Mathematische Logik I

— Foliensatz 11 —

Dr. Michael Arndt

Wintersemester 2014/15

Vorbemerkungen

Der Kalkül des Natürlichen Schließens wird in diesem Abschnitt auf die Quantorenlogik erweitert.

Es werden formal wieder mehrere verschiedene Kalküle eingeführt, die sich durch die verwendeten Schlussregeln unterscheiden.

Die Unterkalküle werden mittels Ihrer Kürzel voneinander unterschieden: NK', NK, $\mathsf{NK}'_{\doteq}$, $\mathsf{NK}_{\doteq}$.

All diese Kalküle werden als Kalküle des Natürlichen Schließens bezeichnet.

Erweiterung des aussagenlogischen Kalküls

Der Kalkül aus der Aussagenlogik wird hier erweitert.

Das bedeutet, dass alle Schlussregeln für Junktoren aus der Aussagenlogik unverändert übernommen werden.

Sätze, in denen lediglich über Junktoren gesprochen wurde, können aus der Aussagenlogik direkt in die Quantorenlogik übertragen werden und bleiben damit hier erhalten.

Unterschiedliche Kalküle

Die verschiedenen Kalküle werden alle für formale Sprachen $\mathfrak{L}$ mit beliebiger Signatur $\langle \sigma, \tau, I \rangle$ definiert.

Je nachdem, welche logischen Zeichen in der Sprache vorkommen und für welche Zeichen Schlussregeln im Kalkül existieren, werden die verschiedenen Kalküle benannt.

NK′ Für formale Sprachen mit den Junktoren $\wedge$, $\rightarrow$ und $\perp$ und dem Quantor $\forall$. Nur für diese logischen Zeichen gibt es Schlussregeln im Kalkül.

Das Gleichheitszeichen gehört zwar zur Sprache, aber es gibt keine Schlussregeln für die Identität im Kalkül.

Die Junktoren $\neg$, $\vee$ und $\leftrightarrow$ sowie der Existenzquantor $\exists$ werden, als Abkürzungen verstanden, z.B. $\exists x \phi \doteq_{\mathrm{def}} \neg \forall x \neg \phi$.

Unterschiedliche Kalküle

NK Für formale Sprachen mit den Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ und $\perp$ und den Quantoren $\exists$ und $\forall$. Wieder stehen im Kalkül für all diese logischen Zeichen Schlussregeln zur Verfügung. Das Gleichheitszeichen gehört zwar zur Sprache, aber es gibt keine Schlussregeln für die Identität im Kalkül.

Zu beachten ist: Die Junktoren $\neg$, $\vee$ und $\leftrightarrow$ sowie der Quantor $\exists$ sind im Rahmen dieses Kalküls keine Abkürzungen, sondern gehören genuin zur formalen Sprache dazu.

So gilt etwa: $\exists x \phi \neq \neg \forall x \neg \phi$.

$\mathrm{NK}'_{\doteq}$ Wie NK$'$, wobei zusätzlich Regeln für die Identität zum Kalkül gehören.

$\mathrm{NK}_{\doteq}$ Wie NK, wobei zusätzlich Regeln für die Identität zum Kalkül gehören.

Verhältnis von Regeln und Abkürzungen

Gehören die Schlussregeln bzgl. eines logischen Zeichens (hier Junktor oder Quantor) zum betrachteten Kalkül, dann wird das Zeichen als zur Sprache gehörend aufgefaßt.

In diesem Fall muss die gegenseitige Ableitbarkeit zwischen Formel und gewohnter Abkürzung – die dann keine ist – bewiesen werden.

Stehen die Regeln im Kalkül nicht zur Verfügung, dann handelt es sich um echte Abkürzungen.

In diesem Fall ist die gegenseitige Ableitbarkeit trivial. Das Gelten der gewohnten Schlussregeln hingegen muss bewiesen werden.

Weitergehende Definitionen

Die auf den Schlussregeln eines Kalküls aufbauenden Definitionen (etwa: Ableitung, Hypothesenmenge oder Ableitbarkeit) müssen für jeden neuen Kalkül in Abhängigkeit der dort vorhandenen Schlussregeln separat definiert werden.

Diese Definitionen erfolgen völlig schematisch analog zu den entsprechenden Definitionen in der Aussagenlogik.

Entsprechend werden diese Definitionen hier nicht jeweils explizit angegeben, sondern als gegeben vorausgesetzt.

Konvention für die Notation von Ableitungen

Gelegentlich wird ein gestrichelter Schlussstrich mit $(\doteq)$ markiert:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathfrak{D}\\ \exists x\phi\end{matrix}}{\neg\forall x\neg\phi}\;(\doteq)$$

Dies geschieht, um im Aufschrieb der Ableitung zwischen verschiedenen Schreibweisen einer Formel (etwa abkürzende und explizite Schreibweise) zu wechseln.

Tatsächlich umfasst der Kalkül *keine* Regel $(\doteq)$, und in einer Ableitung findet an solchen Stellen *kein* eigentlicher Schluss statt. Es handelt sich hierbei lediglich um eine Leseerleichterung.

Wichtigkeit von Variablen

Aufgrund der Formulierung der Regeln ist eine gewisse Vorsicht beim Umgang mit den Variablen gefordert.

Bei gewissen Regeln $(\forall I)$, $(\exists E)$ ist zwingend darauf zu achten, dass bestimmte Variablen nicht frei in den Annahmen der Teilherleitungen vorkommen, bei $(\exists E)$ zusätzlich, dass diese nicht mehr in der Konklusion der Regel vorkommen.

Bei gewissen Regeln $(\forall E)$, $(\exists I)$ werden Terme t substituiert. Dabei muss darauf geachtet werden, dass freie Einsetzbarkeit gewährleistet ist, d.h. dass keine freie Variable gebunden wird.

Anwendungen solcher Regeln unter Verstoss gegen diese Bedingungen sind unzulässig und machen die Ableitung nichtig.

Regeln für die Quantoren

Definition 1 (Regeln für die Quantoren)

1. Einführung des Allquantors:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \phi(y)\end{array}}{\forall x\,\phi(x)}\,(\forall I)$$

   Dabei muss für alle $\chi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ gelten: $y \notin \mathrm{FV}(\chi)$.

2. Beseitigung des Allquantors:

$$\dfrac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)}\,(\forall E)$$

   Dabei muss t in der Formel $\phi(x)$ frei einsetzbar für x sein.

Regeln für die Quantoren

Beispiel:

Sei $\mathfrak{D}$ eine Ableitung, in der y nicht frei in $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$ vorkommt. Dann ist folgendes eine richtige Anwendung der Regel ($\forall$I):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ y \doteq z\end{array}}{\forall x(x \doteq z)}\ (\forall I)$$

Die quantifizierte Formel gibt vor, wie die Formel ϕ aussieht. Im diesem Fall ist $\phi \doteqdot (x \doteq z)$ und man schließt von $\phi(y)$ auf $\forall x \phi(x)$.

Regeln für die Quantoren

Bemerkung:

Ohne Verwendung der vereinfachenden Notation müssen die Regeln folgendermaßen geschrieben werden:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \phi[y/x]\end{array}}{\forall x \phi}\ (\forall I) \qquad \text{statt} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \phi(y)\end{array}}{\forall x\, \phi(x)}\ (\forall I)$$

$$\dfrac{\forall x \phi}{\phi[t/x]}\ (\forall E) \qquad \text{statt} \qquad \dfrac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)}\ (\forall E)$$

Regeln für die Quantoren

Definition 1 (Regeln für die Quantoren (Forts.))

3. Einführung des Existenzquantors:

$$\frac{\phi(t)}{\exists x \phi(x)}\ (\exists I)$$

Dabei muss t in der Formel $\phi(x)$ frei einsetzbar für x sein.

4. Beseitigung des Existenzquantors:

$$\frac{\exists x \phi(x) \qquad \begin{array}{c}[\phi(y)]\\ \mathfrak{D}\\ \psi\end{array}}{\psi}\ (\exists E)$$

Dabei muss für alle $\chi \in \big(\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \setminus \{\phi(y)\}\big) \cup \{\psi\}$ gelten: $y \notin \mathrm{FV}(\chi)$.

Regeln für die Quantoren

Beispiel:

$$\frac{\forall y(t \doteq y \to y \doteq t)}{\exists x \forall y(x \doteq y \to y \doteq x)}\ (\exists I)$$

In der Formel $\phi(x) \doteq_{\text{def}} \forall y(x \doteq y \to y \doteq x)$ ist der Term t frei einsetzbar für x. Entsprechend darf man von der Prämisse $\phi(t)$ aus schließen.

Anstatt von $\phi(t)$ hätte man auch von $\phi(x)$ aus schließen können, da in $\phi(x)$ auch x frei einsetzbar ist.

Regeln für die Quantoren

Bemerkung:

Ohne Verwendung der vereinfachenden Notation müssen die Regeln folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x \phi}\,(\exists I) \qquad \text{statt} \qquad \frac{\phi(t)}{\exists x \phi(x)}\,(\exists I)$$

$$\frac{\exists x \phi \qquad \begin{array}{c}[\phi[y/x]] \\ \mathfrak{D} \\ \psi\end{array}}{\psi}\,(\exists E) \qquad \text{statt} \qquad \frac{\exists x \phi(x) \qquad \begin{array}{c}[\phi(y)] \\ \mathfrak{D} \\ \psi\end{array}}{\psi}\,(\exists E)$$

Die Kalküle NK und NK$'$

Definition 2 (Die Kalküle NK und NK$'$)

Der Kalkül NK$'$ umfasst die folgenden Schlussregeln:

- den Schlussregeln für die Junktoren $\wedge, \rightarrow$ und RAA;
- den Schlussregeln für den Quantor $\forall$.

Der Kalkül NK umfasst die folgenden Schlussregeln:

- den Schlussregeln für die Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ und RAA;
- den Schlussregeln für die Quantoren $\forall$ und $\exists$.

Die Kalküle NK und NK$'$

Semantisch kann der Existenzquantor durch den Allquantor und die Negation ausgedrückt werden. Im Folgenden dieser Zusammenhang im Kalkül des Natürlichen Schließens diskutiert. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. In NK gehört der Existenzquantor genuin zum Alphabet der formalen Sprache und hat eigene Schlussregeln. Auf dieser Grundlage wird im Kalkül NK gezeigt:

   $$\exists x \phi \dashv\vdash \neg\forall x \neg\phi \quad \text{sowie} \quad \forall x \phi \dashv\vdash \neg\exists x \neg\phi$$

2. In NK$'$ ist der Existenzquantor eine abkürzende Schreibweise. Die Formel $\exists x \phi$ kürzt die Formel $\neg\forall x \neg\phi$ ab. Hier stehen die Schlussregeln für den Existenzquantor im Kalkül NK$'$ nicht zur Verfügung und müssen entsprechend bewiesen werden.

Die Kalküle NK und NK$'$

Theorem 3 (Genuiner Existenzquantor)

Gehört der Existenzquantor genuin zur Sprache $\mathfrak{L}$ und stehen seine Schlussregeln zur Verfügung, dann gilt für beliebige $\mathfrak{L}$-Formeln ϕ und Variablen x im Kalkül NK*:*

1. $\exists x\phi \dashv\vdash \neg\forall x\neg\phi$
2. $\forall x\phi \dashv\vdash \neg\exists x\neg\phi$

Die Kalküle NK und NK′

Theorem 4 (Existenzquantor als Abkürzung)

Ist der Existenzquantor eine abkürzende Schreibweise, dann sind die Schlussregeln für den Existenzquantor gültig. Es gilt also im Kalkül NK′*:*

1. *Sei* $\phi(x)$ *eine* $\mathfrak{L}$*-Formel, so dass ein Term* t *frei in* ϕ *für eine Variable* x *einsetzbar ist. Dann gilt:* $\phi(t) \vdash \exists x \phi(x)$.
2. *Sei* $\phi(x)$ *eine* $\mathfrak{L}$*-Formel. Desweiteren sei* $\Gamma \cup \{\chi\} \subseteq \mathfrak{L}$ *Formelmenge mit:* y *ist eine Variable, die in keiner Formel* $\psi \in \Gamma \cup \{\chi\}$ *frei vorkommt, und es gilt* $\Gamma, \phi(x) \vdash \chi$ *vermöge einer Ableitung* $\mathfrak{D}_\chi$*. Dann gilt auch:* $\Gamma, \exists x \phi(x) \vdash \chi$.

Bemerkungen:

1. Die letzten beiden Theoreme zeigen, dass wir in der Praxis nicht unterscheiden müssen, ob der Existenz-Quantor genuin zur Sprache gehört oder nicht.

   Wir werden jeweils von dem Fall ausgehen, der einfacheres Arbeiten verspricht. So werden wir bei Induktionen über Formel- und Beweisaufbau zumeist von Abkürzungen ausgehen, bei konkreten Ableitungen die Schlußregeln dennoch verwenden.

2. Ebenfalls gilt Theorem 10.12 analog, wenn man „$\Dashv\models$“ durch „$\dashv\vdash$“ ersetzt und auf NK$'$ bzw. NK bezieht.

Regeln für die Identität

Definition 5 (Regeln für die Identität)

Für das Gleichheitszeichen gelten folgende Regeln:

1. Reflexivität:

   $$\frac{}{t \doteq t}\ (IR_1)$$

   Dabei ist t ein beliebiger Term.

2. Symmetrie:

   $$\frac{t \doteq s}{s \doteq t}\ (IR_2)$$

   Dabei sind s, t beliebige Terme.

Regeln für die Identität

Definition 5 (Regeln für die Identität (Forts.))

3. Transitivität:

$$\frac{s \doteq r \qquad r \doteq t}{s \doteq t} \; (IR_3)$$

   Dabei sind s, t, r beliebige Terme.

4. Einsetzbarkeit (Substitutivität) in Terme:

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \dots \quad t_n \doteq s_n}{t[\vec{t}/\vec{z}\,] \doteq t[\vec{s}/\vec{z}\,]} \; (IR_4)$$

   Dabei sind $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n$ beliebige Terme.

Regeln für die Identität

Definition 5 (Regeln für die Identität (Forts.))

5. Einsetzbarkeit (Substitutivität) in Formeln:

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \ldots \quad t_n \doteq s_n \qquad \phi(\vec{t})}{\phi(\vec{s})}\ (IR_5)$$

Bemerkung:

Dabei sind $t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n$ Terme, deren freie Einsetzbarkeit in der Formel ϕ vorausgesetzt ist.

Es soll aber eigentlich nicht gefordert sein, dass der Term t_i an jedem freien Vorkommen durch s_i ersetzt wird $(1 \leq i \leq n)$.

Regeln für die Identität

Definition 5 (Regeln für die Identität (Forts.))

5. Einsetzbarkeit (Substitutivität) in Formeln

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \ldots \quad t_n \doteq s_n \qquad \phi[\vec{t}/\vec{z}\,]}{\phi[\vec{s}/\vec{z}\,]}\ (IR_5)$$

Bemerkung:

Man muss eine Formel ϕ rekonstruieren, so dass $\phi[\vec{t}/\vec{z}\,]$ zur Prämisse wird und $\phi[\vec{s}/\vec{z}\,]$ zur Konklusion.

Dabei können in ϕ durchaus schon einige der Terme t_i vorkommen. Das sind gerade diejenigen, die nicht ersetzt werden sollen.

Regeln für die Identität

Bemerkung:

Die Regel (IR_1) ist die einzige Schlussregel im Kalkül des Natürlichen Schließens, die keine Prämissen hat.

Damit kann diese Regel als Axiom (genauer: Axiom-Schema) angesehen werden.

Damit zeigt die folgende Ableitung $\vdash \forall x(x \doteq x)$:

$$\dfrac{\dfrac{}{x \doteq x}\,(IR_1)}{\forall x(x \doteq x)}\,(\forall I)$$

Die Alleinführung ist erlaubt, da es wegen (IR_1) keine offenen Annahmen gibt, in denen x frei vorkommt.

Redundanz von Regeln

Proposition 6

Die Schlussregeln (IR_2) und (IR_3) sind durch Anwendungen von (IR_1) und (IR_5) herleitbar.

Bemerkung:

Diese Eigenschaft besagt, dass wir eigentlich “zuviele” Regeln für die Identität eingeführt haben.

Die allgemeine Substitutivität (IR_5) ist so stark, dass sich zwei wesentliche charakteristischen Eigenschaften der Identität, Symmetrie und Transitivität, daraus ableiten lassen.

Da diese beiden Eigenschaften jedoch regelmäßig verwendet werden, verwendet man die ableitbaren Regeln dennoch.

Redundanz von Regeln

<u>Beweis:</u>

Redundanz von (IR_2).

Seien t und s beliebige Terme, x eine Variable, die nicht in t vorkommt.

Setze $\phi(x) \hat{=}_{\mathrm{def}} (x \doteq t)$.

Die Terme t und s sind in ϕ frei einsetzbar für x und es gilt:

$$\phi(t) \hat{=} \phi[t/x] \hat{=} (t \doteq t) \quad \text{und} \quad \phi(s) \hat{=} \phi[s/x] \hat{=} (s \doteq t)$$

Die Behauptung folgt mit folgendem Ableitungsbaum:

$$\dfrac{t \doteq s \qquad \dfrac{}{\phi(t)}\,(IR_1)}{\phi(s)}\,(IR_5) \qquad \hat{=} \qquad \dfrac{t \doteq s \qquad \dfrac{}{t \doteq t}\,(IR_1)}{s \doteq t}\,(IR_5)$$

Redundanz von Regeln

Redundanz von (IR_3).

Seien t, s, r beliebige Terme, x eine Variable, die nicht in r vorkommt.

Setze $\phi(x) \doteq_{\mathrm{def}} (x \doteq t)$.

Die Terme s und t sind in ϕ frei einsetzbar für x und es gilt:

$$\phi(r) \doteq \phi[t/x] \doteq (r \doteq t) \quad \text{und} \quad \phi(s) \doteq \phi[s/x] \doteq (s \doteq t)$$

Die Behauptung folgt mit folgendem Ableitungsbaum:

$$\dfrac{\dfrac{s \doteq r}{r \doteq s}\,(IR_2) \qquad \phi(r)}{\phi(s)}\,(IR_5) \quad \doteq \quad \dfrac{\dfrac{s \doteq r}{r \doteq s}\,(IR_2) \qquad r \doteq t}{s \doteq t}\,(IR_5)$$

□

Redundanz von Regeln

Bemerkung:

Die Regel (IR_1) kann auf Terme t beschränkt werden, die entweder eine Variable x oder eine Konstante c sind.

Für aus Funktionszeichen zusammengesetzte Terme t ergibt sich mit der Regel (IR_4) $\vdash t \doteq t$.

Würde man zudem bei (IR_4) Konstanten als 0-stellige Funktionszeichen zulassen, dann kann die Regel (IR_1) auf Variablen x eingeschränkt werden.

Die Kalküle $\mathsf{NK}_{\doteq}$ und $\mathsf{NK}'_{\doteq}$

Definition 7 (Die Kalküle $\mathsf{NK}_{\doteq}$ und $\mathsf{NK}'_{\doteq}$)

Der Kalkül $\mathsf{NK}'_{\doteq}$ umfasst die folgenden Schlussregeln:

- den Schlussregeln für die Junktoren $\wedge, \rightarrow$ und RAA;
- den Schlussregeln für den Quantor $\forall$;
- den Schlussregeln für die Identität $\doteq$.

Der Kalkül $\mathsf{NK}_{\doteq}$ umfasst die folgenden Schlussregeln:

- den Schlussregeln für die Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ und RAA;
- den Schlussregeln für die Quantoren $\forall$ und $\exists$;
- den Schlussregeln für die Identität $\doteq$.

Korrektheit von NK$'$

Theorem 8 (Korrektheit von NK$'$)

Für jede Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ und jede Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ gilt:
Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann $\Gamma \models \phi$.

<u>Beweis:</u>

Betrachte zunächst folgende Aussage:

$$\text{Für jede Ableitung } \begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \phi\end{array} \text{ gilt: } \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi.$$

Zeige dies durch Induktion über den Aufbau von Beweisen:

Korrektheit von NK$'$

I. Induktionsanfang:

$\mathfrak{D} \doteq \phi$: Damit $\phi \in$ Hyp($\mathfrak{D}$), und die Aussage gilt trivialerweise.

II. Induktionsvoraussetzung:

Die Behauptung $(*)$ gelte für die Ableitungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$.

III. Induktionsschluss:

Wir fassen die Konjunktion zur Vereinfachung als definiert auf.

Es gibt daher vier Fälle zu unterscheiden.

Korrektheit von NK′

$$\mathfrak{D} \doteq \dfrac{\begin{array}{cc} \mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2 \\ \phi & \phi \to \psi \end{array}}{\psi}\,(\to E) \qquad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \cup \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_2)$$

Zu zeigen ist: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \psi$.

Sei $\mathfrak{A}$ beliebige $\mathfrak{L}$-Struktur, v eine Belegung mit: $\mathfrak{A} \models_v \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.

Nach IV gilt: $\mathfrak{A} \models_v \phi$ und $\mathfrak{A} \models_v \phi \to \psi$.

Damit gilt schon: $\mathfrak{A} \models_v \psi$.

Also gilt für jede $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Belegung v:

$$\text{Wenn } \mathfrak{A} \models_v \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}), \text{ dann } \mathfrak{A} \models_v \psi.$$

Damit gilt aber schon: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \psi$.

Korrektheit von NK′

$$\mathfrak{D} \doteq \cfrac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \mathfrak{D}_1\\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi}\,(\to I) \qquad \text{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \text{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$$

Angenommen $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \not\models \phi \to \psi$.

Dann gibt es eine $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ und eine Belegung v mit:
$\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathfrak{D})$ und $\mathfrak{A} \not\models_v \phi \to \psi$.

Damit gilt insbesondere: $\mathfrak{A} \models_v \phi$ und $\mathfrak{A} \not\models_v \psi$.

Mit $\text{Hyp}(\mathfrak{D}_1) \subseteq \text{Hyp}(\mathfrak{D}) \cup \{\phi\}$ folgt daraus: $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$.

Aus der IV folgt damit: $\mathfrak{A} \models_v \psi$. WIDERSPRUCH!

Also doch: $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi \to \psi$.

Korrektheit von NK′

$$\mathfrak{D} \doteq \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1\\ \phi(y)\end{array}}{\forall x \phi(x)}\,(\forall I) \qquad \text{Hyp}(\mathfrak{D}) = \text{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$$

Angenommen $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) \not\models \forall x \phi(x)$.

Das bedeutet, dass es eine $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ und eine Belegung v gibt mit: $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathfrak{D})$ und $\mathfrak{A} \not\models_v \forall x \phi(x)$.

Aus letzterem folgt, dass es ein $a \in A$ gibt mit: $[\![\phi(x)]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x \mapsto a]} = 0$.

Mit Überführungslemma: $[\![\phi(y)]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[y \mapsto a]} = 0$. $\quad (\star)$

Aufgrund der Schlussregeln gilt für jedes $\chi \in \text{Hyp}(\mathfrak{D})$: $y \notin \text{FV}(\chi)$.

Mit $\text{Hyp}(\mathfrak{D}) = \text{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$ gilt $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(D_1)$, und mit dem Koinzidenzlemma folgt daraus: $\mathfrak{A} \models_{v[y \mapsto a]} \text{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$.

Also mit IV: $\mathfrak{A} \models_{v[y \mapsto a]} \phi(y)$. WIDERSPRUCH zu $(\star)$.

Korrektheit von NK′

$$\mathfrak{D} \doteq \dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{D}_1\\ \forall x \phi(x)\end{array}}{\phi(t)}\,(\forall E) \qquad \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}_1)$$

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \forall x \phi(x)$.

Sei t beliebiger Term, der für x frei einsetzbar ist in $\phi(x)$.

Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ eine $\mathfrak{L}$-Struktur und v eine Belegung mit:
$\mathfrak{A} \models_v \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D})$.

Nach IV gilt: $\mathfrak{A} \models_v \forall x \phi(x)$.

Also $[\![\phi(x)]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x \mapsto a]} = 1$ für jedes $a \in A$, also auch für $a = [\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_v \in A$.

Mit dem Überführungs-Lemma gilt damit:
$1 = [\![\phi(x)]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x \mapsto [\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_v]} = [\![\phi(t)]\!]^{\mathfrak{A}}_v$

Damit gilt schon: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi(t)$.

Korrektheit von NK$'$

Insgesamt wurde damit gezeigt:

$$\text{Für jede Ableitung } \begin{array}{c}\mathfrak{D}\\ \phi\end{array} \text{ gilt: } \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi.$$

Zeige nun die eigentliche Aussage:

Es gelte $\Gamma \vdash \phi$.

Also gibt es eine Ableitung $\mathfrak{D}$, die dies zeigt.

Insbesondere gilt dann auch: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \vdash \phi$.

Nach der oben gezeigten Aussage gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \models \phi$.

Aus $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}) \subseteq \Gamma$ folgt schließlich: $\Gamma \models \phi$.

Damit ist die Korrektheit des Kalküls gezeigt. $\square$

Korrektheit von NK'

Bemerkungen:

1. Der Kalkül NK ist ebenfalls korrekt.
2. Die Kalküle $\mathrm{NK}_{\doteq}$ und $\mathrm{NK}'_{\doteq}$ sind ebenfalls korrekt, da die Axiome und Regeln für die Gleichheit aufgrund der „inhaltlichen“ (metasprachlichen) Identität auch semantisch gültig sind.

Substitutionssatz (für NK$'$)

Theorem 9 (Substitutionssatz für NK$'$)

Es sei $\Gamma \subset \mathfrak{L}$ eine Formel-Menge, $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Formel und t ein beliebiger Term, der für eine Variable x in ϕ frei einsetzbar ist.

Dann gilt: Wenn $\Gamma \vdash_{\mathsf{NK}'} \phi$, dann $\Gamma[t/x] \vdash_{\mathsf{NK}'} \phi[t/x]$.

Bemerkung:

Das Theorem ist auch für die Kalküle NK, $\mathsf{NK}_{\doteq}$ und $\mathsf{NK}'_{\doteq}$ gültig.