Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik I — Blatt 4

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2012/13**

Aufgabe 1 (2 + 3 Punkte)

Konstruieren Sie für folgende Formeln jeweils konjunktive und disjunktive Normalformen. Geben Sie alle Zwischenschritte der Konstruktionen an.

(a) $\neg(\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge \varphi_2$

(b) $(\varphi_1 \vee (\bot \leftrightarrow \neg\varphi_2)) \to (\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \to \varphi_1)$

Aufgabe 2 (1 + 1 Punkte)

Geben Sie jeweils ein einfaches Verfahren zur Überprüfung der folgenden Eigenschaften an, und begründen Sie, warum das Verfahren das Gewünschte leistet.

(a) Allgemeingültigkeit einer Formel in konjunktiver Normalform.

(b) Erfüllbarkeit einer Formel in disjunktiver Normalform.

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen mithilfe algebraischer Umformungen. Sie dürfen dabei die logischen Äquivalenzen aus dem Theorem 5.1 über algebraische Gesetze sowie $\varphi \to \psi \dashv\models \neg\varphi \vee \psi$ verwenden. Geben Sie dabei in jedem Schritt an, welche dieser Äquivalenzen Sie verwenden. Falls Sie dabei den Substitutionssatz (Theorem 3.3) verwenden, geben Sie dies ebenfalls an.

(a) $\varphi \to (\sigma \to \psi) \dashv\models \varphi \wedge \sigma \to \psi$

(b) $\varphi \vee \psi \to \sigma \dashv\models (\varphi \to \sigma) \wedge (\psi \to \sigma)$

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 3 Punkte)

Zeigen Sie in NK′:

(a) $(\varphi \wedge \psi) \to \sigma \vdash \varphi \to (\psi \to \sigma)$

(b) $\vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$

(c) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma))$

(d) $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi \to \neg\psi$

Aufgabe 5 (5 Zusatzpunkte)

Ein n-stelliger Junktor mit Wahrheitsfunktion f heiße *selbstdual* genau dann, wenn für alle $x_1, \ldots, x_n$ gilt:

$$f(x_1^*, \ldots, x_n^*) = f(x_1, \ldots, x_n)^*.$$

Dabei sei $0^* := 1$ und $1^* := 0$.

Zeigen Sie, dass eine Menge, welche nur selbstduale Junktoren enthält, nicht funktional vollständig sein kann.

Abgabe der Aufgaben am 29.11. nach der Vorlesung oder als PDF.