Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 7**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Geben Sie die Signaturen folgender Strukturen an:

a) $\langle \mathbb{R}, <, T, +, \cdot^2, |\cdot|, - \rangle$, wobei $T(a,b,c)$ die Relation "b liegt zwischen a und c", $\cdot^2$ die Quadratfunktion und $|\cdot|$ der Absolutbetrag ist

b) $\langle \mathbb{R}, 1 \rangle$

c) $\langle \mathbb{R} \rangle$

d) $\langle \{0,1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, 0, 1 \rangle$, wobei $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ Funktionen gemäß den Wahrheitstafeln sind

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Alphabet für Sprachen folgender Signaturen an:

a) $\langle 3; 1, 1, 2; 0 \rangle$

b) $\langle -; 2; 0 \rangle$

c) $\langle 1; -; 3 \rangle$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Prüfen Sie, welche der folgenden Terme frei für die genannten Variablen in den genannten Formeln sind. Geben Sie im negativen Fall den Grund an, und führen Sie im positiven Fall die entsprechende Substitution durch. Vorausgesetzt ist eine Sprache mit zweistelligen Funktionszeichen $+$ und Konstantenzeichen 0.

a) $x + y$ für y in $z \doteq 0$

b) $0 + y$ für y in $\exists x (y \doteq x)$

c) $x + y$ für z in $\forall w (x + z \doteq 0) \wedge \exists y (z \doteq x)$

d) $x + y$ für z in $\forall u (u \doteq v) \rightarrow \forall z (z \doteq y)$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{A}$ die Struktur aus Aufgabe 1 a), und sei eine Sprache der entsprechenden Signatur gegeben, deren Konstantenzeichen genauso lauten wie die korrespondierenden Funktionen und Prädikate der Struktur. Weiterhin sei $v(x_1) = \sqrt{3}$, $v(x_2) = -5$ und $v(x_3) = -2$. Werten Sie schrittweise aus:

a) $[\![\, |(x_1)^2 + x_2| \,]\!]_v^{\mathfrak{A}}$

b) $[\![\, x_3 + -(x_3) \,]\!]_v^{\mathfrak{A}}$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{A}$ die Struktur aus Aufgabe 1 d), und sei eine Sprache der entsprechenden Signatur gegeben, deren Konstantenzeichen $\dot\wedge$, $\dot\vee$, $\dot\rightarrow$, $\dot\neg$, $\dot 0$ und $\dot 1$ lauten. Weiterhin sei $v(x_1) = 0$ und $v(x_2) = 1$. Werten Sie schrittweise aus:

a) $[\![\, (x_2 \dot\rightarrow x_1) \dot\rightarrow \dot\neg x_1 \,]\!]_v^{\mathfrak{A}}$

b) $[\![\, x_2 \dot\rightarrow \dot\neg(\dot\neg \dot 0 \,\dot\vee\, x_2) \,]\!]_v^{\mathfrak{A}}$