gamma} \cup \{\phi_k\}$ konsistent ist.

   Damit ist aber auch $\Gamma_k \cup \{\phi_k\}$ konsistent und $\phi_k \in \Gamma_{k+1} \subseteq \widehat{\Gamma}$.

   Widerspruch zur Definition von Γ_{k+1}.

   Also ist $\widehat{\Gamma}$ maximal.

Insgesamt ist $\widehat{\Gamma}$ maximal-konsistent. $\square$

Inkonsistenz und Ableitbarkeit

Lemma 8

Sei $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ *beliebige Formelmenge. Dann gilt für jede Formel* $\phi \in \text{PROP}$*:*

1. *Wenn* $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\}$ *inkonsistent ist, dann gilt:* $\Gamma \vdash \phi$*.*
2. *Wenn* $\Gamma \cup \{\phi\}$ *inkonsistent ist, dann gilt:* $\Gamma \vdash \phi \to \bot$*.*

Inkonsistenz und Ableitbarkeit

Beweis:

1. Sei $\mathfrak{D}$ eine Ableitung für $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\} \vdash \bot$.

   Durch die weitere Anwendung der Regel (RAA) samt Löschung aller Prämissen $\phi \to \bot$ wird $\mathfrak{D}$ sofort zu einer Ableitung für $\Gamma \vdash \phi$.

2. Sei $\mathfrak{D}$ eine Ableitung für $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot$.

   Durch die weitere Anwendung der Regel $(\to I)$ samt Löschung aller Prämissen ϕ wird $\mathfrak{D}$ sofort zu einer Ableitung für $\Gamma \vdash \phi \to \bot$.

$\square$

Eigenschaften maximal-konsistenter Mengen

Korollar 9

Falls $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *maximal-konsistent ist, dann ist* Γ *unter Ableitbarkeit abgeschlossen. D.h.: Wenn* $\Gamma \vdash \phi$*, dann ist* $\phi \in \Gamma$*.*

Beweis:

Es gelte $\Gamma \vdash \phi$.

Angenommen $\phi \notin \Gamma$.

Dann ist aufgrund der Maximalität von Γ die Menge $\Gamma \cup \{\phi\}$ inkonsistent. Damit gilt mit Lemma 8: $\Gamma \vdash \phi \to \bot$.

Damit $\Gamma \vdash \bot$, d.h. Γ ist inkonsistent. WIDERSPRUCH.

Also doch: $\phi \in \Gamma$. $\square$

Eigenschaften maximal-konsistenter Mengen

Lemma 10 (Eigenschaften maximal-konsistenter Mengen)

Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *maximal-konsistent. Dann gilt für alle* $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$*:*

1. *Entweder* $\phi \in \Gamma$ *oder* $(\phi \rightarrow \bot) \in \Gamma$*.*
2. $(\phi \rightarrow \psi) \in \Gamma$ *genau dann, wenn* $\phi \notin \Gamma$ *oder* $\psi \in \Gamma$*.*
3. $(\phi \wedge \psi) \in \Gamma$ *genau dann, wenn* $\phi \in \Gamma$ *und* $\psi \in \Gamma$*.*

Eigenschaften maximal-konsistenter Mengen

Beweis von (1):

Aufgrund der Konsistenz von Γ ist es unmöglich, dass sowohl $\phi \in \Gamma$ als auch $(\phi \to \bot) \in \Gamma$.

Angenommen, $\phi \notin \Gamma$. Aufgrund der Abgeschlossenheit unter Ableitbarkeit gilt dann $\Gamma \nvdash \phi$.

Wäre $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\}$ inkonsistent, dann wäre nach Lemma 8: $\Gamma \vdash \phi$.

Also ist $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\}$ konsistent.

Aufgrund der Maximalität von Γ gilt: $(\phi \to \bot) \in \Gamma$.

Analog folgt aus $(\phi \to \bot) \notin \Gamma$, dass $\phi \in \Gamma$.

Eigenschaften maximal-konsistenter Mengen

Beweis von (2):

Es sind zwei Richtungen zu zeigen.

"$\Rightarrow$": Es gelte: $\phi \rightarrow \psi \in \Gamma$.

Sei $\phi \in \Gamma$. Dann gilt: $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$.

Damit folgt: $\Gamma \vdash \psi$.

Da Γ maximal-konsistent und damit unter Ableitbarkeit abgeschlossen ist, gilt damit auch: $\psi \in \Gamma$.

Eigenschaften maximal-konsistenter Mengen

"$\Leftarrow$": Hier ist zu unterscheiden, ob $\phi \in \Gamma$ oder $\phi \notin \Gamma$.

Falls $\phi \in \Gamma$, dann ist nach Voraussetzung $\psi \in \Gamma$. Damit gilt: $\Gamma \vdash \psi$.
Daraus folgt trivialerweise $\Gamma \vdash \phi \to \psi$, und damit: $(\phi \to \psi) \in \Gamma$.

Falls $\phi \notin \Gamma$, dann gilt mit (1): $(\phi \to \bot) \in \Gamma(\star)$
Betrachte nun folgende Ableitung $\mathfrak{D}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^1 \qquad \phi \to \bot}{\bot}}{\psi}\,(\mathrm{RAA})}{\phi \to \psi}\,(\to I{:}1)$$

Wegen $(\star)$ gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \{\phi \to \bot\} \subseteq \Gamma$.
Also ist gezeigt: $\Gamma \vdash \phi \to \psi$ und damit auch $(\phi \to \psi) \in \Gamma$.

Eigenschaften maximal-konsistenter Mengen

Beweis von (3):

Verbleibt als leichte Übung.

Insgesamt ist das Lemma gezeigt. $\square$

Erfüllbarkeit konsistenter Mengen

Lemma 11

Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *konsistent. Dann gibt es eine Belegung* v*, so dass für jedes* $\psi \in \Gamma$ *gilt:* $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Beweis:

Sei $\widehat{\Gamma} \supseteq \Gamma$ eine maximal-konsistente Erweiterung von Γ.

Die Belegung v wird definiert durch:

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in \widehat{\Gamma} \\ 0 & \text{falls } p \notin \widehat{\Gamma} \end{cases}$$

Erfüllbarkeit konsistenter Mengen

Falls für jedes $\phi \in \mathrm{PROP}$ gilt:

$$[\![\phi]\!]_v = 1 \text{ genau dann, wenn } \phi \in \widehat{\Gamma}, \quad (\star)$$

dann ist damit auch eine Belegung v gefunden unter der für jedes $\psi \in \Gamma \subseteq \widehat{\Gamma}$ gilt: $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Zeige $(\star)$ durch Induktion über dem Aufbau von ϕ.

<u>I. Induktionsanfang:</u>

$\bot$: $[\![\bot]\!]_v = 0$ und $\bot \notin \widehat{\Gamma}$.

p: $[\![p]\!]_v = 1$ genau dann, wenn $v(p) = 1$
genau dann, wenn $p \in \widehat{\Gamma}$.

Erfüllbarkeit konsistenter Mengen

II. Induktionsvoraussetzung:

Die Behauptung gelte für ψ und χ.

III. Induktionsschluss:

$(\psi \to \chi)$: $[\![\psi \to \chi]\!]_v = 1$ genau dann, wenn $[\![\psi]\!]_v = 0$ oder $[\![\chi]\!]_v = 0$
genau dann, wenn $\psi \notin \widehat{\Gamma}$ oder $\chi \in \widehat{\Gamma}$
genau dann, wenn $(\psi \to \chi) \in \widehat{\Gamma}$ nach Lemma 10 (2).

$(\psi \wedge \chi)$: $[\![\psi \wedge \chi]\!]_v = 1$ genau dann, wenn $[\![\psi]\!]_v = 1$ und $[\![\chi]\!]_v = 1$
genau dann, wenn $\psi \in \widehat{\Gamma}$ und $\chi \in \widehat{\Gamma}$
genau dann, wenn $\phi \wedge \psi \in \widehat{\Gamma}$ nach Lemma 10 (3).

$\square$

Erfüllbarkeit konsistenter Mengen

Lemma 12

Für ein konsistentes $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *und* $\phi \in \mathrm{PROP}$ *gilt* $\Gamma \nvdash \phi$ *genau dann, wenn es eine Belegung* v *gibt, so dass für jedes* $\psi \in \Gamma$ *gilt:*

$$[\![\psi]\!]_v = 1 \textit{ und } [\![\phi]\!]_v = 0$$

<u>Beweis:</u>

$\Gamma \nvdash \phi$ genau dann, wenn $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\}$ konsistent. $\square$

Vollständigkeit von NK'

Theorem 13 (Vollständigkeit von NK')

Für jede Menge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *und Aussage* $\phi \in \mathrm{PROP}$ *gilt:*

Wenn $\Gamma \models \phi$*, dann auch* $\Gamma \vdash \phi$*.*

<u>Beweis:</u>

Angenommen, es gelte $\Gamma \nvdash \phi$. Daraus folgt: $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\} \nvdash \bot$.

Damit ist $\Gamma \cup \{\phi \to \bot\}$ erfüllbar und es gilt: $\Gamma \not\models \phi$. $\square$

Vollständigkeit von NK′

Korollar 14 (Endlichkeitssatz)

Falls $\Gamma \models \phi$*, dann gibt es endliches* $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *mit* $\Gamma' \models \phi$*.*

Beweis:

Direkte Folge aus der Vollständigkeit von NK′ und der Tatsache, dass für jede Ableitung $\mathfrak{D}$ gilt, dass $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ endlich ist. $\square$

Vollständigkeit von NK′

Korollar 15 (Kompaktheitssatz)

$\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge* $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *erfüllbar ist.*

Beweis:

Es müssen zwei Richtungen gezeigt werden:

“$\Rightarrow$”: trivial.

Vollständigkeit von NK$'$

"$\Leftarrow$": Angenommen, Γ sei nicht erfüllbar.

Dann ist $\Gamma \models \bot$, und damit, aufgrund der Vollständigkeit von NK$'$, auch $\Gamma \vdash \bot$.

Damit gibt es endlichhes $\Gamma' \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma' \vdash \bot$.

Dafür gilt aber: $\Gamma' \models \bot$.

Also ist Γ' nicht erfüllbar. WIDERSPRUCH.

Also ist Γ doch erfüllbar.

$\square$