

Einführung in die Logik (SS2004)

Abschlussklausur

21. Juli 2004

Musterlösung

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens, ob der folgende Satz von AL wahrheitsfunktional wahr ist.

$$\neg\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \vee \neg A)$$

Lösung:

A	B	\neg	\neg	(A	\rightarrow	B)	\leftrightarrow	(B	\vee	\neg	A)
w	w	w	f	w	w	w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	w	f	f	w	f	f	f	w
f	w	w	f	f	w	w	w	w	w	w	f
f	f	w	f	f	w	f	w	f	w	w	f

Der Satz ' $\neg\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \vee \neg A)$ ' ist wahrheitsfunktional wahr.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Überprüfen Sie mit Hilfe des Tableauverfahrens, ob die folgende Satzmenge wahrheitsfunktional konsistent ist. Falls die Satzmenge konsistent ist, geben Sie das Fragment einer Wahrheitswertzuordnung an, unter der jedes Element dieser Satzmenge wahr wird.

$$\{\neg(E \vee \neg C) \wedge D, \neg[\neg(E \vee \neg C) \wedge D]\}$$

Lösung:

1	$\neg(E \vee \neg C) \wedge D$	EdT
2	$\neg[\neg(E \vee \neg C) \wedge D]$	EdT
3	$\neg(E \vee \neg C)$	$1 \wedge D$
4	D	$1 \wedge D$
5	$\neg E$	$3 \neg \vee D$
6	$\neg\neg C$	$3 \neg \vee D$
7	C	$6 \neg\neg D$
8	$\neg\neg(E \vee \neg C)$	$\neg D$
9	$E \vee \neg C$	\times
10	E	$\neg C$
	\times	\times
		$9 \vee D$

Geschlossenes Tableau, d.h. die Satzmenge ist *nicht* wahrheitsfunktional konsistent (sondern wahrheitsfunktional inkonsistent).

Bemerkung:

Das Tableau

1	$\neg(E \vee \neg C) \wedge D$	EdT
2	$\neg[\neg(E \vee \neg C) \wedge D]$	EdT

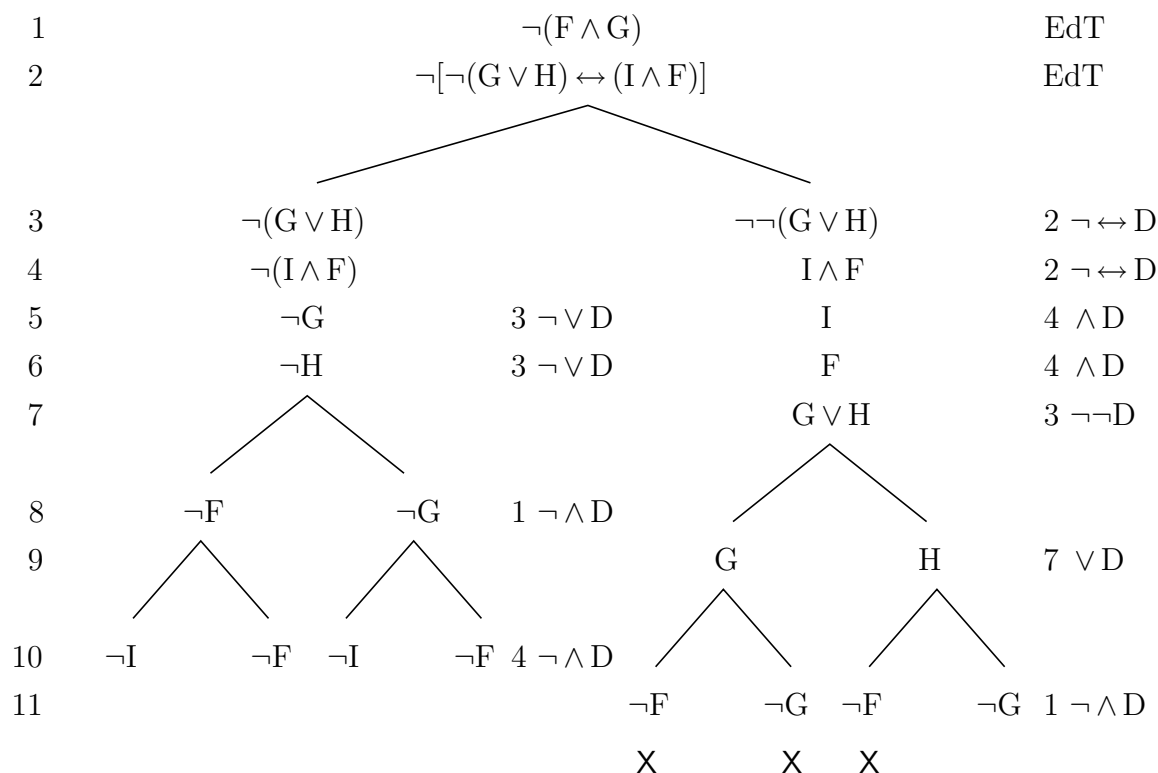
ist *keine* Lösung, da nach Definition kein geschlossener Zweig vorliegt (es kommt nicht sowohl ein *atomarer* Satz als auch seine Negation vor).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Überprüfen Sie mit Hilfe des Tableauperfahrens, ob die folgende Satzmenge wahrheitsfunktional konsistent ist. Falls die Satzmenge konsistent ist, geben Sie das Fragment einer Wahrheitswertzuordnung an, unter der jedes Element dieser Satzmenge wahr wird.

$$\{\neg(F \wedge G), \neg[\neg(G \vee H) \leftrightarrow (I \wedge F)]\}$$

Lösung:



Offenes Tableau, d.h. die Satzmenge ist wahrheitsfunktional konsistent.

Ein Fragment einer Wahrheitswertzuordnung unter der jedes Element dieser Satzmenge wahr wird, ist z.B.

$$I: f, F: f, G: f, H: f \quad (\text{erster offener Zweig})$$

Andere Fragmente einer Wahrheitswertzuordnung unter der jedes Element dieser Satzmenge wahr wird:

- I:w, F: f, G: f, H: f (2. offener Zweig / 4. offener Zweig)
- I:f, F: f, G: f, H: f (2. offener Zweig / 4. offener Zweig)
- I:f, F: w, G: f, H: f (3. offener Zweig)
- I:f, F: f, G: f, H: f (3. offener Zweig)
- I:w, F: w, G: f, H: w (5. offener Zweig)

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Die charakteristische Wahrheitstafel für das wahrheitsfunktionale Konnektiv \downarrow (Sheffers Pfeil) sieht wie folgt aus:

A	B	$A \downarrow B$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

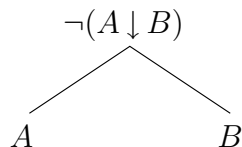
Wenn wir Sätze, die mit \downarrow zusammengesetzt sind, mit Hilfe des Tableauverfahrens bearbeiten wollen, müssen wir zwei neue Dekompositionsregeln einführen. Eine Regel für Sätze mit der Dekompositionsform $A \downarrow B$ und eine Regel für Sätze mit der Dekompositionsform $\neg(A \downarrow B)$. Formulieren Sie die entsprechenden Dekompositionsregeln.

Lösung:

Dekompositionsregel für $A \downarrow B$:

$$\begin{array}{l} A \downarrow B \\ \neg A \\ \neg B \end{array}$$

Dekompositionsregel für $\neg(A \downarrow B)$:



Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zeigen Sie (ausschließlich unter Verwendung der Ableitungsregeln von NSAL):

$$\{H \rightarrow (I \wedge \neg K)\} \vdash_{\text{NSAL}} (H \wedge J) \rightarrow \neg K$$

Lösung:

1	H \rightarrow (I \wedge \neg K)	Annahme
2	H \wedge J	Annahme
3	H	2 \wedge B
4	I \wedge \neg K	1,3 \rightarrow B
5	\neg K	4 \wedge B
6	(H \wedge J) \rightarrow \neg K	2-5 \rightarrow E

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zeigen Sie (unter Verwendung der Ableitungsregeln von NSAL+):

$$\{\neg(A \rightarrow C) \rightarrow \neg B\} \vdash_{\text{NSAL}^+} (A \wedge B) \rightarrow C$$

Lösung:

1		$\neg(A \rightarrow C) \rightarrow \neg B$	Annahme
2		$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	Transp
3		$(B \wedge A) \rightarrow C$	Exp
4		$(A \wedge B) \rightarrow C$	Kom

Eine alternative Lösung ist z.B.

1		$\neg(A \rightarrow C) \rightarrow \neg B$	Annahme
2		$A \wedge B$	Annahme
3		B	2 \wedge B
4		$A \rightarrow C$	1,3 MT
5		A	2 \wedge B
6		C	4,5 \rightarrow B
7		$(A \wedge B) \rightarrow C$	2-6 \rightarrow E

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Symbolisieren Sie die folgenden Sätze in PLI, ohne Satzbuchstaben zu verwenden. Verwenden Sie dabei den angegebenen Symbolisierungsschlüssel.

UD: Menschen
Bxy: x ist der Bruder von y
Fx: x ist eine Frau
Hxy: x himmelt y an
Kx: x ist ein König
Sxy: x ist ein Sohn von y
Wx: x ist ein Frauenschwarm
Vxy: x ist der Vater von y
w: Prinz William
h: Prinz Harry

- (a) Prinz William ist der Bruder von Prinz Harry. (2 Punkte)
(b) Alle Frauen himmeln Prinz William an. (2 Punkte)
(c) Nicht alle Söhne von Königen sind Könige. (2 Punkte)
(d) Prinz Harrys einziger Bruder ist ein Frauenschwarm. (2 Punkte)
(e) Kein Mensch ist der Vater von allen Menschen. (2 Punkte)

Lösung:

- (a) Bwh
(b) $(\forall x)(Fx \rightarrow Hxw)$
(c) $\neg(\forall x)(\forall y)[(Ky \wedge Sxy) \rightarrow Kx]$
oder $(\exists x)(\exists y)[(Ky \wedge Sxy) \wedge \neg Kx]$
oder $\neg(\forall x)[(\exists y)(Ky \wedge Sxy) \rightarrow Kx]$
(d) $(\exists x)[(Bxh \wedge Wx) \wedge (\forall y)(Byh \rightarrow x = y)]$
(e) $\neg(\exists x)(\forall y)Vxy$

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Zeigen Sie (ausschließlich unter Verwendung der Ableitungsregeln von NSPL):

$$\{(\forall x)Fx \wedge \neg(\forall z)Kzb, (\forall y)[(Hy \wedge Fy) \rightarrow Gy]\} \vdash_{\text{NSPL}} (\forall z)(Hz \rightarrow Gz)$$

Lösung:

1		$(\forall x)Fx \wedge \neg(\forall z)Kzb$	Annahme
2		$(\forall y)[(Hy \wedge Fy) \rightarrow Gy]$	Annahme
3		Ha	Annahme
4		$(\forall x)Fx$	1 \wedge B
5		Fa	4 \forall B
6		$Ha \wedge Fa$	3,5 \wedge E
7		$(Ha \wedge Fa) \rightarrow Ga$	2 \forall B
8		Ga	6,7 \rightarrow B
9		$Ha \rightarrow Ga$	3-8 \rightarrow E
10		$(\forall z)(Hz \rightarrow Gz)$	9 \forall E