

## Aufgabe 1 (1+1+1+3+3+2 Punkte)

Eine  $n$ -stellige Relation  $R \subseteq \mathbb{N}^n$  heißt *arithmetisch*, falls es eine Formel  $\varphi_R$  mit genau  $n$  freien Variablen gibt, so daß für alle  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  gilt:  $R(k_1, \dots, k_n) \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \varphi_R(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$ .

Zeigen Sie:

- Die Menge aller natürlichen Zahlen ist arithmetisch.
- Die leere Menge ist arithmetisch.
- Die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen ist arithmetisch.
- Die Menge der arithmetischen Relationen ist abgeschlossen unter Negation, Konjunktion und Allquantifikation.
- Die Menge der arithmetischen Relationen ist abgeschlossen unter primitiv rekursiven Funktionen, d.h. falls  $R$  arithmetisch und  $f$  primitiv rekursiv, dann ist (im einstelligen Fall)  $Q$  mit  $Q(k) :\Leftrightarrow R(f(k))$  arithmetisch. (Bemerkung: Dies gilt auch für totale  $\mu$ -rekursive Funktionen.)
- Jede primitiv-rekursive Relation ist arithmetisch.

## Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei  $T$  die Menge der Gödelnummern von wahren Aussagen, d.h.  $T := \{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$ .

Zeigen Sie:  $T$  ist nicht arithmetisch.

## Aufgabe 3 (6+3 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden Satz von Tarski: Falls PA konsistent ist, so gibt es keine Formel  $\varphi_T$  mit einer freien Variablen, so daß für alle Aussagen  $\psi$  gilt:  $\text{PA} \vdash \varphi_T(\ulcorner \psi \urcorner) \leftrightarrow \psi$ .

- Beweisen Sie diesen Satz direkt.
- Beweisen Sie diesen Satz aus Aufgabe 2.

## Aufgabe 4 (2 Punkte)

Weshalb kann man im Beweis der Rosser-Variante des Gödelschen Satzes davon ausgehen, daß  $\overline{\text{Prov}}(x, y)$  eine  $\Delta_0$ -Formel ist?