Mathematische Logik I – Übungsaufgaben **Blatt 10**

Dr. Michael Arndt **WS 2015/16**

Aufgabe 1 (1+2+2 Punkte)

Es seien $\phi, \psi, \chi \in \mathcal{L}$ beliebige Formeln, und x eine Variable mit $x \notin \mathrm{FV}(\chi)$. Zeigen Sie, dass die folgenden logischen Äquivalenzen bestehen:

a) $\forall x \chi \;=\!\!|\!\!\models\; \chi$

b) $\forall x(\chi \vee \phi) \;=\!\!|\!\!\models\; (\chi \vee \forall x \phi)$

c) $\forall x(\psi \wedge \phi) \;=\!\!|\!\!\models\; (\forall x \psi \wedge \forall x \phi)$

Aufgabe 2 (1 Punkt)

Geben Sie entsprechende logische Äquivalenzen für den Existenzquantor an.

Aufgabe 3 (1 Punkt)

Erläutern Sie im Detail, was diese logischen Äquivalenzen für die Verallgemeinerung von Theorem 10.14 auf Formeln, in denen alle bisher verwendeten Junktoren vorkommen dürfen, bedeutet.

Hinweis: Welche Rolle spielt dabei die besondere Form der Äquivalenz in Teilaufgabe 1c)?

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Formen Sie die folgende Formel schrittweise in eine pränexe Normalform um:

$$\big(\forall x \phi(x) \to \forall y\big(\psi(y) \to \exists x \phi(x)\big)\big) \to \forall x \exists y\big(\chi(x,y) \to \big(\forall y \psi(y) \to \bot\big)\big)$$

Dabei seien ϕ, ψ und χ quantorenfrei.

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte)

Zeigen Sie im Kalkül NK:

a) $\vdash \forall x\big(\phi(x) \wedge \psi(x)\big) \to \forall x \phi(x) \wedge \forall x \psi(x)$

b) $\vdash \forall x\big(\phi \to \psi(x)\big) \to \big(\phi \to \forall x \psi(x)\big)$ – wobei $x \notin \mathrm{FV}(\phi)$ sei

c) $\vdash \neg \exists x \neg \phi(x) \to \forall x \phi(x)$