PD. Dr. Klaus Reinhardt **Universität Tübingen, WS 09/10**

Übungen zur Mathematischen Logik I
Blatt 11

Aufgabe 44: Erweitern Sie das Alphabet einer formalen Sprache $\mathcal{L}$ um den Quantor ꟻ (fast alle). Erweitern Sie die Definition der Auswertung von Formeln (DEF 9.4), so dass $\text{ꟻ}x\,\phi$ genau dann wahr ist, wenn ϕ bis auf endlich viele Ausnahmen wahr ist. Prüfen Sie damit die folgenden Behauptungen für beliebige Formeln $\phi \in \mathcal{L}'$ der erweiterten Sprache:

(a) $\models \text{ꟻ}x\phi(x) \to \exists x\phi(x)$

(b) $\mathfrak{A} \models \text{ꟻ}x\phi(x) \land \text{ꟻ}x\psi(x) \to \exists x(\phi(x) \land \psi(x))$, falls $\mathfrak{A}$ unendlich ist.

(c) $\mathfrak{A} \models \text{ꟻ}x\phi(x) \land \text{ꟻ}x\neg\phi(x) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A}$ ist endlich.

Aufgabe 45: Sei $\Delta := \{\forall x(x = x), \forall xyz(x = y \land z = y \to x = z)\} \subseteq \mathcal{L}$ für eine beliebige Sprache $\mathcal{L}$ gegeben. Zeigen Sie im Kalkül NK$'$ folgende Behauptungen über Ableitbarkeit:

(a) $\Delta \vdash \forall xy(x = y \to y = x)$

(b) $\Delta \vdash \forall xyz(x = y \land y = z \to x = z)$

Hinweis: Im Kalkül NK$'$ gibt es keine Schlussregeln für die Gleichheit.

Aufgabe 46: Zeigen Sie im Kalkül NK$'_=$ die folgende Behauptung über Ableitbarkeit:

(a) $\vdash \forall z(x = z \to y = z) \leftrightarrow x = y$

(b) $\forall x(f(x) = g(x)) \vdash \forall x(f(f(x)) = g(g(x)))$

Aufgabe 47: Zeigen Sie im Kalkül NK die folgenden Behauptungen über Ableitbarkeit:

(a) $\exists x(\phi(x) \land \psi) \vdash \forall \phi(x) \land \psi$, sofern $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$

(b) $\vdash \forall x\phi(x) \to \neg\exists x\neg\phi(x)$

(c) $\vdash \neg\exists x\neg\phi(x) \to \forall x\phi(x)$

Hinweis: Im Kalkül NK ist der Quantor $\exists$ ein eigenständiges Zeichen mit eigenen Schlussregeln und insbesondere die Formel $\exists x\phi$ keine Abkürzung.

Abgabe der Aufgaben am Do. 28.1.2010 nach der Vorlesung