Übungen zur Vorlesung Mathematischen Logik — Blatt 7

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **SS 2012**

Aufgabe 27 (2 + 2 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind konsistent? Geben Sie jeweils eine Begründung an.

a) $\{p_0 \to p_1,\ p_0 \wedge p_2 \to p_1 \wedge p_3,\ p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \to p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, \ldots\}$

b) $\{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0,\ p_1 \to (\neg p_1 \to p_2),\ p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$

Aufgabe 28 (3 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 7.4 aus der Vorlesung.
Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ eine Menge von Aussagen. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(1) Γ ist konsistent.

(2) Es gibt keine Formel $\varphi \in \mathrm{PROP}$, so dass: $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

(3) Es gibt $\varphi \in \mathrm{PROP}$ mit $\Gamma \nvdash \varphi$.

Aufgabe 29 (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

Eine Menge Γ heiße *vollständig*, falls für jede Formel φ entweder $\Gamma \vdash \varphi$ oder $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

a) Zeigen Sie durch Induktion über φ, dass $\{p_k |\ k \text{ ist eine Primzahl}\} \cup \{\neg p_k |\ k \text{ ist keine Primzahl}\}$ vollständig ist. (Es wird angenommen, dass Formeln mit Hilfe von $\wedge$, $\to$ und $\bot$ aufgebaut sind.)

b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\sigma \mid \Gamma \vdash \sigma\}$ maximal konsistent ist genau dann, wenn Γ vollständig ist.

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen eine geeignete Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ an. Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

a) Γ hat keine maximal-konsistente Erweiterung.

b) Γ hat genau eine maximal-konsistente Erweiterung.

c) Γ hat genau zwei maximal-konsistente Erweiterungen.

d) Γ hat überabzählbar viele maximal-konsistente Erweiterungen.

Abgabe der Aufgaben am Do. 21.12.2010 nach der Vorlesung oder als PDF im Internet.