

II Quantorenlogik

In diesem Abschnitt wird die Quantorenlogik behandelt – gleichbedeutend zum Begriff *Quantorenlogik* sind die Begriffe *Prädikatenlogik* und *Logik erster Stufe*.

Die Quantorenlogik erweitert die Aussagenlogik, indem sie nicht mehr nur Aussagen als Ganzes analysiert, sondern auch deren innere Struktur betrachtet. Nach einer informellen Motivation, welche dies detaillierter ausführt, wird die Quantorenlogik analog zur Aussagenlogik eingeführt: Definition der formalen Sprache, der Semantik und schließlich eines syntaktischen Kalküls. Im Anschluss wird wie schon in der Aussagenlogik die semantische Vollständigkeit des Kalküls gezeigt.

Informelle Motivation: Die Quantorenlogik unterscheidet sich in folgenden Punkten wesentlich von der Aussagenlogik:

- (1) Betrachtung von: Individuen, Funktionen und Relationen

Wir werden (in einer formalen Sprache) über Individuen eines Gegenstandsbereiches (Elemente einer Menge) und Funktionen und Relationen über diesen Bereich reden. Der Bereich zusammen mit den ausgezeichneten Individuen, Funktionen und Relationen wird Struktur genannt.

- (2) Verwendung neuer Zeichen im Alphabet:

(a) logische Zeichen: $\forall, \exists, =$ und Variablen x_0, x_1, \dots

(b) nicht-logische Zeichen, wie:

Individuen-Konstanten (etwa \dot{c})

Funktions-Zeichen (etwa $\dot{f}(\cdot, \dots, \cdot)$ oder $\dot{+}$)

Relations-Zeichen (etwa $\dot{P}(\cdot, \dots, \cdot)$ oder $\dot{\leq}$)

Der Punkt $\dot{}$ über den nicht-logischen Zeichen verweist darauf, dass diese sprachliche Zeichen sind; soll in der Metasprache auf die entsprechenden Objekte (Interpretation der Zeichen) Bezug genommen werden, wird der Punkt weggelassen.

Diese Notation wird jedoch nicht einheitlich verwendet. Häufig wird dasselbe Zeichen in Objekt- und Metasprache verwendet, da aus dem Kontext heraus klar ist, was gemeint ist.

- (3) Verwendung von *Termen*: Man benutzt Terme, um über die Individuen des Grundbereiches in der formalen Sprache zu sprechen. Dazu werden Variablen, Individuen-Konstanten und Funktionszeichen verwendet.

Etwa: $\dot{f}(\dot{a})$.

- (4) Verwendung von *Formeln*: Durch Formeln werden Behauptungen aufgestellt. Diese können im Gegensatz zu Termen wahr oder falsch sein, verweisen also auf Wahrheit bzw. Falschheit.

Etwa: $\exists x : x \dot{<} (x \dot{+} x)$

§ 8 Sprache der Prädikatenlogik

In diesem Abschnitt werden formale Sprachen eingeführt. Diese Sprachen werden mit \mathcal{L} bezeichnet. Die einzelnen Sprachen, die hier definiert werden sollen, unterscheiden sich darin, welche nicht-logischen Zeichen zur Verfügung stehen.

Deshalb werden zur Definition einer formalen Sprache \mathcal{L} drei (möglicherweise leere) Index-Mengen I, K, L benötigt, die paarweise disjunkt sind. Diese Mengen legen fest, wieviele Individuen-Konstanten, Funktions- und Relationszeichen in der Sprache vorkommen.

8.1 DEF (Alphabet): Das Alphabet einer formalen Sprache \mathcal{L} besteht aus den folgenden Zeichen:

Logische Zeichen:

- (1) Junktoren: \rightarrow, \perp Ebenfalls: $\neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow$
- (2) Quantoren: \forall (Allquantor) Ebenfalls: \exists (Existenzquantor)
- (3) Variablen: für jedes $n \in \mathbb{N}$: x_n
- (4) Gleichheitszeichen: $=$

Nicht-logische Zeichen (in Klammern metasprachliche Variablen):

- (1) Individuen-Konstanten: für jedes $i \in I$: \dot{c}_i (\dot{a}, \dot{b}, \dots)
- (2) Funktionszeichen: für jedes $k \in K$: \dot{f}_k (\dot{f}, \dot{g}, \dots)
- (3) Relationszeichen: für jedes $l \in L$: \dot{R}_l (\dot{P}, \dot{Q}, \dots)

Hilfszeichen:

- (1) Klammerpaar: $(,)$
- (2) Komma: $,$

Bemerkungen:

- (1) Später wird gezeigt, dass der Existenzquantor durch den Allquantor ausgedrückt werden kann. Entsprechend würde hier zur Sprachdefinition der Allquantor zusammen mit den Junktoren \perp und \rightarrow genügen.
- (2) Mit $\text{VAR} := \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ wird die Menge der Variablen bezeichnet.
- (3) Die nicht-logischen Zeichen wurden mit einem kleinen Punkt notiert. Dies dient zur Unterscheidung der nicht-logischen Zeichen von den Objekten, auf die diese Zeichen später verweisen werden. Ist es aus dem Kontext heraus klar, dass Zeichen gemeint sind, werden die Punkte häufig weggelassen.

Im nächsten Schritt muss festgelegt werden, welche Stelligkeit die Funktions- und Relationszeichen haben. Es wird also festgelegt, wieviele Argumente die Funktions- und Relationszeichen haben.

8.2 DEF (Stelligkeit und Signatur): Die beiden Abbildungen

$$\sigma : K \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \tau : L \rightarrow \mathbb{N}$$

legen die Stelligkeit der Funktions- und Relationszeichen fest. Dabei hat das Funktionszeichen \dot{f}_k die Stelligkeit $\sigma(k)$ und das Relationszeichen \dot{R}_l die Stelligkeit $\tau(l)$. Das Tupel $\langle \sigma, \tau, I \rangle$ wird *Signatur* von \mathcal{L} genannt.

Bemerkung: In Abhängigkeit der Mengen I, K, L und der beiden Funktionen σ und τ wurde tatsächlich eine ganze Klasse von formalen Sprachen eingeführt. Diese können einfach durch die Signatur unterschieden werden, in der alle wesentlichen Informationen über die Sprache \mathcal{L} zusammengefaßt sind.

Beispiel (Sprache der Gruppentheorie): Wir illustrieren und motivieren am Beispiel der Gruppentheorie die Definitionen dieses Abschnittes.

- (1) Zur Erinnerung: Eine Gruppe besteht aus einer Grundmenge G , einer zweistelligen Verknüpfung, etwa der Addition, und einem neutralem Element. Um darüber reden zu können, wird in der Sprache \mathcal{L}_G der Gruppentheorie eine Individuen-Konstante und ein zwei-stelliges Funktionszeichen benötigt. Es werden keine Relationszeichen benötigt. Wir definieren also:

$$I := \{0\}, \quad K := \{+\} \quad \text{und} \quad L := \emptyset$$

I, K und L sind paarweise disjunkt. Damit stehen \dot{c}_0 und \dot{f}_+ als nicht-logische Zeichen im Alphabet von \mathcal{L}_G zur Verfügung.

Durch die Festlegung $\sigma(+):=2$ ist σ auf ganz K definiert. Da $L = \emptyset$ gilt, ist τ trivial gegeben.

Damit ist \dot{f}_+ ein zwei-stelliges Funktionszeichen und die Signatur von \mathcal{L}_G ist durch $\langle \sigma, \tau, I \rangle$ gegeben.

- (2) Wir erweitern die Sprache \mathcal{L}_G zu einer reicheren Sprache $\mathcal{L}_{G'}$:

$$I' := I, \quad K' := \{+, -\} \quad \text{und} \quad L' := \{\leq\}$$

Zusätzlich soll gelten:

$$\sigma(-) := 1 \quad \text{und} \quad \tau(\leq) := 2$$

Damit stehen in der Sprache $\mathcal{L}_{G'}$ zusätzlich ein ein-stelliges Funktionszeichen \dot{f}_- und ein zwei-stelliges Relations-Zeichen \dot{R}_{\leq} zur Verfügung.

Bemerkung: Sind die Stelligkeiten der Funktions- und Relationszeichen aus dem Kontext klar, kann man die Signatur auch einfach durch Auflistung der Zeichenmengen angeben, z.B. im Beispiel (1) durch das Tupel $\langle \{+\}, \emptyset, \{0\} \rangle$ und im Beispiel (2) durch das Tupel $\langle \{+, -\}, \{\leq\}, \{0\} \rangle$.

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Signatur für eine Sprache \mathcal{L} fest gegeben ist, und definieren nun rekursiv die Terme und Formeln von \mathcal{L} in Abhängigkeit von der Signatur. Ziel ist es, später mit den Termen über Individuen sprechen zu können.

8.3 DEF (Terme): Die Menge TERM aller Terme von \mathcal{L} ist die kleinste Menge X , so dass folgendes gilt:

- (1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$: $x_n \in X$
- (2) Für jedes $i \in I$: $\dot{c}_i \in X$
- (3) Für jedes $k \in K$ und alle Terme $t_1, \dots, t_{\sigma(k)} \in X$: $\dot{f}_k(t_1, \dots, t_{\sigma(k)}) \in X$

Das Zeichen \doteq wird auch für die syntaktische Gleichheit von Termen verwendet.

Beispiel (Terme):

- (1) Folgende Terme gehören etwa zur Sprache \mathcal{L}_G (und damit auch zu $\mathcal{L}_{G'}$):

$$\dot{c}_0, x_5, \dot{f}_+(x_1, \dot{c}_0)$$

- (2) Wir erlauben zur Lese-Erleichterung eine informelle Notation der Terme. Wir schreiben 0 statt \dot{c}_0 und + für \dot{f}_+ und notieren zusätzlich Funktionsausdrücke infix. Also sind auch folgende Zeichenreihen Terme:

$$0, (0 + x_4) + x_3$$

- (3) Das einstellige Funktionszeichen \dot{f}_- von $\mathcal{L}_{G'}$ wird zur Lese-Erleichterung durch einen Strich über dem Argument notiert. Damit gibt es zusätzlich in der Sprache $\mathcal{L}_{G'}$ etwa folgende Terme:

$$\overline{x_0}, \overline{(x_1 + \overline{x_2}) + 0}$$

Mithilfe der Terme können nun die Formeln der Sprache \mathcal{L} rekursiv eingeführt werden. Formeln verweisen auf Wahrheit bzw. Falschheit. In der Definition wird die Sprache \mathcal{L} mit der Menge aller Formeln dieser Sprache identifiziert.

8.4 DEF (Formeln): Die Menge \mathcal{L} aller Formeln der Sprache \mathcal{L} ist die kleinste Menge X , so dass folgendes gilt:

- (1) $\perp \in X$
- (2) Falls $t, s \in \text{TERM}$: $t = s \in X$
- (3) Für jedes $l \in L$ und alle Terme $t_1, \dots, t_{\tau(l)}$: $\dot{R}_l(t_1, \dots, t_{\tau(l)}) \in X$
- (4) Falls $\phi, \psi \in X$, dann auch: $(\phi \circ \psi) \in X$ und $(\neg\phi) \in X$
- (5) Für alle $x \in \text{VAR}$ und alle $\phi \in X$: $(\forall x \phi) \in X$ und $(\exists x \phi) \in X$

Formeln, die aufgrund der Regeln (1) bis (3) zu \mathcal{L} gehören, werden *atomare Formeln* oder auch *Atome* genannt; mit $\text{ATM} \subset \mathcal{L}$ wird die Menge aller atomaren Formeln bezeichnet. Möchte man hervorheben, zu welcher Sprache Formeln gehören, spricht man auch von \mathcal{L} -Formeln.

Konvention (Notation):

- (1) Analog zur Aussagenlogik verwenden wir Schreib-Konventionen zur Klammerersparnis. Neu hinzu kommt, dass Quantoren stärker binden als Junktoren.
- (2) Gelegentlich werden für eine bessere Lesbarkeit die Quantoren von der Restformel mit einem Doppelpunkt abgesetzt.
- (3) Wie schon bei den Funktionszeichen werden wir auch gebräuchliche Relationszeichen (etwa \leq) verwenden und, falls diese zweistellig sind, sie auch infix notieren. Etwa: $1 \leq 0$ für $\leq (1, 0)$.

Beispiel (Formeln): Einige Formeln der (erweiterten) Gruppentheorie:

- (1) $\forall x_0 : x_0 + 0 = x_0 \in \mathcal{L}_G \subset \mathcal{L}_{G'}$
- (2) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \in \mathcal{L}_G \subset \mathcal{L}_{G'}$
- (3) $\forall x_1 \forall x_2 : x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \in \mathcal{L}_G \subset \mathcal{L}_{G'}$
- (4) $\forall x_0 : \overline{x_0 + 0} \leq \overline{x_0} + \overline{0} \in \mathcal{L}_{G'} \setminus \mathcal{L}_G$

Weiterführende Bemerkungen:

- (1) Weitere Begriffe: Wie schon in der Aussagenlogik können Begriffe wie *Gliederungsbaum* und *Rang einer Formel* für die Quantorenlogik rekursiv definiert werden.
- (2) Induktion: Analog zur Induktion in der Aussagenlogik werden in der Prädikatenlogik Behauptungen über Formeln durch Induktion gezeigt.
Oft ist es aufgrund der komplexeren Definition der Sprache notwendig, zunächst eine Induktion über die Terme und dann erst eine Induktion über die Formeln durchzuführen.
- (3) Definitionen: Rekursive Definitionen über dem Bereich der Terme und dem Bereich der Formeln sind analog zur Aussagenlogik möglich.

Freie und gebundene Variablen: In der Prädikatenlogik wird das Konzept der freien und gebundenen Variablen benötigt. Dabei wird das Vorkommen einer Variable x in einer Formel ϕ als gebunden bezeichnet, falls x im Wirkungsbereich eines Quantors vorkommt.

Dabei steht x im Wirkungsbereich eines Quantors $\forall x$ ($\exists x$), falls in der Teilformel ψ , vor die der Quantor gestellt wurde (also $\forall x \psi \preceq \phi$ bzw. $\exists x \psi \preceq \phi$), die Variable x ungebunden vorkommt. Dieses Vorkommen von ψ in der Formel ϕ wird der Wirkungsbereich des Quantors genannt. Variablen, die in ϕ vorkommen, ohne gebunden zu werden, nennt man frei.

Das Konzept der freien und gebundenen Variablen wird in den folgenden Definitionen präzisiert. In einem ersten Schritt werden die freien Variablen eines Termes definiert, um dann mit diesem Begriff die freien Variablen einer Formel definieren zu können.

8.5 DEF (Freie Variablen eines Terms): Die Menge $FV(t)$ der *freien Variablen eines Terms* $t \in \text{TERM}$ ist wie folgt rekursiv definiert:

- (1) Falls $t \simeq x$ für $x \in \text{VAR}$: $FV(t) := \{x\}$
- (2) Falls $t \simeq \dot{c}_i$ für $i \in I$: $FV(t) := \emptyset$
- (3) Falls $t \simeq \dot{f}(t_1, \dots, t_n)$ mit $t_1, \dots, t_n \in \text{TERM}$: $FV(t) := \bigcup_{k=1}^n FV(t_k)$

Man sagt, dass eine Variable x frei in einem Term t vorkommt, falls $x \in FV(t)$.

8.6 DEF (Freie Variablen einer Formel): Die Menge $FV(\phi)$ der *freien Variablen einer Formel* $\phi \in \mathcal{L}$ ist wie folgt rekursiv über dem Aufbau von Formeln definiert:

- (1) Falls $\phi \simeq \perp$: $FV(\phi) := \emptyset$
- (2) Falls $\phi \simeq t = s$ für Terme t, s : $FV(\phi) := FV(t) \cup FV(s)$
- (3) Falls $\phi \simeq \dot{P}(t_1, \dots, t_n)$ für Terme t_1, \dots, t_n : $FV(\phi) := \bigcup_{k=1}^n FV(t_k)$
- (4) Falls $\phi \simeq \psi \circ \sigma$ für Formeln ψ und σ : $FV(\phi) := FV(\psi) \cup FV(\sigma)$
und falls $\phi \simeq \neg\psi$: $FV(\phi) := FV(\psi)$
- (5) Falls $\phi \simeq \forall x\psi$ (bzw. $\exists x\psi$) für eine Variable x und Formel ψ :
 $FV(\phi) := FV(\psi) \setminus \{x\}$

Man sagt, dass eine Variable x frei in einer Formel ϕ vorkommt, falls $x \in FV(\phi)$.

Dem Begriff der freien Variablen wird der Begriff der gebundenen Variablen entgegengesetzt. Da in Termen keine Quantoren vorkommen können, muss in der Definition lediglich auf den Formelaufbau zurückgegriffen werden.

8.7 DEF (Gebundene Variablen einer Formel): Die Menge $BV(\phi)$ der *gebundenen Variablen einer Formel* $\phi \in \mathcal{L}$ ist wie folgt rekursiv über dem Aufbau von Formeln definiert:

- (1) Falls ϕ atomar: $BV(\phi) := \emptyset$
- (2) Falls $\phi \simeq \psi \circ \sigma$ für Formeln ψ und σ : $BV(\phi) := BV(\psi) \cup BV(\sigma)$
und falls $\phi \simeq \neg\psi$: $BV(\phi) := BV(\psi)$
- (3) Falls $\phi \simeq \forall x\psi$ (bzw. $\exists x\psi$) für eine Variable x und Formel ψ , wobei zusätzlich $x \in FV(\psi)$: $BV(\phi) := BV(\psi) \cup \{x\}$

Man sagt, dass eine Variable x gebunden in einer Formel ϕ vorkommt, falls $x \in BV(\phi)$.

Beispiel (Gebundene und freie Variablen): Einige Beispiele aus der Sprache \mathcal{L}_G sollen die Definitionen illustrieren:

- (1) $FV(\dot{c}_0) = FV(0) = \emptyset$
- (2) $FV(x_1 + 0) = \{x_1\}$
- (3) für $\phi \simeq \forall x : x + y = y + x$ ist: $FV(\phi) = \{y\}$ und $BV(\phi) = \{x\}$.
- (4) für $\phi \simeq \forall x \forall y : x + y = y + x$ ist: $FV(\phi) = \emptyset$ und $BV(\phi) = \{x, y\}$.
- (5) für $\phi \simeq \forall x : x + y = 0 \wedge \forall y : x + y = 0$ ist:
 $FV(\phi) = \{x, y\}$ und $BV(\phi) = \{x, y\}$.

Mithilfe der freien Variablen wird in der Prädikatenlogik (im Gegensatz zur Aussagenlogik) zwischen Aussagen und Formeln unterschieden.

8.8 DEF (geschlossen/offen):

- (1) Ein Term $t \in \text{TERM}$ oder eine Formel $\phi \in \mathcal{L}$ heißt *geschlossen*, falls keine freien Variablen vorkommen ($FV(t) = \emptyset$ bzw. $FV(\phi) = \emptyset$).
 Eine geschlossene Formel heißt auch *Aussage*.
- (2) TERM_c ist die Menge aller geschlossen Terme, SENT die Menge aller Aussagen.
- (3) Terme oder Formeln, die nicht geschlossen sind (also freie Variablen enthalten), heißen *offen*.

§ 9 Semantik

Nachdem im letzten Abschnitt formale Sprachen \mathcal{L} eingeführt wurden, kann nun die Bedeutung der Sprachen definiert werden. Während in der Aussagenlogik dafür im Wesentlichen nur die Bewertung aller Formeln benötigt wurde, gestaltet es sich in der Prädikatenlogik aufwendiger.

Zunächst wird der Strukturbegriff eingeführt. Das ist im Wesentlichen eine Menge, in der die nichtlogischen Zeichen von \mathcal{L} interpretiert werden. Anschließend werden Belegungen von Variablen definiert. Damit können dann Terme durch Individuen und Formeln durch Wahrheitswerte ausgewertet werden. Daran anschließend kann die Gültigkeit von Formeln definiert werden.

Im Folgenden wird wieder – solange nicht anders gesagt – eine Sprache \mathcal{L} mit Signatur $\langle \sigma, \tau, I \rangle$ vorausgesetzt.

9.1 DEF (Struktur): Das geordnete Paar $\mathfrak{A} := \langle A, \Omega \rangle$ heißt \mathcal{L} -Struktur, falls $A \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge und Ω eine Abbildung auf ganz $I \dot{\cup} K \dot{\cup} L$ ist, so dass folgendes gilt:

- (1) Für jedes $i \in I$ ist $\Omega(i) =: c_i \in A$ ein Element von A .
- (2) Für jedes $k \in K$ ist $\Omega(k) =: f_k$ eine $\sigma(k)$ -stellige Funktion.
Also: $f_k : A^{\sigma(k)} \rightarrow A$.
- (3) Für jedes $l \in L$ ist $\Omega(l) =: R_l$ eine $\tau(l)$ -stellige Relation.
Also: $R_l \subseteq A^{\tau(l)}$.

Bemerkungen:

- (1) Die Abbildung Ω ist wohldefiniert, da die Mengen I, K, L paarweise disjunkt sind.
- (2) Die Menge A wird *Grundbereich*, *Grundmenge*, *Trägermenge*, *Individuenbereich* oder auch *Universum* genannt.

Manchmal wird für das Universum A auch $|\mathfrak{A}|$ geschrieben, um den Bezug zur zugrundeliegenden Struktur \mathfrak{A} zu verdeutlichen.

- (3) Ω legt fest, durch welche Objekte die sprachlichen Zeichen interpretiert werden. Die Bilder von Ω werden *Interpretation der nicht-logischen Zeichen unter Ω* oder auch *ausgezeichnete Objekte* genannt.

Wir verwenden manchmal auch die suggestive Schreibweise $\zeta^{\mathfrak{A}}$ um die Interpretation des nicht-logischen Zeichens ζ in der Struktur \mathfrak{A} zu bezeichnen.

- (4) Häufig notieren wir in Strukturen die ausgezeichneten Objekte anstatt der Abbildung Ω und geben so Ω implizit an.

Wir schreiben also: $\langle A, \langle f_k \rangle_{k \in K}, \langle R_l \rangle_{l \in L}, \langle c_i \rangle_{i \in I} \rangle$.

Bemerkung (Signatur): Die Signatur der Sprache \mathcal{L} läßt sich auch anhand einer \mathcal{L} -Struktur feststellen. Jeder Konstanten entspricht ein ausgezeichnetes Element, jedem Funktions- und Relationszeichen eine Funktion bzw. eine Relation gleicher Stellenzahl. Entsprechend werden wir auch von der Signatur einer \mathcal{L} -Struktur sprechen. Verschiedene \mathcal{L} -Strukturen zu einer Sprache \mathcal{L} sind sich aufgrund ihrer gemeinsamen Signatur ähnlich. Entsprechend wird die Signatur einer \mathcal{L} -Struktur als *Ähnlichkeitstyp* bezeichnet. Diese kann als abstraktes Objekt aufgefaßt werden, das beschreibt, was allen \mathcal{L} -Strukturen gemeinsam ist.

Beispiel (Strukturen): Es werden Beispiele für Strukturen zur Sprache \mathcal{L}_G und $\mathcal{L}_{G'}$ angegeben:

- (1) Die additive Gruppe der Ganzen Zahlen $\mathfrak{Z} := \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ ist zusammen mit dem ausgezeichnetem Element $0 \in \mathbb{Z}$ und der gewohnten Addition in \mathbb{Z} eine \mathcal{L}_G -Struktur.

Zeichnet man zusätzlich die Abbildung $- : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : x \mapsto -x$ und die zwei-stellige Relation \leq aus, erhält man mit $\mathfrak{Z}' := \langle \mathbb{Z}, +, -, \leq, 0 \rangle$ eine $\mathcal{L}_{G'}$ -Struktur zur reicheren Sprache $\mathcal{L}_{G'}$.

Detailliert und formal korrekt:

Für \mathfrak{Z} :

$$A := \mathbb{Z} \neq \emptyset.$$

$$\Omega(0) := 0$$

$$\Omega(+):= f_+ : A \times A \rightarrow A : \langle x, y \rangle \mapsto x + y$$

Und für \mathfrak{Z}' zusätzlich:

$$\Omega(-) := g : A \rightarrow A : x \mapsto -x$$

$$\Omega(\leq) := \{ \langle x, y \rangle : x \leq y \} \subset A^2$$

Es ist zu beachten, dass Ω als Argument uninterpretierte Elemente aus den einzelnen Index-Mengen hat und als Bild uns bekannte Elemente, Funktionen und Relationen, die wir hier lediglich gleich notieren.

- (2) Die Einheitengruppe der Ganzen Zahlen $\mathfrak{E} := \langle \{\pm 1\}, \cdot, 1 \rangle$ ist zusammen mit dem ausgezeichnetem Element 1 und der gewohnten Multiplikation eine \mathcal{L}_G -Struktur.
- (3) \mathcal{L}_G -Strukturen müssen keine Gruppen sein. Die Interpretationen der nicht-logischen Zeichen können auch ganz „wild“ gewählt werden. Sie müssen lediglich zur Signatur passen. Etwa:

Als Universum die natürlichen Zahlen: $A := \mathbb{N} \neq \emptyset.$

Für das 0-Zeichen die $5 \in \mathbb{N}$: $\Omega(0) := 5$

Für das +-Zeichen die Minimumsfunktion:

$$\Omega(+):= \min : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \langle x, y \rangle \mapsto \min(x, y)$$

Das Tupel $\mathfrak{W} := \langle A, \Omega \rangle$ ist eine \mathcal{L}_G -Struktur.

Bisher sind die Bedeutungen der Namens- und Funktionszeichen definiert worden. Die Bedeutung der Variablen wird durch *Belegungen* festgelegt.

Im Folgenden sei eine \mathcal{L} -Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ zur Signatur $\langle \sigma, \tau, I \rangle$ gegeben.

9.2 DEF (Belegung):

- (1) Eine Abbildung

$$v : \text{VAR} \rightarrow A$$

heißt *Belegung der Variablen in \mathfrak{A}* .

- (2) Für $a \in A$ und eine Variable $x \in \text{VAR}$ ist $v[x \mapsto a]$ diejenige Belegung w , für die folgendes gilt:

$$w(x) = a \quad \text{und für } y \neq x \quad w(y) = v(y)$$

$v[x \mapsto a]$ heißt auch *Variante* oder genauer *x-Variante* von v .

Bemerkungen:

- (1) Nachdem die Bedeutungen der nicht-logischen Zeichen und der Variablen festgelegt sind, können die Terme und Formeln ausgewertet werden. Das bedeutet: Man bestimmt diejenigen Individuen, auf die Terme verweisen, und den Wahrheitswert von Formeln.
- (2) Die Auswertungen erfolgen immer in Abhängigkeit von einer Belegung in einer vorgegebenen Struktur. Damit spielen Strukturen und Belegungen in der Prädikatenlogik eine ähnliche Rolle wie Wahrheitswertzuordnungen in der Aussagenlogik.

9.3 DEF (Auswertung von Terme): Sei $v : \text{VAR} \rightarrow A$ eine Belegung der Variablen in \mathfrak{A} . Die Auswertung von Termen ist eine Abbildung

$$[[\cdot]]_v^{\mathfrak{A}} : \text{TERM} \rightarrow A$$

die wie folgt über den Aufbau von Termen definiert ist:

- (1) für jedes $n \in \mathbb{N}$: $[[x_n]] := v(x_n)$
- (2) für jedes $i \in I$: $[[c_i]] := c_i$
- (3) für jedes $k \in K$: $[[f_k(t_1, \dots, t_{\sigma(k)})]] := f_k([[t_1]], \dots, [[t_{\sigma(k)}]])$

Bemerkungen:

- (1) Die Indizierung der Semantik-Klammern $[[\cdot]]$ wurde zur leichteren Lesbarkeit der Definition weggelassen. Die Auswertung erfolgt trotzdem immer in Abhängigkeit einer vorgegebenen Struktur und einer Belegung.

- (2) Durch die Definition ist intendiert, dass die jeweiligen Zeichen durch die zugehörige Interpretation in der Struktur ausgewertet werden.
- (3) Man beachte, dass innerhalb der Semantik-Klammern Zeichen des Alphabets stehen (angedeutet durch den Punkt über dem jeweiligen Zeichen), rechts des Gleichheitszeichens jedoch von den ausgezeichneten Objekten und Funktionen der Struktur gesprochen wird.
- (4) Nullstellige Funktionen sind Individuen.

Beispiel (Terme in der Gruppentheorie): Es werden einige Terme in der $\mathcal{L}_{G'}$ -Struktur $\mathfrak{Z}' = \langle \mathbb{Z}, +, -, \leq, 0 \rangle$ unter der Belegung $v : \text{VAR} \rightarrow \mathbb{Z} : x_n \mapsto n$ schrittweise ausgewertet:

- (1) $\llbracket \dot{f}_+(\dot{c}_0, \dot{c}_0) \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}'} = \llbracket \dot{c}_0 \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}'} + \llbracket \dot{c}_0 \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}'} = 0 + 0 = 0$
- (2) $\llbracket \dot{f}_-(x_1) \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}'} = -\llbracket x_1 \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}'} = -v(x_1) = -1$
- (3) $\llbracket \overline{(x_2 + \overline{x_3})} \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}'} = -\llbracket (x_2 + \overline{x_3}) \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}'} = -(\llbracket x_2 \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}'} + \llbracket \overline{x_3} \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}'})) = -(\llbracket x_2 \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}'} + (-\llbracket x_3 \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}'}))$
 $= -(v(x_2) + (-v(x_3))) = -(2 + (-3)) = -(-1) = 1$

Die ersten beiden Beispiele wurden formal korrekt aufgeschrieben; für das letzte Beispiel wurden die Schreiberleichterungen verwendet.

Mithilfe der Auswertung der Terme können nun die Formeln der Sprache \mathcal{L} ausgewertet werden. Die Auswertung einer Formel ist immer ein Wahrheitswert.

9.4 DEF (Auswertung von Formel): Sei $v : \text{VAR} \rightarrow A$ eine Belegung der Variablen in \mathfrak{A} . Die Auswertung von Formeln ist eine Abbildung

$$\llbracket \cdot \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} : \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1\}$$

die wie folgt über den Aufbau von Formeln definiert ist:

- (1) $\llbracket \perp \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} := 0$
- (2) $\llbracket t_1 = t_2 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 1 \quad :\Leftrightarrow \quad \llbracket t_1 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \llbracket t_2 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}$
- (3) für jedes $l \in L$: $\llbracket \dot{R}_l(t_1, \dots, t_{\tau(l)}) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 1 \quad :\Leftrightarrow \quad \langle \llbracket t_1 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_{\tau(l)} \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \rangle \in R_l$
- (4) $\llbracket \phi \circ \psi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} := f_{\circ}(\llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}, \llbracket \psi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}})$
 und $\llbracket \neg \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} := f_{-}(\llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}})$
- (5) $\llbracket \forall x \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 1 \quad :\Leftrightarrow \quad$ für jedes $a \in A$ gilt: $\llbracket \phi \rrbracket_{v[x \mapsto a]}^{\mathfrak{A}} = 1$
 und $\llbracket \exists x \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 1 \quad :\Leftrightarrow \quad$ es gibt ein $a \in A$ gilt: $\llbracket \phi \rrbracket_{v[x \mapsto a]}^{\mathfrak{A}} = 1$

Bemerkungen:

- (1) Die Auswertung von Formeln funktioniert analog zur Auswertung von Termen. Entsprechend wird das gleiche Symbol verwendet; die Bemerkungen zur Auswertung von Termen gelten analog.
- (2) Klausel (5) führt den Wahrheitswert einer quantifizierten Formel auf den Wahrheitswert einer offenen Formel zurück. Das stellt den wesentlichen Grund für die Einführung von Belegungen dar. Würden wir Variablen nicht mithilfe von Belegungen eine (künstliche) Bedeutung zuweisen, könnten durch All- oder Existenzquantifikation entstehende Formeln nicht interpretiert werden. Selbst dann nicht, wenn sie keine freien Variablen enthalten.

Im Gegensatz zu anderen Ansätzen (vgl. etwa van Dalen) benötigen wir zur Auswertung der Quantoren keine objektsprachlichen Namen für jedes Objekt des Universums und ersparen uns damit die Betrachtung von Spracherweiterungen. (Um etwa eine quantifizierte Aussage in der additiven Gruppe der reellen Zahlen auszuwerten, muss bei diesem Ansatz die Sprache \mathcal{L}_G der Gruppentheorie um Namenszeichen für jede reelle Zahl erweitert werden.)

Natürlich müssen wir in der Metasprache über die Objekte des Universums sprechen und quantifizieren können, um die Quantoren \forall und \exists auswerten zu können.

- (3) Der Allquantor hätte über das Minimum der entsprechenden Auswertungen, der Existenzquantor über das Maximum definiert werden können. Damit wird deutlich, dass ersterer den Junktor \wedge und letzterer den Junktor \vee verallgemeinert.
- (4) Nullstellige Relationen sind Wahrheitswerte. Einstellige Relationen sind Eigenschaften von Individuen.

Das folgende Koinzidenz-Lemma sagt aus, dass zur Auswertung einer Formel eine Belegung nur auf den freien Variablen der Formel betrachtet werden muss. Insbesondere sind damit die Auswertungen von Aussagen ϕ ($FV(\phi) = \emptyset$) unter allen Belegungen gleich.

9.5 Koinzidenz-Lemma: Für alle Terme t und Formeln ϕ von \mathcal{L} und allen \mathcal{L} -Strukturen \mathfrak{A} gilt: Sind v, w zwei Belegungen, die auf den freien Variablen von ϕ (bzw. t) übereinstimmen, dann gilt schon:

$$\llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \llbracket \phi \rrbracket_w^{\mathfrak{A}} \quad (\text{bzw. } \llbracket t \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \llbracket t \rrbracket_w^{\mathfrak{A}})$$

Bew.:

Zunächst wird die Behauptung für Terme gezeigt:

Dies ist für Individuen-Konstanten c und Variablen x trivial.

Sei also $t \simeq f(t_1, \dots, t_n)$ für Terme t_1, \dots, t_n und seien v, w zwei Belegungen, die auf den freien Variablen von t übereinstimmen.

Insbesondere stimmen die Belegungen jeweils auch auf den freien Variablen von t_1, \dots, t_n überein und damit kann die IV verwendet werden:

$$\llbracket t \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(\llbracket t_1 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}) \stackrel{(IV)}{=} f^{\mathfrak{A}}(\llbracket t_1 \rrbracket_w^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_w^{\mathfrak{A}}) = \llbracket t \rrbracket_w^{\mathfrak{A}}$$

Damit kann man die Behauptung für beliebige Formeln zeigen:

ϕ atomar: Für $\phi \simeq \perp$ trivial. Für $\phi \simeq \dot{P}(t_1, \dots, t_n)$ oder $\phi \simeq t = s$ verwenden wir die analoge Aussage über Terme.

ϕ komplex: Für aussagenlogische Kombinationen ist die Aussage trivial, da die Auswertung funktional ist. Der einzige interessante Fall ist $\phi \simeq \forall x\psi$ (bzw. $\exists x\psi$), da im Allgemeinen nicht gilt: $FV(\psi) \subseteq FV(\phi)$.

Seien also v, w zwei Belegungen, die auf $FV(\phi)$ übereinstimmen.

$$\llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 1 \iff \text{für jedes } a \in \mathfrak{A} \text{ (bzw. ein } a) \text{ gilt: } \llbracket \psi \rrbracket_{v[x \mapsto a]}^{\mathfrak{A}} = 1$$

$$\stackrel{(\star)}{\iff} \text{für jedes } a \in \mathfrak{A} \text{ (bzw. ein } a) \text{ gilt: } \llbracket \psi \rrbracket_{w[x \mapsto a]}^{\mathfrak{A}} = 1 \iff \llbracket \phi \rrbracket_w^{\mathfrak{A}} = 1$$

(\star) Wir können hier die IV anwenden, da $v[x \mapsto a]$ und $w[x \mapsto a]$ zwei Belegungen sind, die auf $FV(\phi) \cup \{x\} = FV(\psi)$ übereinstimmen.

Damit wurde die Behauptung gezeigt.

Q.E.D.

Mithilfe der Auswertung kann nun die Gültigkeit von Formeln definiert werden.

9.6 DEF (Gültigkeit in Strukturen): Sei $\phi \in \mathcal{L}$ eine Formel.

(1) ϕ ist in einer \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} unter einer Belegung v gültig.

$$:\Leftrightarrow \llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 1. \quad \text{Man schreibt dann: } \mathfrak{A} \models_v \phi$$

Ist dies nicht der Fall, schreibt man auch: $\mathfrak{A} \not\models_v \phi$

(2) ϕ ist in einer \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} gültig (\mathfrak{A} ist ein Modell von ϕ).

$$:\Leftrightarrow \phi \text{ ist in } \mathfrak{A} \text{ unter jeder Belegung } v : \text{VAR} \rightarrow A \text{ gültig.}$$

Man schreibt dann: $\mathfrak{A} \models \phi$

Ist dies nicht der Fall, schreibt man auch: $\mathfrak{A} \not\models \phi$.

(3) Eine \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} ist ein Modell von $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$.

$:\Leftrightarrow$ Für jedes $\phi \in \Gamma$ gilt: $\mathfrak{A} \models \phi$. Man schreibt dann: $\mathfrak{A} \models \Gamma$

Ist dies nicht der Fall, schreibt man auch: $\mathfrak{A} \not\models \Gamma$.

Bemerkung: $\mathfrak{A} \not\models \phi$ bedeutet *nicht*, dass ϕ unter keiner Belegung in \mathfrak{A} gültig ist! Es kann eine Belegung v geben, sodass $\mathfrak{A} \models_v \phi$. Damit ist insbesondere auch $\mathfrak{A} \not\models \phi$ im Allgemeinen *nicht* äquivalent mit $\mathfrak{A} \models \neg\phi$! Vergleiche dazu auch das folgende Beispiel.

Beispiele (Gültigkeit in Strukturen): Wir betrachten die Sprache \mathcal{L}_G der Gruppentheorie.

(1) $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ ist eine \mathcal{L}_G -Struktur. Sei $\phi := x = x + x \in \mathcal{L}_G$ eine Formel und v eine Belegung mit $v(x) = 0 \in \mathbb{Z}$. Es gilt:

$\llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}} = \llbracket x = x + x \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}} = 1$, da in der Struktur \mathfrak{Z} gilt:

$$\llbracket x \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}} = v(x) = 0 = 0 + 0 = v(x) + v(x) = \llbracket x \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}} + \llbracket x \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}} = \llbracket x + x \rrbracket_v^{\mathfrak{Z}}.$$

Also: $\mathfrak{Z} \models_v \phi$.

Für eine Belegung w mit $w(x) = 3$ gilt aber:

$$\llbracket x \rrbracket_w^{\mathfrak{Z}} = w(x) = 3 \neq 3 + 3 = w(x) + w(x) = \llbracket x \rrbracket_w^{\mathfrak{Z}} + \llbracket x \rrbracket_w^{\mathfrak{Z}} = \llbracket x + x \rrbracket_w^{\mathfrak{Z}}.$$

Damit dann: $\llbracket x = x + x \rrbracket_w^{\mathfrak{Z}} = 0$ und $\mathfrak{Z} \not\models_w \phi$.

Aus letzterem folgt wiederum: $\mathfrak{Z} \not\models \phi$.

Das bedeutet: Die offene Formel $x = x + x$ ist zwar unter der Belegung v in \mathfrak{Z} gültig; insgesamt ist sie aber in der Struktur \mathfrak{Z} nicht gültig, \mathfrak{Z} ist also kein Modell der Formel $x = x + x$.

(2) Auch die „wilde“ Struktur $\mathfrak{W} = \langle \mathbb{N}, \min, 5 \rangle$ ist eine \mathcal{L}_G -Struktur. Sei ϕ wie oben und v eine beliebige Belegung. Es gilt nun:

$\llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{W}} = \llbracket x = x + x \rrbracket_v^{\mathfrak{W}} = 1$, da in der Struktur \mathfrak{W} gilt:

$$\llbracket x \rrbracket_v^{\mathfrak{W}} = v(x) = \min\{v(x), v(x)\} = \min\{\llbracket x \rrbracket_v^{\mathfrak{W}}, \llbracket x \rrbracket_v^{\mathfrak{W}}\} = \llbracket x + x \rrbracket_v^{\mathfrak{W}}.$$

Damit gilt unter der Belegung v die Formel $x = x + x$ in der Struktur \mathfrak{W} , in Zeichen: $\mathfrak{W} \models_v x = x + x$.

Da die Belegung v beliebig gewählt war, gilt $\mathfrak{W} \models_v x = x + x$ schon für jede Belegung.

Also: $\mathfrak{W} \models x = x + x$.

Alternative Notation:

(1) Wir schreiben statt $\mathfrak{A} \models_v \phi$ auch: $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \dots, a_n]$, falls folgendes gilt:

$$FV(\phi) = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \text{ und } i_1 < \dots < i_n \text{ und } v(x_{i_k}) = a_k.$$

D.h.: die k -te freie Variable von ϕ wird durch a_k belegt.

(2) Entsprechend verwenden wir die Vektor-Notation: $\mathfrak{A} \models \phi[\vec{a}]$.

9.7 DEF (Erfüllbarkeit): Sei $\phi \in \mathcal{L}$ eine Formel.

- (1) Eine Formel ϕ heißt *erfüllbar (kontingent)*, falls es eine Struktur \mathfrak{A} gibt, in der ϕ gültig ist. D.h.: $\mathfrak{A} \models \phi$.

Ansonsten heißt ϕ *unerfüllbar* oder *Kontradiktion*.

- (2) Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ heißt *erfüllbar*, falls es eine Struktur \mathfrak{A} gibt, sodass jede Formel $\phi \in \Gamma$ in \mathfrak{A} gültig ist. Also:

$$\text{für jedes } \phi \in \Gamma : \mathfrak{A} \models \phi$$

Ansonsten heißt Γ *unerfüllbar*.

9.8 Theorem: Seien $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ Formeln. Dann gilt für jede \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} :

- (1) $\mathfrak{A} \models \neg\phi \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \not\models \phi$.
 (2) $\mathfrak{A} \models \phi$ und $\mathfrak{A} \models \psi$. $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi$
 (3) $\mathfrak{A} \models \phi$ oder $\mathfrak{A} \models \psi$. $\Rightarrow \mathfrak{A} \models \phi \vee \psi$
 (4) $\mathfrak{A} \models \phi \rightarrow \psi \quad \Rightarrow \quad \text{Wenn } \mathfrak{A} \models \phi \text{ dann } \mathfrak{A} \models \psi$.
 (5) $\mathfrak{A} \models \phi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \psi$. $\Rightarrow \mathfrak{A} \models \phi \leftrightarrow \psi$

Die Umkehrungen gelten, wo nicht angegeben, nicht allgemein.

Bew.:

Wir zeigen exemplarisch (1) und (2). Der Rest verbleibt als Übungsaufgabe.

- (1) Es gelte $\mathfrak{A} \models \neg\phi$.

Damit gilt für jede Belegung v : $\mathfrak{A} \models_v \neg\phi$.

Das bedeutet: $\llbracket \neg\phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 1$.

Sei v beliebige Belegung.

$$\llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 1 - \llbracket \neg\phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 1 - 1 = 0$$

Es gilt also für diese Belegung v : $\mathfrak{A} \not\models_v \phi$.

Insgesamt gilt also: $\mathfrak{A} \not\models \phi$.

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Betrachte dazu folgendes Gegenbeispiel:

Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ eine \mathcal{L} -Struktur zu einer beliebigen Sprache \mathcal{L} , wobei $A := \{0, 1\}$ zwei-elementig ist. Für die Formel $\phi := x = y$ gilt: $\mathfrak{A} \not\models \phi$.

(Für eine Belegung v mit $v(x) := 1 \neq 0 =: v(y)$ ist $\llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 0$.)

Es gilt aber auch nicht: $\mathfrak{A} \models \neg\phi$.

(Für eine Belegung v mit $v(x) := 0 =: v(y)$ ist $\llbracket \neg\phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 0$.)

- (2) Es gelte $\mathfrak{A} \models \phi$ und $\mathfrak{A} \models \psi$ für zwei Formeln ϕ und ψ . Damit gilt für jede Belegung v : $\mathfrak{A} \models_v \phi$ und $\mathfrak{A} \models_v \psi$.

Das bedeutet: $\llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \llbracket \psi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 1$. (\star)

Sei v beliebige Belegung.

$$\llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \cdot \llbracket \psi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \stackrel{(\star)}{=} 1 \cdot 1 = 1$$

Das bedeutet: $\mathfrak{A} \models_v \phi \wedge \psi$.

Da v beliebig gewählt war, gilt: $\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi$.

Gilt hingegen $\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi$, dann gilt für eine beliebige Belegung v :

$$\llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \geq \llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \cdot \llbracket \psi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 1$$

Also gilt insbesondere auch $\mathfrak{A} \models \phi$. Analog erhält man auch: $\mathfrak{A} \models \psi$.

Damit wurden beide Richtungen gezeigt.

Q.E.D.

9.9 Theorem: Sind ϕ, ψ \mathcal{L} -Aussagen ($FV(\phi) = FV(\psi) = \emptyset$), dann gilt zusätzlich zu den oben genannten Implikationen auch:

- (1) $\mathfrak{A} \not\models \phi \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \neg \phi$
- (2) $\mathfrak{A} \models \phi \vee \psi \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \phi \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A} \models \psi$.
- (3) Wenn $\mathfrak{A} \models \phi$ dann $\mathfrak{A} \models \psi$. $\Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \phi \rightarrow \psi$
- (4) $\mathfrak{A} \models \phi \leftrightarrow \psi \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \phi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \psi$.

Bew.:

Es wird die erste Behauptung gezeigt, der Rest verbleibt als Übungsaufgabe.

- (1) Es gelte: $\mathfrak{A} \not\models \phi$.

Damit gibt es (mindestens) eine Belegung w , so dass: $\mathfrak{A} \not\models_w \phi$.

Also $\llbracket \phi \rrbracket_w^{\mathfrak{A}} = 0$. Damit gilt auch: $\llbracket \neg \phi \rrbracket_w^{\mathfrak{A}} = 1 - \llbracket \phi \rrbracket_w^{\mathfrak{A}} = 1 - 0 = 1$.

Sei v beliebige Belegung.

Da $FV(\neg \phi) = FV(\phi) = \emptyset$ folgt mit dem Koinzidenz-Lemma:

$$\llbracket \neg \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \llbracket \neg \phi \rrbracket_w^{\mathfrak{A}} = 1$$

Da v beliebig gewählt, gilt auch $\mathfrak{A} \models \neg \phi$.

Q.E.D.

9.10 DEF (Allabschluss): Sei $\phi \in \mathcal{L}$ Formel, so dass $FV(\phi) = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ mit $i_1 < \dots < i_n$. Die Aussage $\forall(\phi) := \forall x_{i_1} \dots \forall x_{i_n} \phi \in \mathcal{L}$ heißt dann der *Allabschluss* von ϕ .

9.11 Lemma (Allabschluss): Sei $\phi \in \mathcal{L}$ beliebige Formel. In jeder \mathcal{L} -Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \forall(\phi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \phi$$

Bew.:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\forall(\phi) \doteq \forall x_1, \dots, \forall x_n$. Wir schreiben \vec{x} für $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

„ \Rightarrow “ Sei v eine beliebige Belegung. Es gilt $v(\vec{x}) = \vec{b}$ für ein $\vec{b} \in A^n$.

Aus $\mathfrak{A} \models \forall(\phi)$ folgt: $\mathfrak{A} \models_v \forall(\phi)$. Also: $\llbracket \forall(\phi) \rrbracket_{\mathfrak{A}} = 1$.

Das bedeutet: für alle $\vec{a} \in A^n$: $\llbracket \phi \rrbracket_{v[\vec{x} \mapsto \vec{a}]} = 1$.

(n -fache Auswertung des Allquantors.)

Insbesondere gilt damit auch: $\llbracket \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}} \stackrel{(\star)}{=} \llbracket \phi \rrbracket_{v[\vec{x} \mapsto \vec{b}]} = 1$.

(\star) $v = v[\vec{x} \mapsto \vec{b}]$.

„ \Leftarrow “ Falls $\mathfrak{A} \not\models \forall(\phi)$, dann gibt es Belegung v und ein $\vec{a} \in A^n$ mit $\llbracket \phi \rrbracket_{v[\vec{x} \mapsto \vec{a}]} = 0$.

Damit wurde mit $v[\vec{x} \mapsto \vec{a}]$ eine Belegung gefunden, unter der ϕ mit 0 ausgewertet wurde. Damit gilt schon: $\mathfrak{A} \not\models \phi$. Q.E.D.

§ 10 Sätze zur Semantik

In diesem Abschnitt werden folgende Themen behandelt: Folgerungsbegriff, Substitution, Tautologien und Pränexe Normalformen.

10.1 DEF (allgemeingültig): Eine Formel $\phi \in \mathcal{L}$ heißt *allgemeingültig* (*tautologisch*), falls ϕ in jeder \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} gültig ist.

Man schreibt dann: $\models \phi$.

Bemerkung: Ist eine Formel $\neg\phi \in \mathcal{L}$ allgemeingültig, dann ist ϕ selbst *kontradiktorisch* (vgl. DEF 9.7). $\not\models \phi$ ist jedoch nicht hinreichend dafür, dass ϕ eine Kontradiktion ist.

10.2 DEF (AL-Form): Eine Formel ϕ hat die *Aussagenlogische-Form* ψ (*AL-Form* ψ), falls ψ eine AL-Formel ist und ϕ durch geeignete Substitution der Aussagevariablen von ψ entsteht. Es gibt also für ψ mit $\text{ATM}(\psi) = \{p_1, \dots, p_n\}$ prädikatenlogische Formeln $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{L}$, so dass folgendes gilt:

$$\phi \simeq \psi[\phi_1, \dots, \phi_n/p_1, \dots, p_n]$$

Beispiele:

- (1) Jede prädikatenlogische Formel $\phi \in \mathcal{L}$ hat trivialerweise die AL-Form p_1 , da: $\phi \simeq p_1[\phi/p_1]$.
- (2) $\forall x : x = x \rightarrow (\exists x : x = x \rightarrow \forall x : x = x)$ hat unter anderem die AL-Form $p_1 \rightarrow p_2$ und auch die AL-Form $p_2 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$.

Insbesondere ist die AL-Form einer Formel $\phi \in \mathcal{L}$ nicht eindeutig gegeben.

10.3 Theorem (AL-Tautologie): Hat eine Formel $\phi \in \mathcal{L}$ die AL-Form einer aussagenlogischen Tautologie ψ , dann ist sie (im Sinne der Prädikatenlogik) allgemeingültig.

Bew. (Skizze):

Es gelte für geeignete Formeln: $\phi \simeq \psi[\phi_1, \dots, \phi_n/p_1, \dots, p_n]$.

Sei dann \mathfrak{A} eine beliebige \mathcal{L} -Struktur und v eine beliebige Belegung der Variablen in \mathfrak{A} . Ferner sei w_v eine aussagenlogische Wahrheitswertzuordnung, so dass für jedes $1 \leq k \leq n$ folgendes gilt: $w_v(p_k) := \llbracket \phi_k \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}$

Mit einer leichten Induktion läßt sich zeigen: $\llbracket \phi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \llbracket \psi \rrbracket_{w_v} = 1$

Da v beliebig gewählt wurde, gilt also: $\mathfrak{A} \models \phi$.

Da \mathfrak{A} beliebig gewählt war, gilt insgesamt: $\models \phi$.

Q.E.D.

Beispiel: Die Formel $\forall x\phi \rightarrow (\exists x(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow \forall x\phi)$ ist allgemeingültig (für beliebige Formeln $\phi, \psi, \sigma \in \mathcal{L}$), da sie die AL-Form $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ hat und das eine AL-Tautologie ist.

10.4 DEF (Folgerung): Eine Formel $\phi \in \mathcal{L}$ folgt aus einer Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, falls für jede \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} und dort für jede Belegung v gilt:

$$\mathfrak{A} \models_v \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models_v \phi$$

Man schreibt dann: $\Gamma \models \phi$.

Bemerkungen:

- (1) Es genügt nicht, solche Strukturen zu betrachten, in denen Γ gültig ist. Insbesondere müssen auch in Strukturen \mathfrak{A} mit $\mathfrak{A} \not\models \Gamma$ solche Belegungen v betrachtet werden, unter denen gilt: $\mathfrak{A} \models_v \Gamma$.
- (2) Mithilfe des Koinzidenz-Lemmas kann die Definition für Aussagen vereinfacht werden:
Für $\phi \in \mathcal{L}$ Aussage und $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ Aussagenmenge gilt: $\Gamma \models \phi$
 \Leftrightarrow Für jede \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} gilt: $\mathfrak{A} \models \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \phi$
- (3) Vergleicht man diese Definition mit der aussagenlogischen Folgerung, wird die Parallele zwischen den Wahrheitswertzuordnungen einerseits und den Strukturen und Belegungen andererseits deutlich.
- (4) Ist $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ endlich, dann schreiben wir auch $\psi_1, \dots, \psi_n \models \phi$ statt $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \models \phi$
- (5) Sind $\Delta, \Gamma \subseteq \mathcal{L}$ zwei Formelmengen und $\phi \in \mathcal{L}$ eine Formel, dann folgt aus $\Delta \subseteq \Gamma$ und $\Delta \models \phi$ schon $\Gamma \models \phi$.
- (6) Die logische Folgerung ist bei uns für Formeln mit freien Variablen so definiert, dass sie für jede einzelne Belegung gilt. Häufig wird der Begriff der logischen Folgerung nur für Aussagen definiert.

10.5 Lemma (Import-Export): Sei $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ Formelmenge, $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ zwei Formeln. Dann gilt: $\Delta \cup \{\psi\} \models \phi$ genau dann, wenn $\Delta \models \psi \rightarrow \phi$

Bew.:

„ \Rightarrow “ Sei \mathfrak{A} eine \mathcal{L} -Struktur, v eine Belegung, so dass $\mathfrak{A} \models_v \Delta$. Falls $\mathfrak{A} \not\models_v \psi$, dann gilt schon $\mathfrak{A} \models_v \psi \rightarrow \phi$. Gilt hingegen $\mathfrak{A} \models_v \psi$, dann folgt aus $\Delta \cup \{\psi\} \models \phi$ zunächst $\mathfrak{A} \models_v \phi$ und wieder $\mathfrak{A} \models_v \psi \rightarrow \phi$.

„ \Leftarrow “ Analog.

Q.E.D.

10.6 DEF (logisch-äquivalent): Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ heißen *logisch-äquivalent* ($\phi \equiv \psi$), falls folgendes gilt: $\phi \models \psi$ und $\psi \models \phi$.

Bemerkung: Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ sind genau dann logisch-äquivalent, wenn $\models \phi \leftrightarrow \psi$ gilt.

10.7 Satz (Quantoren): Für alle \mathcal{L} -Formeln ϕ und alle Variablen x gelten folgende Beziehungen:

- (1) $\exists x\phi \models \neg\forall x\neg\phi$ und $\forall x\phi \models \neg\exists x\neg\phi$
- (2) $\forall x\forall y\phi \models \forall y\forall x\phi$ und $\exists x\exists y\phi \models \exists y\exists x\phi$
- (3) $\exists x\forall y\phi \models \forall y\exists x\phi$

Die Umkehrung gilt nicht im Allgemeinen. Es gibt also Formeln ϕ mit:

$$\forall x\exists y\phi \not\models \exists y\forall x\phi$$

Bew.: Verbleibt als Übungsaufgabe.

Q.E.D.

Im Folgenden soll die Substitution definiert werden. Wieder muss man diese zuerst für Terme definieren, um dann die Definition auf Formeln erweitern zu können. Auf eine exakte (rekursive) Definition, wie in der Aussagenlogik gemacht, wird hier zugunsten der leichteren Lesbarkeit verzichtet.

10.8 DEF (Substitution): Die Substitution ist wie folgt definiert:

- (1) Sei $t, s \in \text{TERM}$, x eine Variable: $t[s/x]$ ist derjenige Term, in der jedes Vorkommen von x in t durch s ersetzt wurde.
- (2) Sei $\phi \in \mathcal{L}$, $s \in \text{TERM}$ und x eine Variable: $\phi[s/x]$ ist diejenige Formel, in der jedes freie (!) Vorkommen der Variablen x in der Formel ϕ durch den Term s ersetzt wurde.
- (3) Sei $\phi \in \mathcal{L}$, $s_1, \dots, s_n \in \text{TERM}$ und x_1, \dots, x_n paarweise verschieden Variablen: $\phi[s_1/x_1, s_2/x_2, \dots, s_n/x_n] \simeq \phi[\vec{s}/\vec{x}]$ ist diejenige Formel, in der simultan alle freien Vorkommen der Variablen x_1, \dots, x_n in der Formel ϕ durch die entsprechenden Terme ersetzt wurden.
- (4) Sei $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ eine Formelmengde, $s \in \text{TERM}$ und x eine Variable:

$$\Gamma[s/x] := \{\phi[s/x]; \phi \in \Gamma\}$$

Konvention (Notation der Substitution): Es wird für die Substitution eine informelle, suggestive Notation verwendet:

Wird an einer Stelle $\phi(x_1, \dots, x_n)$ geschrieben, bedeutet dies, dass in der Formel ϕ die Variablen x_1, \dots, x_n vorkommen können. Wird dann im selben Kontext $\phi(t_1, \dots, t_n)$ geschrieben, dann wird damit die simultane Substitution durch die Terme t_1, \dots, t_n angedeutet.

Bemerkungen:

- (1) Man beachte, dass bei der Substitution nur freie Vorkommen einer Variablen ersetzt werden. Gebundene Vorkommen der Variablen bleiben unverändert.
- (2) Wie schon in der Aussagenlogik unterscheidet sich die mehrfache Hintereinanderausführung von Substitutionen von der simultanen Substitution. Analoge Beispiele wie in der Aussagenlogik lassen sich leicht angeben.
- (3) Eine Formel kann bei Substitution ihre Bedeutung wesentlich verändern; dies geschieht, wenn durch die Substitution neue Variablen in den Wirkungsbereich von Quantoren kommen. Betrachte dazu folgende Formel:

$$\phi := \exists x : x = 1 + y$$

Unabhängig von der Belegung der Variablen y gilt diese Formel in den natürlichen Zahlen.

- $\phi[z/y] \simeq \exists x : x = 1 + z$
Hier hat sich offenbar an der Wahrheit der Formel nichts geändert.
- $\phi[x/y] \simeq \exists x : x = 1 + x$
Diese Formel ist in den natürlichen Zahlen nicht mehr gültig; ihr Wahrheitswert hat sich verändert.

Die Substitution sollte aber wahrheitskonservierend sein.

Die letzte Bemerkung motiviert zu folgender Definition.

10.9 DEF (frei einsetzbar): Ein Term t ist in einer Formel ϕ frei einsetzbar für die Variable x , falls:

- (1) ϕ atomar ist,
- (2) falls $\phi \simeq \psi \circ \sigma$ und t sowohl in ψ als auch in σ für x frei einsetzbar ist,
- (3) falls $\phi \simeq \neg\psi$ und t in ψ für x frei einsetzbar ist oder
- (4) falls $\phi \simeq Qy\psi$ für einen Quantor Q und es gilt:
 - $x \notin \text{FV}(\phi)$ oder (!)
 - $y \notin \text{FV}(t)$ und t ist frei einsetzbar für x in ψ .

Das bedeutet: durch die Substitution gerät keine Variable in den Wirkungsbereich eines Quantors, der diese Variable binden würde.

Konvention: Im Folgenden wird bei Substitutionen immer vorausgesetzt, dass freie Einsetzbarkeit vorliegt.

10.10 Überführungs-Lemma: Sei $\phi(x) \in \mathcal{L}$ beliebige Formel, t ein Term, der in ϕ für die Variable x frei einsetzbar ist. Dann gilt für jede \mathcal{L} -Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ und jede Belegung v :

$$\llbracket \phi(t) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \llbracket \phi(x) \rrbracket_{v[x \mapsto \llbracket t \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}]}^{\mathfrak{A}}$$

Bew.:

Durch Induktion. Verbleibt als Übung.

Q.E.D.

Eng verwandt mit der Substitution ist das Konzept der *gebundenen Umbenennung*. Dabei geht es darum, logisch gleichwertige *Varianten* von Formeln zu konstruieren, in denen die Variablen, die durch Quantoren gebunden sind, umbenannt werden.

10.11 DEF (Variante): Sei $\phi \in \mathcal{L}$ beliebige Formel.

- (1) Sei $Qx\psi(x) \preceq \phi$ für einen Quantor $Q \in \{\forall, \exists\}$ eine Teilformel von ϕ und y eine Variable, die in ϕ nicht vorkommt (weder gebunden noch frei).
Die Formel ϕ' , die aus ϕ entsteht, indem die Teilformel $Qx\psi(x)$ durch die Formel $Qy\psi(y)$ ersetzt wurde, heißt *einfache Variante* von ϕ .
Diese Ersetzung von Teilformel wird *gebundene Umbenennung* genannt.
- (2) Entsteht ϕ' durch beliebig häufige Anwendung der gebundenen Umbenennung aus ϕ , so heißt ϕ' Variante von ϕ .
- (3) Eine Formelmengen $\Gamma' \subseteq \mathcal{L}$ heißt Variante einer Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, falls sie folgendes erfüllt:
 - (a) Jede Formel $\phi' \in \Gamma'$ ist Variante einer Formel $\phi \in \Gamma$.
 - (b) Für jede Formel $\phi \in \Gamma$ gibt es eine Formel $\phi' \in \Gamma'$, so dass ϕ' eine Variante von ϕ ist.

Bemerkungen:

- (1) Durch die gebundene Umbenennung kann man erreichen, dass zu einer vorgegebenen Formel ϕ und einem Term t eine Variante von ϕ gefunden wird, in der t frei einsetzbar ist.
- (2) Variantenbildung ist nicht symmetrisch.
So ist etwa die Formel $\psi := \forall x : x = x \wedge \forall y : y = y$ eine Variante der Formel $\phi := \forall x : x = x \wedge \forall x : x = x$.
Da aber bei der Varianten-Bildung nur neue Variablen zugelassen sind und jeweils nur ein Vorkommen eines Quantors ersetzt wird, kann ϕ keine Variante von ψ sein.
- (3) Ist eine Formel $\psi \in \mathcal{L}$ Variante einer Formel $\phi \in \mathcal{L}$, dann sind ϕ und ψ logisch-äquivalent. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

- (4) Vorsicht: Die Variante Γ' einer Formelmenge Γ muss nicht die gleiche Kardinalität haben wie die ursprüngliche Menge.

So ist $\{\phi' \in \mathcal{L} : \phi' \text{ ist Variante von } \forall x : x = x\}$ eine unendlich große Variante der einelementigen Menge $\{\forall x : x = x\}$.

Ebenfalls kann die Variante einer Menge echt kleiner als die ursprüngliche Menge werden, falls in der ursprünglichen Menge verschiedene Varianten einer Formel enthalten sind. So ist $\{\forall x : x = x\}$ eine Variante der Menge $\{\forall x : x = x, \forall y : y = y\}$.

Zum Abschluss dieses Abschnittes werden pränexe Normalformen von Formeln diskutiert. Um die Beweise zu vereinfachen, wird ab hier angenommen, dass neben den beiden Quantoren \forall und \exists lediglich \perp und \rightarrow als Junktoren in der Sprache vorkommen. Die anderen Junktoren werden als abkürzende Schreibweisen verstanden.

10.12 DEF (PNF): Eine Formel ϕ heißt *Pränexe Normalform* (PNF), falls sie der Form $\phi \simeq Q_1 x_{n_1} \dots Q_k x_{n_k} \psi$ ist, wobei die Q_i beliebige Quantoren und ψ eine quantorenfreie Formel sind. Der Quantorenblock wird auch *Präfix* und die Formel ψ als *Kern* oder *Matrix von ϕ* bezeichnet.

Zur Konstruktion einer PNF zu einer beliebigen Formel werden einige logische Äquivalenzen benötigt:

10.13 Theorem (Logische Äquivalenzen): Seien $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ beliebige Formeln. x eine Variable, so dass $x \notin \text{FV}(\psi)$. Dann gelten folgende Äquivalenzen:

- (1) $\forall x(\psi \rightarrow \phi) \models (\psi \rightarrow \forall x\phi)$
- (2) $\exists x(\psi \rightarrow \phi) \models (\psi \rightarrow \exists x\phi)$
- (3) $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \models (\exists x\phi \rightarrow \psi)$
- (4) $\exists x(\phi \rightarrow \psi) \models (\forall x\phi \rightarrow \psi)$

Bew.:

Wir zeigen exemplarisch (1), der Rest verbleibt als Übung.

Sei dazu $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ beliebige Struktur, v beliebige Belegung. Es ist zu zeigen:

$$\mathfrak{A} \models_v \forall x(\psi \rightarrow \phi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models_v \psi \rightarrow \forall x\phi$$

„ \Rightarrow “ Es gelte also: $\mathfrak{A} \models_v \forall x(\psi \rightarrow \phi)$. Angenommen $\mathfrak{A} \not\models_v \psi \rightarrow \forall x\phi$.

Dann muss gelten: $\mathfrak{A} \models_v \psi$ und es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \not\models_{v[x \mapsto a]} \phi(x)$.

Da $x \notin \text{FV}(\psi)$ gilt mit dem Koinzidenz-Lemma: $\mathfrak{A} \models_{v[x \mapsto a]} \psi$

Damit wurde aber ein $a \in A$ gefunden mit: $\mathfrak{A} \not\models_{v[x \mapsto a]} \psi \rightarrow \phi$

Das ist ein WIDERSPRUCH zu: $\mathfrak{A} \models_v \forall x(\psi \rightarrow \phi)$

„ \Leftarrow “ Es gelte nun $\mathfrak{A} \models_v \psi \rightarrow \forall x\phi$. Angenommen $\mathfrak{A} \not\models_v \forall x(\psi \rightarrow \phi)$.

Dann gibt es ein $a \in A$ mit: $\mathfrak{A} \not\models_{v[x \mapsto a]} (\psi \rightarrow \phi)$. (\star)

Damit gilt insbesondere: $\mathfrak{A} \models_{v[x \mapsto a]} \psi$.

Und mit Koinzidenz-Lemma auch: $\mathfrak{A} \models_v \psi$.

Nach Voraussetzung muss also auch gelten: $\mathfrak{A} \models_v \forall x\phi$

Nach (\star) gilt aber: $\mathfrak{A} \not\models_{v[x \mapsto a]} \phi$.

Was ein WIDERSPRUCH ist.

Damit wurden beide Richtungen der Äquivalenz gezeigt.

Q.E.D.

Bemerkung: Aus (3) ergibt sich leicht, dass die Formel $\exists x(\phi(x) \rightarrow \forall y\phi(y))$ allgemeingültig ist. Das erscheint auf den ersten Blick paradox. Man mache sich semantisch klar, warum diese Formel allgemeingültig ist.

10.14 Theorem (PNF): Zu jeder Formel $\phi \in \mathcal{L}$ gibt es eine logisch-äquivalente Formel $\psi \in \mathcal{L}$, so dass ψ eine pränex Normalform ist und dieselben freien Variablen wie ϕ hat ($\text{FV}(\phi) = \text{FV}(\psi)$).

Bew.:

Um die Behauptung zu beweisen, sollen die Äquivalenzen aus obigem Theorem verwendet werden. Dazu muss sichergestellt werden, dass die Variablen-Bedingungen erfüllt sind. Dies erreicht man durch geeignete Varianten der zu betrachtenden Formeln. Der Beweis erfolgt durch Induktion über den Formelaufbau.

ϕ ist atomar: Dann ist ϕ schon in PNF und es ist nichts zu zeigen.

IV: Zu ψ und σ gibt es geeignete Formeln ψ' und σ' in PNF.

$\phi \simeq \forall x\psi$: Die Formel $\forall x\psi'$ ist in PNF.

Ebenfalls gilt $\text{FV}(\phi) = \text{FV}(\forall x\psi')$ und $\models \phi \leftrightarrow \forall x\psi'$.

$\phi \simeq \psi \rightarrow \sigma$: Mit der IV erhalten wir geeignete ψ' und σ' in PNF. Es gilt also:

$$\psi' \simeq Q_1 1x_1 \dots Q_n x_n \psi'' \quad \text{und} \quad \sigma' \simeq Q_{n+1} x_{n+1} \dots Q_{n+m} x_{n+m} \sigma''$$

für geeignete $n, m \in \mathbb{N}$ und $\psi'', \sigma'' \in \mathcal{L}$ quantorenfrei.

Seien y_1, \dots, y_{n+m} paarweise verschiedene, neue Variablen, die alle nicht in $\phi' \simeq \psi' \rightarrow \sigma'$ vorkommen. (Solche Variablen gibt es, da die Formel endlich lang ist und unendlich viele Variablen zur Verfügung stehen.)

Insbesondere gilt für $1 \leq i \leq n+m$ damit: $y_i \notin \text{FV}(\phi')$ (\star)

Sei ϕ''' das Resultat der gebundenen Umbenennung der Quantoren $Q_i x_i$ in $Q_i y_i$ in der Formel ϕ'' .

Nun können alle Quantoren von ϕ''' der Reihe nach mit Theorem 10.13 vor die Formel gezogen werden, da aufgrund von (\star) die Variablen-Bedingung erfüllt ist.

Das Resultat $\tilde{\phi}$ hat dieselben freien Variablen wie ϕ , beide Formeln sind logisch-äquivalent und $\tilde{\phi}$ ist eine PNF.

Q.E.D.

Bemerkung:

- (1) Die PNF zu einer Formel ϕ ist nicht eindeutig bestimmt. Es kommt auf die Umbenennung der gebundenen Variablen an; auf die Reihenfolge, in der die einzelnen Quantoren nach vorne gezogen werden, und schließlich kann man die innere Formel ψ auch durch logisch-äquivalente Formeln ersetzen.
- (2) Der Satz deutet nur an, wie man praktisch bei einer gegebenen Formel ϕ eine geeignete PNF findet. In der Praxis werden zuerst alle gebundenen Variablen wie im Fall \rightarrow umbenannt. Anschließend ist eine Umbenennung nicht mehr notwendig und die Quantoren können schrittweise aus den einzelnen Teilformeln herausgezogen werden.
- (3) Verwendet man weitere Junktoren in der Sprache, kann man diese entweder alle durch \rightarrow und \perp ausdrücken oder man benötigt weitere logische Äquivalenzen, um die Quantoren aus den Teilformeln herauszuziehen.

§ 11 Syntaktisches Schließen

Der Kalkül des Natürlichen Schließens wird in diesem Abschnitt auf die Prädikatenlogik erweitert. Es werden formal wieder mehrere verschiedene Kalküle eingeführt, die sich durch die verwendeten Schlussregeln unterscheiden. Diese bezeichnen wir aber alle als Kalkül des Natürlichen Schließens.

Vorbemerkungen:

- (1) Der Kalkül aus der Aussagenlogik wird hier erweitert. Das bedeutet, dass alle Schlussregeln für Junktoren aus der Aussagenlogik unverändert übernommen werden.

Sätze, in denen lediglich über Junktoren gesprochen wurde, können aus der Aussagenlogik direkt in die Prädikatenlogik übertragen werden und bleiben damit hier erhalten.

- (2) Die auf den Schlussregeln eines Kalküls aufbauenden Definitionen (etwa: Ableitung, Hypothesenmenge oder Ableitbarkeit) müssen für jeden neuen Kalkül in Abhängigkeit der dort vorhandenen Schlussregeln separat definiert werden.

Diese Definitionen erfolgen völlig schematisch in Analogie zu den Definitionen, die in der Aussagenlogik vorgestellt wurden. Entsprechend werden diese Definitionen hier nur noch implizit vorausgesetzt.

- (3) Es wird – soweit nicht anders gesagt – eine formale Sprache \mathcal{L} mit beliebiger Signatur $\langle \sigma, \tau, I \rangle$ vorausgesetzt. Im Alphabet von \mathcal{L} stehen der Allquantor (\forall) und folgende Junktoren zur Verfügung: \perp , \rightarrow und \wedge .

Die Negation wird grundsätzlich als abkürzende Schreibweise verstanden.

Die anderen Junktoren (insbesondere die Disjunktion und die Biimplikation) und auch der Existenzquantor (\exists) werden, solange nichts anders gesagt wird, als Abkürzungen verstanden (es gilt: $\exists x\phi \simeq \neg\forall x\neg\phi$).

In einigen Sätzen – dort wird noch einmal darauf hingewiesen – wird auch die Konjunktion zur Vereinfachung des Beweises als abkürzende Schreibweisen interpretiert.

- (4) Als grobe Regel läßt sich festhalten: Gehören die Schlussregeln bzgl. eines Zeichens zum betrachteten Kalkül, dann wird das Zeichen als zur Sprache gehörend aufgefaßt. In diesem Fall muss die gegenseitige Ableitbarkeit zwischen Formel und Abkürzung – die hier tatsächlich keine ist – bewiesen werden.

Stehen die Regeln im Kalkül nicht zur Verfügung, dann handelt es sich um echte Abkürzungen. In diesem Fall ist die gegenseitige Ableitbarkeit trivial. Das Gelten der gewohnten Schlußregeln hingegen muss bewiesen werden.

- (5) Gelegentlich wird im Folgenden aus Platzgründen bei konkreten Ableitungen auf die Notation der verwendeten Schlussregel verzichtet; diese läßt sich aber leicht aus dem Kontext ergänzen.

Bemerkung: Die Schlussregeln für Quantoren erfordern eine gewisse Vorsicht beim Umgang mit den Variablen. Näheres steht bei den einzelnen Regeln. Die Regeln werden jeweils zweimal angegeben: links in informeller und rechts in „offizieller“ Notation.

11.1 DEF (Regeln für Quantoren): Für die Quantoren gelten folgende Regeln:

- (1) Einführung des Allquantors:

$$\frac{\mathcal{D} \quad \phi(x)}{\forall x \phi(x)} (\forall I) \qquad \frac{\mathcal{D} \quad \phi}{\forall x \phi} (\forall I)$$

Die Variable x darf in keiner Annahme, von der ϕ abhängt, frei vorkommen. (Es muss gelten: $\sigma \in \text{Hyp}(\mathcal{D}) \Rightarrow x \notin \text{FV}(\sigma)$)

- (2) Beseitigung des Allquantors:

$$\frac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)} (\forall E) \qquad \frac{\forall x \phi}{\phi[t/x]} (\forall E)$$

In der Formel $\phi(x)$ muss t frei einsetzbar für x sein.

- (3) Einführung des Existenzquantors:

$$\frac{\phi(t)}{\exists x \phi(x)} (\exists I) \qquad \frac{\phi[t/x]}{\exists x \phi} (\exists I)$$

Hier wird vom Resultat einer Substitution auf die ursprüngliche Formel geschlossen, die zudem quantifiziert wird. Die ursprüngliche Formel $\phi(x)$ (bzw. die Variable x) muss so gewählt werden, dass der Term t frei einsetzbar ist für x .

Beispiel:

$$\frac{\forall y(z = y \rightarrow y = z)}{\exists x \forall y((x = y) \rightarrow (y = x))} (\exists I) \quad \simeq \quad \frac{\phi(z)}{\exists x \phi(x)} (\exists I)$$

In der Formel $\phi(x) \simeq \forall y(x = y \rightarrow y = x)$ ist der Term $t \simeq z$ frei einsetzbar für x . Entsprechend darf man von der Prämisse $\phi(z)$ aus schließen.

Anstatt von $\phi(z)$ hätte man auch von $\phi(x)$ aus schließen können, da in $\phi(x)$ auch x frei einsetzbar ist.

- (4) Beseitigung des Existenzquantors:

$$\frac{\begin{array}{c} [\phi] \\ \mathcal{D} \\ \exists x\phi(x) \end{array} \quad \psi}{\psi} (\exists E) \qquad \frac{\begin{array}{c} [\phi] \\ \mathcal{D} \\ \exists x\phi \end{array} \quad \psi}{\psi} (\exists E)$$

Die Variable x darf weder in ψ noch in den offenen Annahmen von \mathcal{D} – abgesehen von ϕ selbst – frei vorkommen.

(Es muss gelten: $\sigma \in (\text{Hyp}(\mathcal{D}) \setminus \{\phi(x)\}) \cup \{\psi\} \Rightarrow x \notin \text{FV}(\sigma)$)

11.2 DEF (Der Kalkül NK'): Der Kalkül, der aus folgenden Schlussregeln besteht, wird mit NK' bezeichnet:

- (1) Schlussregeln für die Junktoren \wedge, \rightarrow und die RAA
- (2) Schlussregeln für den Quantor \forall

Bemerkungen:

- (1) Im Kalkül NK' gibt es keine Regeln für den Umgang mit dem Gleichheitszeichen. Damit wurde aber nicht gefordert, dass das Gleichheitszeichen in der zugrundeliegenden Sprache \mathcal{L} nicht vorkommt.

Tatsächlich gehört das Gleichheitszeichen immer zum Alphabet einer formalen Sprache. In diesem Kalkül kommen lediglich die Eigenschaften der Identität im Kalkül nicht zum Tragen.

- (2) Wie schon in der Aussagenlogik kann der Kalkül NK' erweitert werden. Der Kalkül, der um die Regeln für die Disjunktion, die Biimplikation und den Existenzquantor erweitert wurde, wird mit NK bezeichnet.

Im Kontext von NK geht man davon aus, dass alle Junktoren (bis auf die Negation) und die Quantoren genuin zur Sprache gehören. Im Kontext von NK' hingegen werden auch der Existenzquantor, die Disjunktion und die Biimplikation als abkürzende Schreibweisen verstanden.

Wir haben in der Semantik gesehen, dass der Existenzquantor dort durch den Allquantor und der Negation ausgedrückt werden kann. Hier wird im Folgenden dieser Zusammenhang im Kalkül des Natürlichen Schließens diskutiert. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- (1) Der Existenzquantor gehört genuin zum Alphabet der formalen Sprache und hat eigene Schlussregeln. Auf dieser Grundlage wird im Kalkül NK gezeigt:

$$\exists x\phi \dashv\vdash \neg\forall x\neg\phi \quad \text{und} \quad \forall x\phi \dashv\vdash \neg\exists x\neg\phi$$

- (2) Im anderen Fall ist der Existenzquantor eine abkürzende Schreibweise. Die Formel $\exists x\phi$ kürzt die Formel $\neg\forall x\neg\phi$ ab. Hier stehen die Schlussregeln für den Existenzquantor im Kalkül NK' nicht zur Verfügung und müssen entsprechend bewiesen werden.

Nach Behandlung beider Fälle weiß man, dass es unerheblich ist, ob der Existenzquantor zur Sprache gehört oder als Abkürzung mit abkürzenden Schlussregeln eingeführt wurde.

11.3 Theorem: Gehört der Existenzquantor genuin zur Sprache \mathcal{L} und stehen seine Schlussregeln zur Verfügung, dann gilt für beliebige \mathcal{L} -Formeln ϕ und Variablen x im Kalkül NK:

- (1) $\exists x\phi \dashv\vdash \neg\forall x\neg\phi$
 (2) $\forall x\phi \dashv\vdash \neg\exists x\neg\phi$

Bew.: Wir zeigen exemplarisch die erste Aussage.

Wir müssen dazu zwei Ableitungen \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 angeben, in der aus der linken Formel die rechte Formel bzw. umgekehrt abgeleitet wird.

$$\begin{array}{c} \text{„}\vdash\text{“ } \mathcal{D}_1 : \simeq \\ \frac{\frac{\frac{\exists x\phi(x)}{[\phi(x)]^1} \quad \frac{[\forall x\neg\phi(x)]^2}{\neg\phi(x)} \quad (\star)}{\perp} \quad (\exists E:1) \quad (\star)}{\frac{\perp}{\neg\forall x\neg\phi(x)} \quad (\rightarrow I:2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{„}\dashv\text{“ } \mathcal{D}_2 : \simeq \\ \frac{\frac{\frac{\neg\exists x\phi(x)}{[\neg\exists x\phi(x)]^2} \quad \frac{[\phi(x)]^1}{\exists x\phi(x)} \quad (\star)}{\perp} \quad (\rightarrow I:1)}{\frac{\perp}{\forall x\neg\phi(x)} \quad (\star\star)} \quad (\text{RAA:2}) \end{array}$$

Da die Nebenbedingungen an die verwendeten Terme und Formeln jeweils bei (\star) eingehalten werden und insbesondere bei $(\star\star)$ die Formel $\phi(x)$ schon gelöscht ist, ist die erste Behauptung gezeigt. Q.E.D.

11.4 Theorem: Ist der Existenzquantor eine abkürzende Schreibweise, dann sind die Schlussregeln für den Existenzquantor gültig.

Es gilt also im Kalkül NK':

- (1) Sei $\phi(x)$ eine Formel, so dass ein Term t frei in ϕ für eine Variable x einsetzbar ist. Dann gilt: $\phi(t) \vdash \exists x\phi(x)$
- (2) Sei Γ Formelmengung, $\phi(x), \sigma$ zwei Formeln. Es gelte zudem: für jedes $\psi \in \Gamma$ ist $x \notin \text{FV}(\psi), x \notin \text{FV}(\sigma)$ und $\Gamma, \phi(x) \vdash \sigma$. Dann gilt auch: $\Gamma, \exists x\phi(x) \vdash \sigma$.

Bew.:

- (1) Betrachte folgende Ableitung:

$$\frac{\phi(t) \quad \frac{[\forall x\neg\phi(x)]^1}{\neg\phi(t)} (\star)}{\frac{\perp}{\neg\forall x\neg\phi(x)} (\rightarrow\text{I:1})} \quad \frac{\perp}{\exists x\phi(x)} (\simeq)$$

- (2) Nach Voraussetzung gibt es eine Ableitung \mathcal{D} mit $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \{\phi(x)\}$ und Endformel σ . Betrachte nun folgende Ableitung:

$$\frac{\frac{\exists x\phi(x)}{\neg\forall x\neg\phi(x)} (\simeq) \quad \frac{\frac{[\phi(x)]^1}{\mathcal{D}} \quad \sigma \quad [\neg\sigma]^2}{\frac{\perp}{\neg\phi(x)} (\rightarrow\text{I:1})} (\star)}{\frac{\perp}{\sigma} (\text{RAA:2})}$$

Es ist zu beachten, dass nach Voraussetzung jeweils bei (\star) die Nebenbedingungen an die verwendeten Terme und Formeln bei den Schlussregeln eingehalten wurden. Q.E.D.

Bemerkung: Die letzten beiden Theoreme zeigen, dass wir in der Praxis nicht unterscheiden müssen, ob der Existenz-Quantor genuin zur Sprache gehört oder nicht. Wir werden jeweils von dem Fall ausgehen, der einfacheres Arbeiten verspricht. So werden wir bei Induktionen über Formel- und Beweisaufbau zumeist von Abkürzungen ausgehen, bei konkreten Ableitungen die Schlußregeln dennoch verwenden.

Ebenfalls gilt Theorem 10.13 analog, wenn man „ \models “ durch „ \vdash “ ersetzt und auf NK' bzw. NK bezieht. Wir zeigen im Folgenden exemplarisch einen der Fälle; der Rest verbleibt als Übung.

Beispiel: Für alle Formeln $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ mit $x \notin \text{FV}(\psi)$ gilt im Kalkül NK:

$$\psi \rightarrow \exists x\phi(x) \vdash \exists x(\psi \rightarrow \phi(x))$$

Bew.:

Betrachte dazu folgende Ableitung im Kalkül NK:

$$\frac{\frac{[\psi]^4 \quad \psi \rightarrow \exists x\phi(x)}{\exists x\phi(x)} \quad \frac{\frac{[\phi(x)]^1 \quad \psi \rightarrow \phi(x)}{\psi \rightarrow \phi(x)} \quad \frac{[\forall x\neg(\psi \rightarrow \phi(x))]^2 \quad \neg(\psi \rightarrow \phi(x))}{\neg(\psi \rightarrow \phi(x))} \quad (\dagger)}{\perp} \quad (1)}{\perp} \quad (2)}{\psi \vee \neg\psi} \quad (\star) \quad \frac{\frac{[\psi]^3 \quad \frac{\perp}{\phi(x)}}{\psi \rightarrow \phi(x)} \quad (3)}{\exists x(\psi \rightarrow \phi(x))} \quad (\dagger) \quad (4)}{\exists x(\psi \rightarrow \phi(x))}$$

Das *tertium non datur* bei (\star) läßt sich aussagenlogisch beweisen.

Die Nebenbedingungen bei (\dagger) wurden eingehalten.

(\dagger) wurde oben in Theorem 11.3 bewiesen.

Q.E.D.

Im Folgenden wird der Kalkül so erweitert, dass die Eigenschaften der Gleichheit verwendet werden.

11.5 DEF (Regeln für die Identität): Für das Gleichheitszeichen gelten folgende Regeln:

- (1) Reflexivität:

$$\frac{}{t = t} \text{ (IR}_1\text{)}$$

Dabei ist t ein beliebiger Term.

Bemerkung: Das ist die einzige Schlussregel im Kalkül des Natürlichen Schließens, die keine Prämissen hat. Damit kann diese Regel mit einem Axiom (genauer: Axiom-Schema) identifiziert werden.

Damit ist die folgende Ableitung zulässig, um $\vdash \forall x : x = x$ zu zeigen:

$$\frac{\frac{}{x = x} \text{ (IR}_1\text{)}}{\forall x : x = x} \text{ (\forall I) } (\star)$$

- (\star) Alleinführung erlaubt, da es keine offenen Annahmen gibt, in denen x frei vorkommt.

- (2) Symmetrie:

$$\frac{t = s}{s = t} \text{ (IR}_2\text{)}$$

Dabei sind t, s beliebige Terme.

- (3) Transitivität:

$$\frac{t = s \quad s = r}{t = r} \text{ (IR}_3\text{)}$$

Dabei sind t, s, r beliebige Terme.

- (4) Einsetzbarkeit (Substitutivität) in Terme:

$$\frac{t_1 = s_1 \quad \dots \quad t_n = s_n}{t[\vec{t}/\vec{z}] = t[\vec{s}/\vec{z}]} \text{ (IR}_4\text{)}$$

Dabei sind $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n$ beliebige Terme.

- (5) Einsetzbarkeit (Substitutivität) in Formeln
(zunächst in informelle Notation):

$$\frac{t_1 = s_1 \quad \dots \quad t_n = s_n \quad \phi(\vec{t})}{\phi(\vec{s})} \text{ (IR}_4\text{)}$$

Dabei sind $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n$ Terme, so dass die freie Einsetzbarkeit in der Formel ϕ gegeben ist. Es wird aber nicht vorausgesetzt, dass der Term t_i an jedem freien Vorkommen durch s_i ersetzt wird ($1 \leq i \leq n$).

Diesem wird die formale Notation gerecht:

$$\frac{t_1 = s_1 \quad \dots \quad t_n = s_n \quad \phi[\vec{t}/\vec{z}]}{\phi[\vec{s}/\vec{z}]} \text{ (IR}_4\text{)}$$

Man muss eine Formel ϕ rekonstruieren, so dass $\phi[\vec{t}/\vec{z}]$ zur Prämisse wird und $\phi[\vec{s}/\vec{z}]$ zur Konklusion. Dabei können in ϕ durchaus schon einige Terme t_i vorkommen ($1 \leq i \leq n$). Das sind dann diejenigen, die in der informellen Notation nicht ersetzt wurden.

Es muss natürlich beachtet werden, dass die verwendeten Terme für die Variable z frei einsetzbar sind.

Die Schlussregel der Einsetzbarkeit in Formeln wird genauso wie die der Einsetzbarkeit in Terme gekennzeichnet.

11.6 DEF (Der Kalkül $\text{NK}'_{=}$): Der Kalkül, der aus folgenden Schlussregeln besteht, wird mit $\text{NK}'_{=}$ bezeichnet:

- (1) Schlussregeln für die Junktoren \wedge, \rightarrow und die RAA
- (2) Schlussregeln für den Quantor \forall
- (3) Schlussregeln für die Identität

Bemerkung: Wieder kann der Kalkül $\text{NK}'_{=}$ zum vollen Kalkül $\text{NK}_{=}$ erweitert werden. Hier stehen insbesondere auch die Schlussregeln für die Disjunktion, die Implikation und den Existenzquantor zur Verfügung.

11.7 Satz (Redundanz von Regeln): Die Schlussregeln IR_2 und IR_3 können durch Anwendung von IR_1 und IR_4 ersetzt werden.

Bew.:

- (1) Redundanz von IR_2 :

Seien t und s beliebige Terme, x eine Variable, die nicht in t vorkommt.

Setze $\phi(x) : \simeq x = t$.

Die Terme t und s sind in ϕ frei einsetzbar für x und es gilt:

$$\phi(t) \simeq \phi[t/x] \simeq t = t \quad \text{und} \quad \phi(s) \simeq \phi[s/x] \simeq s = t$$

Die Behauptung folgt mit folgendem Ableitungsbaum:

$$\frac{t = s \quad \frac{}{\phi(t)} (\text{IR}_1)}{\phi(s)} (\text{IR}_4) \simeq \frac{t = s \quad \frac{}{t = t} (\text{IR}_1)}{s = t} (\text{IR}_4)$$

(2) Redundanz von IR₃:

Seien t, s, r beliebige Terme, x eine Variable, die nicht in r vorkommt.

Setze $\phi(x) : \simeq x = r$.

Die Terme s und t sind in ϕ frei einsetzbar für x und es gilt:

$$\phi(t) \simeq \phi[t/x] \simeq t = r \quad \text{und} \quad \phi(s) \simeq \phi[s/x] \simeq s = r$$

Die Behauptung folgt mit folgendem Ableitungsbaum:

$$\frac{\frac{t = s}{s = t} (\text{IR}_2) \quad \phi(s)}{\phi(t)} (\text{IR}_4) \simeq \frac{\frac{t = s}{s = t} (\text{IR}_2) \quad s = r}{t = r} (\text{IR}_4)$$

Q.E.D.

Bemerkung: Die Regel IR₁ kann auf Terme t beschränkt werden, die entweder eine Variable x oder eine Konstante c sind. Für aus Funktionszeichen zusammengesetzte Terme t ergibt sich $\vdash t = t$ mit der Regel IR₄. (Induktionsbeweis!) Würde man zudem bei IR₄ Konstanten als 0-stellige Funktionszeichen zulassen, dann kann die Regel IR₁ auf Variablen x eingeschränkt werden.

Als nächstes soll – wie schon in der Aussagenlogik – die Korrektheit des Kalküls bewiesen werden; diese geht als eine Beweisrichtung in den Vollständigkeitssatz ein, der im nächsten Paragraphen behandelt wird. Zur Vereinfachung des Beweises gehen wir davon aus, dass insbesondere auch der Junktor \wedge eine abkürzende Schreibweise ist.

11.8 Theorem (Korrektheit von NK'): Der Kalkül NK' ist korrekt. Das bedeutet: für jede Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ und jede Formel $\phi \in \mathcal{L}$ gilt:

$$\Gamma \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \phi$$

Bew.:

Betrachte zunächst folgende Aussage:

$$\text{Für jede Ableitung } \frac{\mathcal{D}}{\phi} \text{ gilt: } \text{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi \quad (*)$$

Zeige (*) durch Induktion über den Aufbau von Beweisen:

$\mathcal{D} \simeq \phi$: Damit $\phi \in \text{Hyp}(\mathcal{D})$ und Aussage gilt trivialerweise.

IV: Die Behauptung (*) gelte für die Ableitungen \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 .

$$\mathcal{D} \simeq \frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{\phi \quad \phi \rightarrow \psi} : \text{Hyp}(\mathcal{D}) = \text{Hyp}(\mathcal{D}_1) \cup \text{Hyp}(\mathcal{D}_2).$$

Zu zeigen ist: $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \models \psi$.

Sei \mathfrak{A} beliebige \mathcal{L} -Struktur, v eine Belegung mit: $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathcal{D})$.

Nach IV gilt: $\mathfrak{A} \models_v \phi$ und $\mathfrak{A} \models_v \phi \rightarrow \psi$.

Damit gilt schon: $\mathfrak{A} \models_v \psi$.

Also gilt für jede \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} und jede Belegung v :

$$\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathcal{D}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models_v \psi$$

Damit gilt aber schon: $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \models \psi$.

$$\mathcal{D} \simeq \frac{[\phi] \quad \mathcal{D}_1}{\psi} : \text{Hyp}(\mathcal{D}) \subseteq \text{Hyp}(\mathcal{D}_1).$$

Angenommen $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \not\models \phi \rightarrow \psi$. Dann gibt es eine \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} und eine Belegung v mit: $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathcal{D})$ und $\mathfrak{A} \not\models_v \phi \rightarrow \psi$.

Damit gilt insbesondere: $\mathfrak{A} \models_v \phi$ und $\mathfrak{A} \not\models_v \psi$.

Mit $\text{Hyp}(\mathcal{D}_1) \subseteq \text{Hyp}(\mathcal{D}) \cup \{\phi\}$ folgt daraus: $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathcal{D}_1)$.

Aus der IV folgt damit: $\mathfrak{A} \models_v \psi$ WIDERSPRUCH

Also doch: $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi \rightarrow \psi$.

$$\mathcal{D} \simeq \frac{\mathcal{D}_1}{\phi(x)} : \text{Hyp}(\mathcal{D}) = \text{Hyp}(\mathcal{D}_1)$$

Angenommen $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \not\models \forall x \phi(x)$.

Das bedeutet, dass es eine \mathcal{L} -Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ und eine Belegung v gibt mit: $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathcal{D})$ und $\mathfrak{A} \not\models_v \forall x \phi(x)$.

Aus letzterem folgt, dass es ein $a \in A$ gibt mit: $\llbracket \phi(x) \rrbracket_{v[x \mapsto a]}^{\mathfrak{A}} = 0$. (*)

Aufgrund der Schlussregeln gilt für jedes $\sigma \in \text{Hyp}(\mathcal{D})$: $x \notin \text{FV}(\sigma)$.

Ebenfalls gilt: $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathcal{D}_1)$, da $\text{Hyp}(\mathcal{D}) = \text{Hyp}(\mathcal{D}_1)$.

Mit dem Koinzidenz-Lemma folgt: $\mathfrak{A} \models_{v[x \mapsto a]} \text{Hyp}(\mathcal{D}_1)$.

Daraus folgt aber nach IV: $\mathfrak{A} \models_{v[x \mapsto a]} \phi(x)$

Das ist aber ein WIDERSPRUCH zu (*).

$$\mathcal{D} \simeq \frac{\mathcal{D}_1}{\frac{\forall x\phi(x)}{\phi(t)}} : \text{Hyp}(\mathcal{D}) = \text{Hyp}(\mathcal{D}_1).$$

Nach IV gilt: $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \models \forall x\phi(x)$.

Sei t beliebiger Term, der für x frei einsetzbar ist in $\phi(x)$.

Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ eine \mathcal{L} -Struktur und v eine Belegung mit: $\mathfrak{A} \models_v \text{Hyp}(\mathcal{D})$.

Nach IV gilt: $\mathfrak{A} \models_v \forall x\phi(x)$.

Also $\llbracket \phi(x) \rrbracket_{v[x \mapsto a]}^{\mathfrak{A}} = 1$ für jedes $a \in A$. Insbesondere für $a := \llbracket t \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \in A$.

Mit dem Überführungs-Lemma gilt damit: $1 = \llbracket \phi(x) \rrbracket_{v[x \mapsto \llbracket t \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}]}^{\mathfrak{A}} = \llbracket \phi(t) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}$

Damit gilt schon: $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi(t)$.

Insgesamt wurde (*) gezeigt.

Zeige nun die eigentliche Aussage: Es gelte nun $\Gamma \vdash \phi$. Also gibt es eine Ableitung \mathcal{D} , die dies zeigt. Insbesondere gilt dann auch: $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \vdash \phi$.

Nach (*) gilt: $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi$. Aus $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$ folgt schließlich: $\Gamma \models \phi$.

Damit ist die Korrektheit des Kalküls gezeigt.

Q.E.D.

Bemerkungen:

- (1) Der Kalkül NK ist ebenfalls korrekt.
- (2) Der Kalkül NK₌ ist ebenfalls korrekt, da die Axiome und Regeln für die Gleichheit aufgrund der „inhaltlichen“ (metasprachlichen) Identität auch semantisch gültig sind.

Zum Abschluss des Paragraphen soll noch das Substitutions-Theorem vorgestellt werden. Eine ausführliche Diskussion findet sich im Anhang.

11.9 Substitutions-Theorem (für NK'): Seien $\Gamma \subset \mathcal{L}$ Formel-Menge, $\phi \in \mathcal{L}$ Formel und t beliebiger Term, der für eine Variable x frei einsetzbar ist in ϕ . Dann gilt:

$$\Gamma \vdash_{\text{NK}'} \phi \Rightarrow \Gamma[t/x] \vdash_{\text{NK}'} \phi[t/x]$$

Bew.: Hier ohne Beweis, vgl. Anhang.

Q.E.D.

Bemerkung: Das Theorem ist auch für die Kalküle NK und NK₌ gültig.

§ 12 Vollständigkeit

Wie schon in der Aussagenlogik umfaßt der weite Begriff der Vollständigkeit sowohl die Korrektheit als auch die eigentliche Vollständigkeit eines Kalküls. Ziel dieses Abschnittes ist die Vollständigkeit des Kalküls $NK_{=}$ zu zeigen. Wie auch in der Aussagenlogik ist die Korrektheit des Kalküls einfach zu zeigen; dies ist schon im letzten Abschnitt geschehen. Für die eigentliche Vollständigkeit wird zunächst der Theorie-Begriff benötigt. Damit gelingt es, die Existenz von Modellen für widerspruchsfreie Aussagenmengen zu zeigen. Daraus folgt dann die eigentliche Vollständigkeit des Kalküls. Der Abschnitt endet mit einigen direkten Konsequenzen der Vollständigkeit.

Voraussetzung (Sprache): In diesem Abschnitt wird zur Vereinfachung der Beweise eine formale Sprache \mathcal{L} lediglich mit den Junktoren \perp und \rightarrow und dem Quantor \forall vorausgesetzt. Die anderen Junktoren und der Existenzquantor werden als abkürzende Schreibweise verstanden. Die Signatur der Sprache bleibt beliebig.

Analog zu den (maximal)-konsistenten Mengen der Aussagenlogik werden jetzt in der Prädikatenlogik (vollständige) Theorien eingeführt:

12.1 DEF (Theorie): Sei $T \subseteq \mathcal{L}$ eine Menge von Aussagen (!).

- (1) T ist *deduktiv abgeschlossen* (unter *Ableitbarkeit abgeschlossen*), falls für jede Aussage $\phi \in \mathcal{L}$ gilt:

$$T \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \phi \in T$$

Dann wird T auch *Theorie* genannt.

- (2) $\text{Ded}(T) := \{\phi \in \mathcal{L} : T \vdash \phi \text{ und } \text{FV}(\phi) = \emptyset\}$ bezeichnet *den deduktiven Abschluss von T*.
- (3) Eine Theorie T heißt *widerspruchsfrei* (*konsistent*), falls $\perp \notin T$.
- (4) Eine Theorie T heißt *vollständig*, falls für jede Aussage $\phi \in \mathcal{L}$ gilt:

$$\phi \in T \quad \text{oder} \quad \neg\phi \in T$$

Bemerkungen: Sei $T \subseteq \mathcal{L}$ eine Theorie.

- (1) Es gilt $T = \text{Ded}(T)$. Umgekehrt folgt aus $T = \text{Ded}(T)$ auch schon, dass T eine Theorie ist, da $\text{Ded}(\Gamma)$ für jede Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ eine Theorie ist.
Letzteres erlaubt einen etwas lockeren Sprachgebrauch, bei dem Aussagenmengen Γ mit ihren Theorien $T_{\Gamma} := \text{Ded}(\Gamma)$ identifiziert werden.
- (2) Ist $\perp \in T$, dann gilt schon $T = \{\phi \in \mathcal{L} : \text{FV}(\phi) = \emptyset\} = \text{SENT}$. Es gibt also genau eine widersprüchliche Theorie. Diese ist nach Definition vollständig.

- (3) Die Widerspruchsfreiheit von T lässt sich auch wie folgt charakterisieren: es gibt eine Aussage $\phi \in \mathcal{L}$ mit $\phi \notin T$.
- (4) Es gibt widerspruchsfreie Theorien T , die nicht vollständig sind.
($T := \{\phi \in \mathcal{L} : \models \phi \text{ und } \text{FV}(\phi) = \emptyset\}$ ist ein triviales Beispiel.)

12.2 DEF (Axiomatisierung): Eine Aussagen-Menge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ heißt *Axiomatisierung* einer Theorie T , falls folgendes gilt: $T = \text{Ded}(\Gamma)$

Bemerkung: Jede Theorie T ist aufgrund ihrer deduktiven Abgeschlossenheit schon eine Axiomatisierung ihrer selbst.

Beispiel (Gruppentheorie): Die Gruppentheorie G wird in der Sprache \mathcal{L}_G durch die Menge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ axiomatisiert, die folgende Aussagen enthält:

- (1) Assoziativität: $\forall x, y, z : (x + y) + z = x + (y + z)$
- (2) Neutral-Element: $\forall x : x + 0 = x$
- (3) Inverses-Element: $\forall x \exists y : x + y = 0$

Die resultierende Theorie $G := \{\phi \in \mathcal{L}_G : \Gamma \vdash \phi \text{ und } \text{FV}(\phi) = \emptyset\}$ ist widerspruchsfrei und unvollständig. So lässt sich etwa die Kommutativität aus den Axiomen nicht ableiten.

Ein rein syntaktischer Beweis dieser Aussage übersteigt aber den Rahmen dieser Vorlesung. Die Behauptungen wie gewohnt durch die Angabe von geeigneten Strukturen zu beweisen (eine kommutative und eine nicht-kommutative Gruppe würde hier genügen), ist an dieser Stelle nicht erlaubt. Dazu fehlt noch die Gleichwertigkeit von Ableitbarkeit und Folgerung (genauer: die eigentliche Vollständigkeit des Kalküls). Diese zeigen wir im Folgenden.

Dazu benötigen wir, dass jede widerspruchsfreie Theorie T ein Modell besitzt. Das bedeutet: man muss zu einer Theorie T eine \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} finden, in der T gültig ist. Also: $\mathfrak{A} \models T$. Um dies zu erreichen, werden sogenannte Henkin-Theorien betrachtet.

12.3 DEF (Henkin-Theorie): Eine Theorie $T \subseteq \mathcal{L}$ heißt *Henkin-Theorie*, falls es zu jeder Existenz-Aussage $\exists x \phi(x) \in \mathcal{L}$ (nicht nur in der Aussagenmenge T selbst!) eine Individuen-Konstante c (im Alphabet von \mathcal{L}) gibt, so dass die Aussage $\exists x \phi(x) \rightarrow \phi(c) \in T$.

Bemerkungen:

- (1) Die Konstante c wird auch *Zeuge* (engl. *witness*) der Existenzaussage $\exists x \phi(x)$ genannt.
- (2) Der Zeuge c einer Eigenschaft $\phi(x)$ muss diese nicht besitzen. Es gilt: $T \vdash \phi(c)$ nur, falls $T \vdash \exists x \phi(x)$.

Es läßt sich zeigen, dass vollständige Henkin-Theorien Modelle besitzen. Dementsprechend ist hier das Ziel, eine gegebene Theorie zu Henkinisieren. Das heißt, die Theorie in einer erweiterten Sprache zu einer Henkin-Theorie zu erweitern. Diese resultierende Theorie wird dann in einem weiteren Schritt vervollständigt.

Notation (Spracherweiterung): Sei \mathcal{L} eine formale Sprache und I eine Indexmenge. Dann bezeichnet $\mathcal{L} \sqcup \{c_i : i \in I\}$ diejenige Sprache \mathcal{L}' , die aus \mathcal{L} entsteht, indem das Alphabet von \mathcal{L} um die Konstanten aus $\{c_i : i \in I\}$ erweitert wird.

12.4 Konstruktion (Henkin-Sprache): Schrittweise wird die Sprache \mathcal{L} durch neue Konstanten zur Henkin-Sprache \mathcal{L}_H erweitert. Damit sollen genügend Konstanten zur Sprache \mathcal{L} hinzugefügt werden, um aus einer gegebenen Theorie T eine Henkin-Theorie zu konstruieren.

- $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}$
- $\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}_0 \sqcup \{c_\phi : \exists x\phi(x) \in \mathcal{L}_0 \text{ und } \text{FV}(\phi) = \{x\}\}$
wobei die c_ϕ neue Konstanten sind, die in \mathcal{L}_0 nicht vorkommen.
- Sei \mathcal{L}_n schon konstruiert.
 $\mathcal{L}_{n+1} := \mathcal{L}_n \sqcup \{c_\phi : \exists x\phi(x) \in \mathcal{L}_n \text{ und } \text{FV}(\phi) = \{x\}\}$
wobei die c_ϕ neue Konstanten sind, die in \mathcal{L}_n nicht vorkommen.
- $\mathcal{L}_H := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_n$

Bemerkungen:

- (1) Die Iteration in der Konstruktion ist notwendig, da in jedem Schritt neue Aussagen entstehen, die bezeugt werden müssen.
- (2) Die Kardinalität der Henkin-Sprache \mathcal{L}_H ist gleich der Kardinalität der ursprünglichen Sprache \mathcal{L} .

Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass man (geeignete) Beweise in der reicheren Sprache \mathcal{L}_H zurückführen kann auf Beweise in der ursprünglichen Sprache. Die Grundidee besteht darin, Individuen-Konstanten als freie Variablen aufzufassen.

12.5 Lemma (Konstanten-Ersetzung): Sei \mathcal{D} eine Ableitung und x eine Variable, die in der gesamten Ableitung weder gebunden noch ungebunden vorkommt. Ersetzt man in der Ableitung in jeder Formel jedes Vorkommen einer Konstanten c durch die Variable x , dann ist das Resultat der Ersetzung $\mathcal{D}[x/c]$ eine Ableitung.

Bew.: Durch Induktion über den Aufbau von Ableitungen.

$\mathcal{D} \simeq \phi$ Trivial. $\phi[x/c]$ ist gültige Ableitung.

IV: Es gelte Behauptung für Ableitungen \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 .

$$\mathcal{D} \simeq \frac{\begin{array}{cc} \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \phi & \phi \rightarrow \psi \end{array}}{\psi}$$

Sei x eine Variable, die nicht in \mathcal{D} vorkommt. Damit kommt x weder in \mathcal{D}_1 noch in \mathcal{D}_2 vor und die IV ist anwendbar.

Da die Konklusion von $\mathcal{D}_1[x/c]$ die Formel $\phi[x/c]$ und die Konklusion von $\mathcal{D}_2[x/c]$ die Formel $\phi[x/c] \rightarrow \psi[x/c]$ ist, gilt:

(MP) ist anwendbar und $\mathcal{D}[x/c]$ ist wieder eine Ableitung.

\mathcal{D} entsteht durch Anwendung einer anderen Regel von NK'.

Analog zum Fall eben.

\mathcal{D} entsteht durch eine Schlussregel der Identität.

Fall man die Regeln nicht verallgemeinert, muss man die Behauptung verändern und nicht nur einfach substituieren.

Damit wurde die Behauptung gezeigt.

Q.E.D.

12.6 DEF (Erweiterung einer Theorie): Seien \mathcal{L} und \mathcal{L}' zwei Sprachen erster Stufe. Seien $T \subseteq \mathcal{L}$ und $T' \subseteq \mathcal{L}'$ zwei Theorien.

- (1) T' heißt *Erweiterung* von T , falls $T \subseteq T'$.
- (2) T' heißt *konservative Erweiterung* von T , falls zusätzlich $T' \cap \mathcal{L} = T$.

Bemerkung: Der Begriff der Theorie ist aufgrund ihrer deduktiven Abgeschlossenheit sprachabhängig. Das bedeutet: Eine Theorie $T \subseteq \mathcal{L}$ ist in einer erweiterten Sprache \mathcal{L}' keine Theorie mehr. Ist etwa c eine Konstante, die in \mathcal{L} nicht vorkommt, gilt damit $c \notin T$. Da aber $T \vdash_{\mathcal{L}'} c = c$ gilt, ist $T \subseteq \mathcal{L}'$ nicht mehr deduktiv abgeschlossen.

12.7 Konstruktion (Henkin-Theorie): In der Henkin-Sprache \mathcal{L}_H kann man zu einer Theorie T eine Henkintheorie durch $T_{(H)}$ axiomatisieren:

$$T_{(H)} := T \cup \{ \exists x \phi(x) \rightarrow \phi(c_\phi) : \exists x \phi(x) \in \mathcal{L}_H \text{ und } \text{FV}(\phi) = \{x\} \}$$

12.8 Lemma (Konservativität): Oben konstruiertes $T_{(H)}$ axiomatisiert eine konservative Henkin-Erweiterung von T .

Bew.:

Nach Konstruktion axiomatisiert $T_{(H)}$ eine Henkin-Theorie. Damit muss nur noch die Konservativität gezeigt werden. Es ist also für jedes $\sigma \in \mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ zu zeigen: $T_{(H)} \vdash_{\mathcal{L}_H} \sigma \Rightarrow T \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$.

Es gelte $T_{(H)} \vdash_{\mathcal{L}_H} \sigma$ für eine beliebige Formel $\sigma \in \mathcal{L}$. Damit gibt es eine Ableitung \mathcal{D} in \mathcal{L}_H mit Endformel σ .

Seien c_1, \dots, c_n alle neuen Konstanten von \mathcal{L}_H , die irgendwo in \mathcal{D} vorkommen. Ersetzt man diese durch Variablen x_1, \dots, x_n , die alle nicht in \mathcal{D} vorkommen, so ist $\mathcal{D}' := \mathcal{D}[\vec{x}/\vec{c}]$ nach n -facher Anwendung des Lemmas 12.5 (Konstanten-Ersetzung) eine gültige Ableitung. Für \mathcal{D}' gilt:

- (1) In \mathcal{D}' kommen nur Formeln aus \mathcal{L} vor. Also ist \mathcal{D}' eine Ableitung in \mathcal{L} .
- (2) Die Endformel ist σ , da $\sigma[\vec{x}/\vec{c}] = \sigma$.
- (3) Für jede Formel $\psi \in \text{Hyp}(\mathcal{D}')$ gilt entweder

$$\psi \in T \quad \text{oder} \quad \psi \simeq \exists x \phi(x) \rightarrow \phi(y)$$

wobei y in keiner anderen Formel $\psi' \in \text{Hyp}(\mathcal{D}') \setminus \{\psi\}$ vorkommt.

(Jede Existenz-Aussage hat einen eigenen Zeugen!)

Da $\text{Hyp}(\mathcal{D}')$ endlich ist, gibt es also $n \in \mathbb{N}$, so dass folgendes gilt:

$$\text{Hyp}(\mathcal{D}') = N \dot{\cup} M \quad (\star)$$

wobei $N \subseteq T$ und $M = \{\exists x \phi_k \rightarrow \phi_k(y_k) : 1 \leq k \leq m\}$ mit $T \cap M = \emptyset$.

Durch sukzessive Elimination von Annahmen $\psi \in M$, läßt sich zeigen: $N \vdash \sigma$.

Sei $\psi \simeq \exists x \phi(x) \rightarrow \phi(y) \in M$ beliebig, $X := (N \cup M) \setminus \{\psi\}$.

Mit Einführung der Implikation folgt aus (\star) : $X \vdash \psi \rightarrow \sigma$.

Also: $X \vdash (\exists x \phi(x) \rightarrow \phi(y)) \rightarrow \sigma$.

Da y nun in keiner Annahme vorkommt, folgt: $X \vdash \forall y ((\exists x \phi(x) \rightarrow \phi(y)) \rightarrow \sigma)$.

$\Rightarrow X \vdash \exists y (\exists x \phi(x) \rightarrow \phi(y)) \rightarrow \sigma$.

Mit $\vdash \exists y (\exists x \phi(x) \rightarrow \phi(y))$ und (MP): $X \vdash \sigma$.

Damit ist ψ aus der Annahmenmenge eliminiert. Durch Iteration der Elimination erhält man: $N \vdash \sigma$. Da $N \subseteq T$, ist die Konservativität gezeigt. Q.E.D.

12.9 Korollar (Widerspruchsfreiheit): T ist genau dann konsistent, wenn $T_{(H)}$ konsistent ist.

Bew.: Direkte Folge aus der Konservativität von $T_{(H)}$.

Q.E.D.

12.10 Lemma von Lindenbaum: Jede widerspruchsfreie Theorie $T \subseteq \mathcal{L}$ läßt sich zu einer vollständigen widerspruchsfreien Theorie $T' \subseteq \mathcal{L}$ erweitern.

Bew.:

Wir setzen im Beweis voraus, dass die Menge der Prädikatzeichen, Funktionszeichen und Individuen-Konstanten in der Sprache \mathcal{L} abzählbar sind. (*)

Damit ist die Sprache \mathcal{L} selbst abzählbar und der Beweis verläuft analog zum Beweis in der Aussagenlogik, dass konsistente Mengen immer in einer maximal-konsistenten Menge enthalten sind:

- (1) Konstruktion einer neuen Aussagenmenge: Man folgt der Abzählung der Sprache und nimmt diejenigen Aussagen in die Menge auf, die die Konsistenz erhalten.
- (2) Nachweis der Vollständigkeit und Konsistenz der resultierenden Menge.
- (3) Nachweis der deduktiven Abgeschlossenheit der resultierenden Menge.

Setzt man (*) nicht voraus, benötigt man das mit dem Auswahlaxiom äquivalente Zornsche Lemma. Vgl. dazu van Dalen, S.106.

Eine genaue Behandlung beider Fälle findet man in: Ebbinghaus/Flum.

Q.E.D.

12.11 Lemma: Sei T_H die Vervollständigung einer widerspruchsfreien Henkin-Theorie $T_{(H)}$. Dann ist T_H selbst eine Henkin-Theorie.

Bew.:

Trivial, da schon in $T_{(H)} \subseteq T_H$ alle notwendigen Aussagen $\exists x \phi(x) \rightarrow \phi(c)$ für ein c enthalten sind. Q.E.D.

12.12 Theorem (Modell-Existenz): Sei $T_H \subseteq \mathcal{L}_H$ eine vollständige, widerspruchsfreie Henkin-Erweiterung einer Theorie $T \subseteq \mathcal{L}$. Dann hat T_H ein Modell und damit auch schon T .

Bew.:

Zunächst wird ein geeignetes Termmodell \mathfrak{A} konstruiert:

Sei dazu X die Menge aller geschlossenen Terme von \mathcal{L}_H . Auf X wird eine zweistellige Relation \sim definiert:

$$t \sim s \quad :\Leftrightarrow \quad T_H \vdash t = s$$

Die Relation \sim ist eine Äquivalenz-Relation (Übungsaufgabe) und die Äquivalenzklasse von t bezüglich \sim wird mit $\bar{t} = \{s : s \in X \text{ und } t \sim s\}$ bezeichnet.

Das Universum A von \mathfrak{A} sei die Menge aller Äquivalenz-Klassen bezüglich \sim :

$$A := \{\bar{t}; t \in X\} = X / \sim \neq \emptyset$$

A ist nicht leer, da es in \mathcal{L}_H die Konstante $c_{x=x}$ als Zeugen für $\exists x : x = x$ gibt, und wohldefiniert, da \sim eine Äquivalenz-Relation ist.

Auf dem Universum müssen nun die Interpretationen der nichtlogischen Zeichen ausgezeichnet werden. Zu einem nichtlogischen Zeichen ζ des Alphabets von \mathcal{L}_H bezeichnen wir mit $\zeta^{\mathfrak{A}}$ seine Interpretation im Grundbereich A .

- (1) Interpretation der Konstanten:

Sei c Konstante: $c^{\mathfrak{A}} := \bar{c}$

Dies ist wohldefiniert, da \sim eine Äquivalenzrelation ist. (Jede Konstante c liegt in einer Äquivalenz-Klasse und diese sind disjunkt!)

- (2) Interpretation der Funktions-Zeichen:

Sei f ein n -stelliges Funktions-Zeichen:

$$f^{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A : \langle \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n \rangle \mapsto \overline{f(t_1, \dots, t_n)}$$

Zu zeigen ist, dass $f^{\mathfrak{A}}$ eine wohldefinierte Funktion ist. D.h.:

$$t_1 \sim s_1, \dots, t_n \sim s_n \Rightarrow f^{\mathfrak{A}}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$$

Dies verbleibt als Übungsaufgabe.

- (3) Interpretation der Relations-Zeichen:

$$\langle \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow T \vdash R(t_1, \dots, t_n)$$

Wieder ist die Wohldefiniertheit zu zeigen.

Damit wurde eine Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ mit einem geeigneten Ähnlichkeits-Typ zur Sprache \mathcal{L}_H konstruiert.

Nun ist zu zeigen, dass \mathfrak{A} tatsächlich ein Modell der Theorie T_H ist ($\mathfrak{A} \models T_H$).

Wir zeigen durch Induktion über dem Formelaufbau die etwas stärkere Aussage, dass für jede Formel $\phi \in \mathcal{L}_H$ gilt:

$$T_H \vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi$$

$\phi \simeq \perp$: Nach Voraussetzung gilt: $T_H \not\vdash \perp$.

Nach Definition von Strukturen gilt: $\mathfrak{A} \not\models \perp$

$\phi \simeq t = s$: Unterscheide 2 Fälle:

1. *Fall*: $FV(t = s) = \emptyset$.

Belegungen können in diesem Fall vernachlässigt werden, da $t = s$ eine Aussage ist.

$$\mathfrak{A} \models t = s \Leftrightarrow \llbracket t = s \rrbracket^{\mathfrak{A}} = 1 \Leftrightarrow \llbracket t \rrbracket^{\mathfrak{A}} = \llbracket s \rrbracket^{\mathfrak{A}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{t} = \bar{s} \Leftrightarrow T_H \vdash t = s$$

Die letzte Äquivalenz gilt aufgrund der Definition von \sim .

2. Fall: $FV(t = s) \neq \emptyset$. Sei etwa $FV(t = s) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

„ \Leftarrow “ $\mathfrak{A} \not\models t = s$

\Rightarrow Es gibt eine Belegung v mit: $\llbracket t = s \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 0$.

\Rightarrow Es gibt $t_1, \dots, t_n \in X$ mit: $v(x_1) = \bar{t}_1, \dots, v(x_n) = \bar{t}_n$

$\Rightarrow \mathfrak{A} \not\models t = s[\vec{t}/\vec{x}]$

Nach dem ersten Fall gilt: $T_H \not\models t = s[\vec{t}/\vec{x}]$ (*)

Angenommen $T_H \vdash t = s$. Damit gibt es eine Ableitung \mathcal{D} von $t = s$. In $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \subseteq T_H$ sind nur Aussagen. Damit kommen die Variablen x_1, \dots, x_n in keiner Annahme offen vor.

Damit gilt: $T_H \vdash \forall(t = s)$

Nach geeigneter Beseitigung der Allquantoren erhält man wiederum: $T_H \vdash t = s[\vec{t}/\vec{x}]$ WIDERSPRUCH zu (*).

Also doch: $T_H \not\models t = s$

„ \Rightarrow “ Es gelte: $T_H \not\models t = s$.

$\Rightarrow T_H \not\models \forall(t = s)$

Angenommen $T_H \vdash \forall(t = s)$, dann auch $T_H \vdash t = s$.

Also: $T_H \not\models \forall(t = s)$

Da T_H vollständig ist: $T_H \vdash \neg \forall(t = s)$

$\Rightarrow T_H \vdash \exists x_1 \dots x_n : t \neq s$

Da T_H Henkin-Theorie, gibt es geeignete Konstanten c_1, \dots, c_n mit:

$T_H \vdash \exists(t \neq s) \rightarrow (t \neq s)(\vec{c})$

Mit MP folgt: $T_H \vdash t \neq s(\vec{c})$

Mit dem 1. Fall folgt: $\mathfrak{A} \models t \neq s(\vec{c})$

$\Rightarrow \mathfrak{A} \not\models s = t$

$\phi \simeq P(t_1, \dots, t_n)$: Wieder müssen 2 Fälle betrachtet werden; diese lassen sich analog zu $\phi \simeq t = s$ beweisen.

IV: Angenommen, die Behauptung gilt für alle ψ mit kleinerem Rang.

$\phi \simeq \phi \rightarrow \psi$: Behauptete Äquivalenz ist trivial.

$\phi \simeq \forall x \phi$: $\mathfrak{A} \models \forall x \phi$

\Leftrightarrow für jede Belegung v und jedes $t \in X$ gilt: $\llbracket \phi(x) \rrbracket_{v[x \mapsto \bar{t}]}^{\mathfrak{A}} = 1$

$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi(x)$

$\Leftrightarrow T_H \vdash \phi(x)$

$\Leftrightarrow T_H \vdash \forall x \phi(x)$

Letzte Äquivalenz gilt, da T_H eine Aussagenmenge ist.

Damit ist die Behauptung gezeigt. Insbesondere gilt also: $\mathfrak{A} \models T_H$ und $\mathfrak{A} \models T$.

Läßt man die Interpretation der neuen Individuen-Konstanten weg, erhält man aus \mathfrak{A} eine Struktur \mathfrak{A}' mit zu \mathcal{L} passendem Ähnlichkeitstyp. Für diese Struktur gilt ebenfalls: $\mathfrak{A}' \models T$. Q.E.D.

12.13 Korollar (Erfüllbarkeit): Ist eine Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ konsistent, dann ist Γ erfüllbar.

Bew.:

Sei Γ konsistent. Dann ist $T = \{\phi \in \mathcal{L} : \Gamma \vdash \phi \text{ und } \text{FV}(\phi) = \emptyset\}$ eine konsistente Theorie. T läßt sich kanonisch zu der Henkin-Theorie $T_{(H)}$ erweitern, die ihrerseits in einer vollständigen Henkin-Theorie T_H liegt. Damit gibt es ein Modell \mathfrak{A} von T_H . Durch Weglassen der Interpretation der neuen Konstanten erhält man eine Struktur \mathfrak{A}' geeigneter Signatur. Da $\Gamma \subseteq T \subseteq T_H$ ist, gilt: $\mathfrak{A}' \models \Gamma$.

Q.E.D.

12.14 Theorem (Vollständigkeit): Sei $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ eine Aussagen-Menge, $\phi \in \mathcal{L}$ eine Aussage. Dann gilt:

$$\Gamma \vdash \phi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \phi$$

„ \Rightarrow “ Die Korrektheit wurde sogar für beliebige Formelmengen bewiesen.

„ \Leftarrow “ $\Gamma \models \phi \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\phi\}$ ist nicht erfüllbar.

\Rightarrow Mit dem Korollar zur Erfüllbarkeit: $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ ist nicht konsistent.

$\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \perp. \Rightarrow$ Mit RAA: $\Gamma \vdash \phi.$ Q.E.D.

Bemerkung: Das Theorem über die Vollständigkeit läßt sich auf beliebige Formelmengen ausweiten.

12.15 Kompaktheits-Satz: Für beliebige Formelmengen $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ ist äquivalent:

- (1) Γ ist widerspruchsfrei.
- (2) Γ ist erfüllbar.
- (3) Γ ist endlich erfüllbar.

Das bedeutet: jede endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ ist erfüllbar.

Bew.:

(1) \Leftrightarrow (2) Mit dem Vollständigkeits-Satz trivial.

(2) \Leftrightarrow (3) Γ erfüllbar. $\Leftrightarrow \Gamma \not\vdash \perp \Leftrightarrow \Gamma \not\vdash \perp$

\Leftrightarrow für jedes endliche $\Delta \subseteq \Gamma$: $\Delta \not\vdash \perp$

\Leftrightarrow für jedes endliche $\Delta \subseteq \Gamma$: $\Delta \not\vdash \perp$ Q.E.D.

12.16 Endlichkeits-Satz: Sei $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, $\phi \in \mathcal{L}$. Gilt $\Gamma \models \phi$, dann gibt es eine endliche Menge $\Delta \subseteq \Gamma$ mit $\Delta \models \phi$.

Bew.:

$\Gamma \models \phi \Rightarrow \Gamma \vdash \phi \Rightarrow$ es gibt endliches $\Delta \subseteq \Gamma$ mit: $\Delta \vdash \phi \Rightarrow \Delta \models \phi$

Q.E.D.

§ 13 Modelltheorie

Zum Abschluss der Vorlesung werden noch einige modelltheoretische Sätze vorgestellt. Zunächst wird ein wenig Terminologie eingeführt. Anschließend wird die Endlichkeit diskutiert und zuletzt werden die Sätze von Löwenheim-Skolem bewiesen.

13.1 DEF: Sei \mathcal{L} formale Sprache erster Stufe.

- (1) Sei $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ eine Aussagenmenge.

$$\text{MOD}(\Gamma) := \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \Gamma\}$$

ist die (echte) Klasse aller Modelle von Γ .

- (2) Sei \mathfrak{K} eine Klasse von Strukturen, $\phi \in \mathcal{L}$ Formel.

$$\mathfrak{K} \models \phi \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \mathfrak{A} \in \mathfrak{K} : \mathfrak{A} \models \phi$$

- (3) Sei \mathfrak{K} eine Klasse von Strukturen.

$$\text{Th}(\mathfrak{K}) := \{\phi \in \mathcal{L} : \mathfrak{K} \models \phi \text{ und } \text{FV}(\phi) = \emptyset\}$$

ist die von \mathfrak{K} induzierte Theorie.

13.2 Theorem: Seien $\Delta, \Gamma \subseteq \mathcal{L}$ Aussagenmengen und $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ Klassen von Strukturen. Es gelten folgende Zusammenhänge:

- (1) $\mathfrak{K} \subseteq \text{MOD}(\Gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \subseteq \text{Th}(\mathfrak{K})$
- (2) $\Delta \subseteq \Gamma \quad \Rightarrow \quad \text{MOD}(\Gamma) \subseteq \text{MOD}(\Delta)$
 und $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{L} \quad \Rightarrow \quad \text{Th}(\mathfrak{L}) \subseteq \text{Th}(\mathfrak{K})$
- (3) $\text{MOD}(\Delta \cup \Gamma) = \text{MOD}(\Delta) \cap \text{MOD}(\Gamma)$
 und $\text{Th}(\mathfrak{K} \cup \mathfrak{L}) = \text{Th}(\mathfrak{K}) \cap \text{Th}(\mathfrak{L})$
- (4) $\text{MOD}(\Delta \cap \Gamma) \supseteq \text{MOD}(\Delta) \cup \text{MOD}(\Gamma)$
 und $\text{Th}(\mathfrak{K} \cap \mathfrak{L}) \supseteq \text{Th}(\mathfrak{K}) \cup \text{Th}(\mathfrak{L})$

Bew.: Verbleibt als Übungsaufgabe.

Q.E.D.

Im Folgenden werden wir uns mit der Endlichkeit und Unendlichkeit von Strukturen beschäftigen und prüfen, inwieweit diese Eigenschaften in der Logik erster Stufe ausgedrückt werden können.

13.3 Theorem: Sei $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ eine Aussagenmenge in einer Sprache \mathcal{L} erster Stufe. Besitzt Γ endliche Modelle und ist die Kardinalität dieser Modelle unbeschränkt, dann besitzt Γ auch ein unendliches Modell.

Bew.:

Für jedes $1 < n \in \mathbb{N}$ sei: $\lambda_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq k, l \leq n, k \neq l} x_k \neq x_l \in \mathcal{L}$

(λ_n bedeutet: *Es gibt mindestens n Elemente im Universum.*)

Offensichtlich gilt für jede Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$:

$$\mathfrak{A} \models \lambda_n \iff |A| \geq n$$

Ferner gilt für jedes $1 < n \in \mathbb{N}$:

$$\mathfrak{A} \models \lambda_{n+1} \implies \mathfrak{A} \models \lambda_n$$

Sei $\Gamma' := \Gamma \cup \{\lambda_n; 1 < n \in \mathbb{N}\}$ und $\Delta \subseteq \Gamma'$ beliebige endliche Teilmenge von Γ' .

Offensichtlich gibt es ein minimales $1 < n \in \mathbb{N}$ so, dass $\lambda_n \notin \Delta$.

Sei \mathfrak{A} ein Modell von Γ mit $|A| \geq n$. (Eine solche Struktur gibt es, da die Kardinalität der endlichen Modelle unbeschränkt ist.)

Für diese Struktur \mathfrak{A} gilt: $\mathfrak{A} \models \Delta$.

Damit kann man den Kompaktheits-Satz anwenden und erhält: Γ' ist erfüllbar.

Angenommen Γ' hätte endliche Modelle. Etwa $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ mit $|A| = n$ für ein $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Dann gilt aber: $\mathfrak{A} \not\models \lambda_{n+1}$. WIDERSPRUCH zu $\lambda_{n+1} \in \Gamma'$.

Damit hat Γ' ein unendliches Modell \mathfrak{A} .

Aus $\Gamma \subseteq \Gamma'$ folgt: $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Damit hat Γ ein unendliches Modell. Q.E.D.

13.4 Korollar: Sei \mathfrak{K} eine Klasse von Strukturen, die endliche Strukturen unbeschränkter Kardinalität enthält. Dann gibt es keine Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ mit:

$$\text{MOD}(\Gamma) = \{\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}; \mathfrak{A} \text{ ist endlich}\}$$

Bew.:

Angenommen doch. Dann hätte Γ beliebig große endliche Modelle. Damit hätte Γ auch ein unendliches Modell $\mathfrak{A} \notin \text{MOD}(\Gamma)$. WIDERSPRUCH Q.E.D.

Bemerkung: Das Korollar zeigt, dass es keine Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ gibt, so dass $\text{MOD}(\Gamma) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ ist endlich}\}$. Das bedeutet, dass *Endlichkeit* nicht in der Logik erster Stufe formuliert werden kann, also dass *Endlichkeit* keine erststufige Eigenschaft ist.

13.5 DEF (axiomatisierbar): Eine Klasse \mathfrak{K} von Strukturen heißt (endlich) axiomatisierbar, falls es eine (endliche) Aussagenmenge Γ gibt, die \mathfrak{K} axiomatisiert. D.h.: $\mathfrak{K} = \text{MOD}(\Gamma)$.

13.6 Lemma: Eine Klasse \mathfrak{K} von Strukturen ist genau dann endlich axiomatisierbar, wenn \mathfrak{K} und das Komplement \mathfrak{K}^c axiomatisierbar sind.

Bew.:

„ \Rightarrow “ \mathfrak{K} ist endlich axiomatisierbar.

Das bedeutet: $\mathfrak{K} = \text{MOD}(\{\phi_1, \dots, \phi_n\}) = \text{MOD}(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n)$
für endlich viele Aussagen $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{L}$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}^c &= \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \notin \mathfrak{K}\} = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \not\models \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n\} \\ &= \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \neg(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n)\} = \text{MOD}(\neg(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n)) \end{aligned}$$

und \mathfrak{K}^c ist endlich axiomatisiert.

Damit sind \mathfrak{K} und \mathfrak{K}^c insbesondere auch axiomatisierbar.

„ \Leftarrow “ Sei $\mathfrak{K} = \text{MOD}(\Gamma)$ und $\mathfrak{K}^c = \text{MOD}(\Delta)$ für zwei Aussagenmengen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{L}$.

$$\Rightarrow \text{MOD}(\Gamma \cup \Delta) = \text{MOD}(\Gamma) \cap \text{MOD}(\Delta) = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}^c = \emptyset$$

Damit ist $\Gamma \cup \Delta$ unerfüllbar und nach dem Vollständigkeitssatz auch inkonsistent.

\Rightarrow Es gibt Aussagen $\phi_1, \dots, \phi_n \in \Gamma$ und $\psi_1, \dots, \psi_m \in \Delta$ mit:

$$\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_m \vdash \perp$$

Wieder mit dem Vollständigkeitssatz folgt:

$$\begin{aligned} \emptyset &= \text{MOD}(\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \cup \{\psi_1, \dots, \psi_m\}) \\ &= \text{MOD}(\{\phi_1, \dots, \phi_n\}) \cap \text{MOD}(\{\psi_1, \dots, \psi_m\}) \end{aligned}$$

Da $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subseteq \Gamma$, gilt: $\mathfrak{K} = \text{MOD}(\Gamma) \subseteq \text{MOD}(\{\phi_1, \dots, \phi_n\})$.

Analog: $\mathfrak{K}^c = \text{MOD}(\Delta) \subseteq \text{MOD}(\{\psi_1, \dots, \psi_m\})$.

Sei nun $\mathfrak{A} \in \text{MOD}(\{\phi_1, \dots, \phi_n\})$ beliebig.

$$\Rightarrow \mathfrak{A} \notin \text{MOD}(\{\psi_1, \dots, \psi_m\})$$

$$\Rightarrow \mathfrak{A} \notin \mathfrak{K}^c = \text{MOD}(\Delta) \subseteq \text{MOD}(\{\psi_1, \dots, \psi_m\})$$

$$\Rightarrow \mathfrak{A} \in \mathfrak{K} = \text{MOD}(\Gamma).$$

Damit gezeigt:

$$\mathfrak{K} = \text{MOD}(\Gamma) = \text{MOD}(\{\phi_1, \dots, \phi_n\})$$

Also ist \mathfrak{K} endlich axiomatisiert.

Q.E.D.

13.7 Korollar: Die Klasse aller unendlichen Mengen ist axiomatisierbar, nicht aber endlich axiomatisierbar.

Bew.:

Die Aussagenmenge $\{\lambda_n : 1 < n \in \mathbb{N}\}$ – wobei die Aussagen λ_n wie oben definiert sind – axiomatisiert unendliche Mengen. Gäbe es eine endliche Axiomatisierung dieser Klasse, dann könnte man nach Lemma 12.6 die Klasse aller endlichen Mengen (sogar endlich) axiomatisieren. WIDERSPRUCH Q.E.D.

Zum Abschluss dieses Paragraphen werden noch die Sätze von Löwenheim und Skolem vorgestellt. Diese machen Aussage über die Existenz von Strukturen in einer vorgegebenen (unendlichen) Kardinalität. Dazu wird zunächst eine direkte Folge des Modell-Existenz-Satzes vorgestellt.

13.8 Korollar (Modell-Existenz-Satz): Sei \mathcal{L} eine formale Sprache erster Stufe mit

$$|\{\zeta : \zeta \text{ ist Relations- oder Funktionszeichen oder Konstante von } \mathcal{L}\}| = \kappa \geq \aleph_0$$

für eine Kardinalzahl κ und $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ eine Aussagenmenge.

Ist $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ konsistent, dann hat Γ ein Modell $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ mit $|A| \leq \kappa$.

Bew.:

$|\mathcal{L}| = \kappa$ und damit $|\mathcal{L}_H| = \kappa$ und auch $|X| = \kappa$, wobei X die Menge aller geschlossenen Terme von \mathcal{L}_H ist.

Damit gilt für den Grundbereich von \mathfrak{A} , konstruiert wie im Satz von Henkin: $|A| \leq \kappa$. (Durch Äquivalenzklassen-Bildung kann sich die Kardinalität echt verkleinern.) Q.E.D.

13.9 Theorem (Löwenheim-Skolem – Abwärts-Aussage): Sei \mathcal{L} formale Sprache mit der Kardinalität $|\mathcal{L}| = \kappa$ und $\lambda > \kappa$ eine Kardinalzahl.

Besitzt eine Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ ein Modell der Kardinalität λ , dann besitzt Γ für jede Kardinalzahl κ' mit $\kappa \leq \kappa' \leq \lambda$ ein Modell der Kardinalität κ' .

Bew.:

Füge zur Sprache \mathcal{L} eine Menge $\{c_i; i \in I\}$ neuer Individuen-Konstanten hinzu. Dabei sei $|I| = \kappa'$, die Konstanten paarweise verschieden ($c_i \neq c_j$ für $i \neq j$) und \mathcal{L}' die resultierende Sprache.

Sei $\Gamma' := \Gamma \cup \{c_i \neq c_j; i, j \in I \text{ und } i \neq j\}$, was eine konservative Erweiterung von Γ in der erweiterten Sprache \mathcal{L}' ist.

Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ ein Modell von Γ der Kardinalität λ ($|\mathfrak{A}| = \lambda$).

\mathfrak{A}' sei diejenige Struktur, die aus \mathfrak{A} resultiert, wenn zusätzlich κ' viele Individuen aus A ausgezeichnet werden. (Diese Konstruktion ist möglich, da $|\mathfrak{A}| = \lambda > \kappa'$.)

Es gilt: $\mathfrak{A}' \models \Gamma$ und $\mathfrak{A}' \models c_i \neq c_j$ für alle $i \neq j \in I$.

Damit gilt: $\mathfrak{A}' \models \Gamma'$.

Nach dem Korollar zum Modell-Existenz-Satz hat nun Γ' ein Modell \mathfrak{B}' mit der Kardinalität der Sprache. Also $|\mathfrak{B}'| = |\mathcal{L}'| = \kappa'$.

Sei nun \mathfrak{B} diejenige Struktur, die aus \mathfrak{B}' entsteht, indem man die Auszeichnung der Individuen-Konstanten c_i wegläßt.

\mathfrak{B} hat dieselbe Signatur wie \mathcal{L} und ist ein Modell von $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ als Theorie in der ursprünglichen Sprache \mathcal{L} , und es gilt: $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}'| = \kappa'$. Q.E.D.

Beispiel (Skolems Paradoxon): Wenn die Mengenlehre (etwa ZSF) widerspruchsfrei ist und damit überhaupt Modelle besitzt, dann besitzt sie schon ein abzählbares Modell. (Die Sprache \mathcal{L}_{ZF} ist nämlich abzählbar.)

Damit muss man den *Blick von Innen* vom *Blick von Außen* bei diesem Modell unterscheiden. So sind etwa Bijektionen, die von außen existieren, innerhalb des Modelles nicht notwendigerweise existent, da die Theorie ihre Existenz nicht beweist.

13.10 Theorem (Löwenheim-Skolem – Aufwärts-Aussage): Sei \mathcal{L} formale Sprache mit der Kardinalität $|\mathcal{L}| = \kappa$ und $\lambda \geq \kappa$ eine Kardinalzahl.

Besitzt eine Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ ein Modell der Kardinalität λ , dann besitzt Γ für jede Kardinalzahl μ mit $\mu \geq \lambda$ ein Modell der Kardinalität μ .

Bew.:

Wie in der Abwärts-Aussage fügen wir der Sprache \mathcal{L} eine Menge $\{c_i; i \in I\}$ neuer Individuen-Konstanten hinzu. Dabei sei $|I| = \mu$, die Konstanten paarweise verschieden ($c_i \neq c_j$ für $i \neq j$) und \mathcal{L}' die resultierende Sprache.

Wir betrachten wieder $\Gamma' := \Gamma \cup \{c_i \neq c_j; i, j \in I \text{ und } i \neq j\}$ als konservative Erweiterung von Γ in der erweiterten Sprache \mathcal{L}' .

Wir zeigen für jede endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma'$, dass Δ ein Modell besitzt:

Sei dazu $\Delta \subseteq \Gamma'$ beliebige endliche Teilmenge. Damit enthält Δ höchstens die neuen Individuen-Konstanten c_{i_1}, \dots, c_{i_k} für ein $k \in \mathbb{N}$.

$$\Delta \subseteq \Gamma \cup \{c_{i_p} \neq c_{i_q}; p \neq q \leq k\} =: \Gamma_0$$

Klar ist: Jedes Modell von Γ_0 ist auch ein Modell von Δ .

Wir betrachten das Modell $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ von Γ mit der Kardinalität λ . Daraus erhalten wir eine Struktur \mathfrak{A}' , indem wir zusätzlich k viele Individuen aus A auszeichnen.

Es gilt: $\mathfrak{A}' \models \Gamma_0$. Damit auch schon: $\mathfrak{A}' \models \Delta$.

Damit hat jede endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma'$ ein Modell und mit dem Kompaktheitssatz folgt nun, dass Γ' erfüllbar ist und ein Modell \mathfrak{B}' hat. D.h.: $\mathfrak{B}' \models \Gamma'$

Da $\mathfrak{B}' \models c_i \neq c_j$ für jedes $i \neq j \in I$, gilt: $|\mathfrak{B}'| \geq \mu = |I|$

Mit der Abwärts-Aussage läßt sich nun das Ergebnis verbessern:

Wir erhalten ein Modell \mathfrak{B}'' von Γ' mit $|\mathfrak{B}''| = |\mathcal{L}'| = \mu$.

Diese Struktur ist ebenfalls ein Modell von $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Durch das Weglassen der Interpretationen der neuen Individuen-Konstanten erhält man schließlich ein Modell \mathfrak{B} von Γ mit geeigneter Signatur (für die ursprüngliche Sprache \mathcal{L}). Da lediglich die Auszeichnungen weggelassen wurden, der Grundbereich aber unverändert bleibt, gilt zudem: $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}''| = \mu$. Q.E.D.

Bemerkungen:

- (1) Die Aufwärts-Aussage liefert z.B. Nicht-Standard-Modelle der Arithmetik.
- (2) Das Beweisverfahren der Löwenheim-Skolem-Theoreme besteht darin, die Sprache geeignet zu erweitern und aus den Termen der Sprache ein geeignetes Termmodell gemäß dem Modell-Existenz-Lemma zu „konstruieren“.