KAPITEL III:

Modelltheorie

Von der Logik haben wir bisher zwei verschiedene Seiten kennengelernt: die eine Seite wird von der Folgerungs-Relation und der Gültigkeits-Relation $\models$ (Gültigkeit einer $\mathcal{L}$-Formel Φ in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$) und die andere Seite von der Herleitbarkeits-Relation $\vdash$ (Herleitbarkeit einer Formel Φ aus einer Menge Σ von Prämissen) beherrscht. Beide Seiten sind im Laufe der letzten hundert Jahre intensiv bearbeitet worden. Das hat zu einer Bereicherung der Logik einerseits um ein „Modelltheoretisches" Kapitel und andererseits um ein „Beweistheoretisches" Kapitel geführt. In diesem Kapitel wollen wir die modelltheoretische Seite beleuchten.

Ausgangspunkt der Modelltheorie ist der Satz 13.7 von Gödel. Dieser Satz führt auf direktem Wege zu einigen anderen grundlegenden Sätzen, dem Kompaktheits-Satz von Gödel-Malzew (1930/1936) und dem Satz von Löwenheim-Skolem (1914/1920). Wir schlagen diesen Weg ein und stoßen dabei auf die Begriffe der (endlichen) Axiomatisierbarkeit einer Theorie, der Kategorizität (oder Monomorphie) einer Theorie, der Existenz von Nonstandard Modellen einer Theorie, etc.

In der Modelltheorie geht es um die Konstruktion von $\mathcal{L}$-Strukturen unter gleichzeitiger Kontrolle der in ihnen geltenden $\mathcal{L}$-Aussagen.

§15. *Der Kompaktheits-Satz*

Der Gödelsche Vollständigkeits-Satz hat einen bedeutenden modelltheoretischen Satz zur Konsequenz. Gödel hatte diese Konsequenz noch nicht in seiner Dissertation formuliert. In der publizierten und leicht überarbeiteten Fassung aus dem Jahre 1930 findet sich diese Konsequenz jedoch als Satz 10, die zwanzig Jahre später den Namen 'Kompaktheits-Satz' erhalten hat. Bei Gödel wird dieser Satz nur für abzählbare Sprachen formuliert. Erst dem russischen Mathematiker Anatol Malzew gelang 1936 die Verallgemeinerung auf quantorenlogische Sprachen beliebiger Mächtigkeit.

15.1 Satz (Kompaktheits-Satz von K. Gödel - A.I. Malzew, 1936) *Sei Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen. Dann hat Σ genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge von Σ ein Modell hat.*

Beweis. (1) Wenn $\mathfrak{M}$ ein Modell von Σ ist, dann ist $\mathfrak{M}$ auch ein Modell einer jeden Teilmenge von Σ.

(2) Umkehrung: Wir nehmen an, daß jede endliche Teilmenge von Σ ein Modell hat. Wenn Σ selbst kein Modell hat, dann ist Σ nach Gödels Satz 13.7 widerspruchsvoll. Es gilt also $\Sigma \vdash \Gamma \wedge \neg \Gamma$ für eine Aussage Γ. Nach Definition 12.1 gibt es eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Sigma$ mit $\Delta \vdash \Gamma \wedge \neg \Gamma$, also auch $\Delta \models \Gamma \wedge \neg \Gamma$ nach dem Korrektheits-Satz. Nach Voraussetzung hat Δ ein Modell $\mathfrak{N}$. Es müßte dann auch $\mathfrak{N} \models \Gamma$ und $\mathfrak{N} \models \neg \Gamma$ gelten, was aber nach Satz 9.4(4) und (6) unmöglich ist. ❑

Der obige Beweis des Kompaktheits-Satzes beruht ganz wesentlich auf dem Gödelschen Satz 13.7. Der Beweis benötigt also beträchtliche Vorbereitungen. Es ist daher bemerkenswert, daß Dana Scott 1957 (siehe: Summaries of talks Summer Institute for Symbolic Logic, Cornell University 1957) einen neuen, etwas direkteren Beweis des Kompaktheits-Satzes gefunden hat. Sein Beweis verwendet die Methode der Ultraprodukte (Jerzy Łoś, 1954) und setzt nur den Satz von Łoś über die Gültigkeit von Aussagen in Ultraprodukten voraus (siehe auch: Frayne-Morel-Scott: „*Reduced direct products*", Fund. Math. 51(1962), pp.195-228).

Satz 15.1 wurde von Alfred Tarski als 'Kompaktheits-Satz' bezeichnet (siehe A.Tarski: *„Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics"*, Internationaler Mathematiker-Kongress in Cambridge/Mass. 1950, publiziert 1952, Band 1, pp.705-720). Wir wollen etwas auf die Topologie eingehen.

Bemerkungen zur Topologie. Als Begründer der *Topologie* ist Johann Benedikt Listing (1808-1882) zu nennen. Er war Schüler von Carl Friedrich Gauß (1777-1855). In den Göttingen Studien, Band 1 (1847), pp.811-875, ließ er eine Arbeit mit dem Titel „Vorstudien zur Topologie" drucken, in der er zur Schaffung einer mathematischen Disziplin aufruft, die er „Topologie" nennen möchte. ὁ τόπος ist „der Ort, die Stelle, der Fleck, der Landstrich, die Gegend". Das Wort *topos* meint nicht „Punkt", sondern vielmehr „Gegend, Umgebung, Platz". Die von Listing entworfene Topologie sollte die *qualitativen* Aspekte der „Nähe" studieren, ohne auf die *quantitativen* Aspekte, die eine Metrik liefert, zurückgreifen zu müssen. Es gab schon vor Listing Überlegungen topologischer Art, die aber immer von einer vorgegebenen Metrik ausgingen, wie etwa Leibniz in seiner *analysis situs* (Analysis der Lage). Die Topologie benötigt den Mengenbegriff und wurde erst von Georg Cantor, Maurice Fréchet, Felix Hausdorff und anderen zu einer eigenständigen Theorie ausgebaut.

Der Begriff des *»Topologischen Raumes«* kann auf verschiedene Weise eingeführt werden: entweder man geht vom Begriff der „offenen Menge" (F. Hausdorff, 1914), oder vom Begriff der „abgeschlossenen Hülle" (C. Kuratowski, 1922) oder vom Begriff der Konvergenz (E.H. Moore-H.L. Smith, 1922, und H. Cartan, 1937) aus. Uns genügt hier die klassische Definition von Felix Hausdorff. Dabei sei $P(R) = \{X; X \subseteq R\}$ die Potenzmenge der Menge R.

Definition (F. Hausdorff: „Grundzüge der Mengenlehre", 1914): Ein geordnetes Paar $\langle R,\tau\rangle$ wird topologischer Raum genannt, wenn $R \neq \emptyset$ und $\tau \subseteq P(R)$ und die folgenden Anforderungen erfüllt sind:

(H1) $\emptyset \in \tau \;\&\; R \in \tau$,

(H2) $\forall \mathfrak{X} \subseteq \tau\colon \bigcup \mathfrak{X} \in \tau$,

(H3) $\forall \mathfrak{X} \subseteq \tau (\mathfrak{X}$ endlich $\Rightarrow \bigcap \mathfrak{X} \in \tau)$.

Die Elemente von τ werden *'offene'* Mengen genannt.

Trennbarkeitsaxiome. Das System τ aller offenen Teilmengen eines topologischen Raumes $\langle R,\tau\rangle$ kann so arm sein, daß $\emptyset$ und R die einzigen offenen Mengen sind, aber es kann auch so reichhaltig sein, daß jede Teilmenge X von R offen ist. Zwischen beiden Extremen sind die interessanten topologischen

Räume angesiedelt. Die Reichhaltigkeit von τ läßt sich an der Möglichkeit, verschiedene Punkte, bzw. Punktmengen durch offene Mengen zu trennen, gut messen. Dies geschieht durch die sogenannten Trennbarkeitsaxiome (T_0),...,(T_5). Das folgende Trennungs-Axiom wurde zuerst von Felix Hausdorff („Grundzüge der Mengenlehre", Leipzig 1914, Seite 213) formuliert.

Definition Ein topologischer Raum $\langle R,\tau\rangle$, der das folgende Trennungs-Axiom (T_2) erfüllt, wird *Hausdorff-Raum* (oder auch T_2-Raum) genannt

(T_2) $\forall x,y \in R(x \neq y \Rightarrow \exists U,V \in \tau: \ x \in U \ \& \ y \in V \ \& \ U \cap V = \emptyset)$.

Definition. Ein topologischer Raum $\langle R,\tau\rangle$ heißt *kompakt* (in der älteren Literatur: *bikompakt*), wenn er erstens Hausdorffsch ist und zweitens jede Familie $\mathcal{F}$ offener Mengen, welche R überdeckt, eine endliche Teilfamilie enthält, die bereits R überdeckt, - mit anderen „Worten", wenn

$$\forall \mathcal{F}[(\mathcal{F} \subseteq \tau \ \& \ R = \cup\mathcal{F}) \Rightarrow (\exists \mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}, \ \mathcal{E} \text{ endlich } \& \ R = \cup\mathcal{E})].$$

Der Begriff der Kompaktheit geht auf Eduard Heine (1821-1881), Georg Cantor (1845-1918) und Maurice Fréchet (1878-1973) zurück. Die „Kompaktheit" der abgeschlossenen beschränkten Teilmengen der reellen Gerade hatten E. Heine (Crelles Journal 74 (1872), pp.172-188) und G. Cantor (cf. Cantors Ges. Abhandlungen, p.97, p.117) bewiesen. Die Bezeichnung „Kompaktheit" hatte erst Fréchet 1906 eingeführt. Sie spielt an das lateinische Verb *compingĕre* an, was „zusammenfügen, eng zusammenpacken, vollpacken" bedeutet. In der Tat ist Kompaktheit eine bestimmte Form von „Vollgepacktheit" (Vollständigkeit), die sich rein topologisch, d.h. ohne Zuhilfenahme einer Metrik, formulieren läßt. Das folgende Beispiel ist instruktiv: das abgeschlossene reelle Intervall $[0,1] = \{a \in \mathbb{R};\ 0 \leq a \leq 1\}$ ist kompakt, dagegen ist das weniger „vollgepackte" rationale Intervall $[0,1] \cap \mathbf{Q} = \{a \in \mathbf{Q};\ 0 \leq a \leq 1\}$ nicht kompakt.

<u>Topologisierung des Raumes aller vollständigen, widerspruchsfreien Satzmengen</u>. Sei $\mathcal{L}$ eine quantorenlogische Sprache der 1. Stufe, $\mathcal{L}^o$ die Menge aller $\mathcal{L}$-Aussagen und

$$\mathcal{W} = \{\Sigma \subseteq \mathcal{L}^o;\ \text{es gibt eine } \mathcal{L}\text{-Struktur } \mathfrak{M}, \text{ so daß } \Sigma = \{\Phi \in \mathcal{L}^o;\ \mathfrak{M} \models \Phi\}\}$$

die Menge aller möglichen „Welten" (d.h. die Menge aller maximalen, widerspruchsfreien Mengen von $\mathcal{L}$-Aussagen). Auf $\mathcal{W}$ führen wir eine Topologie τ wie folgt ein:

Definition. Eine Teilmenge X von $\mathcal{W}$ heißt *abgeschlossene* Teilmenge, wenn es eine Teilmenge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}^0$ gibt mit: $X = \{\Sigma \in \mathcal{W};\ \Gamma \subseteq \Sigma\}$.

Die Komplemente abgeschlossener Mengen heißen *offene* Mengen. Das System aller offenen Teilmengen von $\mathcal{W}$ werde mit τ bezeichnet. Man bestätigt, daß τ die drei Bedingungen (H1), (H2), (H3) erfüllt. Also ist $\langle \mathcal{W}, \tau \rangle$ ein topologischer Raum.

15.2 Satz (A. Tarski, 1950): *$\langle \mathcal{W}, \tau \rangle$ ist ein kompakter Hausdorff-Raum.*

Beweis. (1) Wir zeigen, daß $\langle \mathcal{W}, \tau \rangle$ ein Hausdorff-Raum ist: Es seien p und q zwei verschiedene Punkte des Raumes $\mathcal{W}$. Dann gilt $p \neq p \cap q \neq q$ und es gibt $\mathcal{L}$-Aussagen Φ und Ψ mit:

$$\Phi \in p \ \ \&\ \ \Phi \notin q \ \ \&\ \ \Psi \in q \ \ \&\ \ \Psi \notin p .$$

Aus $\Psi \notin p$ folgt $(\neg\Psi) \in p$ wie im Beweis des Satzes 13.6 von Lindenbaum. Aus $\Phi \notin q$ folgt ebenso $(\neg\Phi) \in q$.

Sei $\mathcal{U}(p) = \{\Sigma \in \mathcal{W};\ \Phi \wedge \neg\Psi \in \Sigma\} = \mathcal{W} - \{\Sigma \in \mathcal{W};\ \{\neg\Phi \vee \Psi\} \subseteq \Sigma\}$,

$$\mathcal{U}(q) = \{\Sigma \in \mathcal{W};\ \Psi \wedge \neg\Phi \in \Sigma\} = \mathcal{W} - \{\Sigma \in \mathcal{W};\ \{\Phi \vee \neg\Psi\} \subseteq \Sigma\}.$$

Offenbar sind $\mathcal{U}(p)$ und $\mathcal{U}(q)$ offene (und zugleich abgeschlossene) Teilmengen von $\mathcal{W}$, und $p \in \mathcal{U}(p)$ sowie $q \in \mathcal{U}(q)$. Auch $\mathcal{U}(p) \cap \mathcal{U}(q) = \varnothing$ ist klar.

(2) Wir zeigen, daß $\langle \mathcal{W}, \tau \rangle$ kompakt ist. Seien Y_i (für $i \in I$) offene Teilmengen von $\mathcal{W}$ mit $\mathcal{W} = \bigcup\{Y_i;\ i \in I\}$. Sei $X_i = \mathcal{W} - Y_i$. Dann ist $\varnothing = \bigcap\{X_i;\ i \in I\}$ ein Durchschnitt abgeschlossener Mengen X_i. Definitionsgemäß gibt es Satzmengen Γ_i mit $X_i = \{\Sigma \in \mathcal{W};\ \Gamma_i \subseteq \Sigma\}$ und es ist

$$\varnothing = \bigcap\{X_i;\ i \in I\} = \{\Sigma \in \mathcal{W};\ \bigcup\{\Gamma_i\,;\ i \in I\} \subseteq \Sigma\}.$$

Also hat $\bigcup\{\Gamma_i\,;\ i \in I\}$ kein Modell $\mathfrak{M}$ und ist nach Gödels Satz 13.7 widerspruchsvoll. Der Begriff der 'Widersprüchlichkeit' bezieht sich auf das Herleiten im Kalkül. Also (nach Definition 12.1) ist bereits $\bigcup\{\Gamma_i\,;\ i \in J\}$ widerspruchsvoll für eine geeignete endliche Teilmenge J von I. Das aber heißt, daß bereits $\bigcap\{X_i;\ i \in J\}$ leer ist, also $\mathcal{W} = \bigcup\{Y_i;\ i \in J\}$. ❑

Anwendungen des Kompaktheits-Satzes

Viele Klassen von Strukturen werden in der Mathematik auf axiomatischem Wege eingeführt. So wird beispielsweise der Begriff der 'Gruppe' (Evariste Galois, 1831) durch ein System von zwei oder drei Axiomen eingeführt und die

Klasse aller Gruppen ist die Klasse aller Modelle dieses Axiomensystems (vergl. §8). Auch der Begriff des 'Ringes' (David Hilbert, 1897) wird durch endlich viele Axiome (in einer etwas reicheren Sprache) eingeführt und die Klasse aller Ringe ist die Klasse aller Modelle dieses Axiomensystems.

Wenn Σ eine (endliche oder unendliche) Menge von Aussagen einer quantorenlogischen Sprache $\mathcal{L}$ ist, dann sei Mod(Σ) die Klasse aller $\mathcal{L}$-Strukturen, die Modelle von Σ sind,

$$\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathfrak{M};\ \mathfrak{M} \models \Sigma\}.$$

Definition. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen.

(1) Wir sagen, daß $\mathcal{K}$ *axiomatisierbar* ist, wenn es eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Aussagen gibt so, daß

$$\mathcal{K} = \{\mathfrak{M};\ \mathfrak{M} \models \Sigma\}.$$

(2) Wir sagen, daß $\mathcal{K}$ *endlich-axiomatisierbar* ist, wenn es eine endliche Menge Σ von $\mathcal{L}$-Aussagen gibt so, daß

$$\mathcal{K} = \{\mathfrak{M};\ \mathfrak{M} \models \Sigma\}.$$

Mit dem Kompaktheits-Satz kann man in vielen Fällen zeigen, daß eine gegebene Modellklasse keine endliche Axiomatisierung hat. Zur Illustration dieser Beweismethode zeigen wir:

<u>15.3</u> <u>Satz</u>: *Die Klasse $\mathcal{K}_0$ aller Körper der Charakteristik Null ist axiomatisierbar, aber nicht endlich-axiomatisierbar.*

<u>Beweis</u>: (1) Ein Axiomensystem für $\mathcal{K}_0$ läßt sich leicht angeben. Sei Σ die übliche endliche Menge aller Axiome für den Begriff eines 'Körpers' (Richard Dedekind, 1871) und für eine Primzahl p sei Φ_p die Aussage, daß die Charakteristik des Körpers p ist, also $\Phi_2 \triangleq 1 \dot{+} 1 = 0$,

$\Phi_3 \triangleq 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 = 0$ und allgemein: $\Phi_p \triangleq \underbrace{1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} \ldots \dot{+} 1}_{p} = 0$. Betrachte:

$$T = \Sigma \cup \{\neg\Phi_p;\ 2 \le p \in \mathbb{N},\ p \text{ ist Primzahl}\}.$$

Es ist klar, daß $\mathcal{K}_0$ die Menge aller Modelle von T ist. Dabei ist T eine unendliche Menge von Axiomen.

(2) Wir zeigen, daß $\mathcal{K}_0$ nicht endlich-axiomatisierbar ist.

Sei $\mathcal{L}$ die quantorenlogische Sprache, deren einzige außerlogische Zeichen $\dot{+}, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1$ sind. Angenommen, es gäbe eine endliche Menge Θ von $\mathcal{L}$-Aussagen so, daß $\mathcal{K}_0$ die Menge aller Modelle von Θ ist (Θ muß keine Teilmenge von T sein!). Sei Ψ die Konjunktion aller Aussagen aus Θ. Ein Modell von Ψ wäre also ein Körper der Charakteristik Null. Betrachte die folgende Menge von Aussagen:

$$\mathcal{A} = \{\text{Körper-Axiome}\} \cup \{\neg\Psi\} \cup \{\neg\Phi_p;\ 2 \leq p \in \mathbb{N} \ \&\ p \text{ ist Primzahl}\}.$$

Sei $\mathcal{B}$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{A}$ und sei q eine Primzahl mit $p < q$ für alle $(\neg\Phi_p) \in \mathcal{B}$. Dann ist der endliche Körper $\mathbb{Z}/(q) = GF(q)$ mit q Elementen ein Modell von $\mathcal{B}$. Nach dem Kompaktheitssatz hat ganz $\mathcal{A}$ ein Modell. Sei K ein Modell von $\mathcal{A}$. Dann ist K zunächst ein Modell aller Körper-Axiome, also ein Körper. K ist auch ein Modell der sämtlichen Aussagen $\neg\Phi_p$ und hat daher die Charakteristik 0. Also ist K ein Modell von Θ und daher auch von Ψ. Aber als Modell von $\mathcal{A}$ müßte K auch ein Modell von $\neg\Psi$ sein, ein Widerspruch! ❑

Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei betont, daß es bei der Frage, ob eine gegebene Klasse $\mathcal{K}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen axiomatisierbar (oder endlich-axiomatisierbar) ist, darum geht, ob diese Klasse $\mathcal{K}$ eine Beschreibung *in derselben Sprache* $\mathcal{L}$ hat! Wenn wir beispielsweise sagen, daß

$$\mathcal{K} = \{\langle K, +, -, \bullet, {}^{-1}, 0, 1\rangle;\ \langle K, +, -, \bullet, {}^{-1}, 0, 1\rangle \text{ ist ein Körper in dem für alle Primzahlen p: } p \neq 0 \text{ gilt}\}$$

sein soll, dann ist diese Beschreibung, so wie sie dasteht, eine Beschreibung mit mengentheoretischen Mitteln, denn es wird die Menge aller Primzahlen verwendet und über alle Elemente davon quantifiziert. Diese mengentheoretische Sprache ist aber von der quantorenlogischen Sprache $\mathcal{L}(\dot{+}, -, \bullet, {}^{-1}, 0, 1)$ der Körper-Theorie verschieden. In $\mathcal{L}(\dot{+}, -, \bullet, {}^{-1}, 0, 1)$ kann die Forderung, daß die Charakteristik Null sei, nur mit unendlich vielen einzelnen Forderungen (Axiomen) ausgedrückt werden. In der sehr viel reicheren mengentheoretischen Sprache (vergl. §8, Seite 69) können wir über die natürlichen Zahlen (und über die Primzahlen) quantifizieren und erreichen so eine Beschreibung endlicher Länge. In der „elementaren" Sprache $\mathcal{L}(\dot{+}, -, \bullet, {}^{-1}, 0, 1)$ hingegen kann man nur über Elemente der jeweiligen Körper quantifizieren, nicht aber über natürliche Zahlen.

— * — * —

Der Kompaktheitssatz kann auch benutzt werden, um zu zeigen, daß bestimmte Klassen von $\mathcal{L}$-Strukturen überhaupt keine Axiomatisierung (in derselben Sprache $\mathcal{L}$) besitzen. Als einfaches Beispiel nehmen wir die Klasse aller nilpotenten Gruppen. Die Klasse aller abelschen Gruppen ist offenbar axiomatisierbar, denn die Axiome der Gruppentheorie zusammen mit der Forderung der Kommutativität ist ein endliches Axiomensystem (in der Sprache der Gruppentheorie), deren Modelle gerade die abelschen Gruppen sind.

Im Unterschied dazu gilt jedoch: Die Klasse aller nilpotenten Gruppen ist nicht axiomatisierbar. - Wir erinnern an die folgenden Definitionen:

Definition. Für zwei Elemente x und y einer (multiplikativ geschriebenen) Gruppe G ist $[x,y] = x^{-1} \bullet y^{-1} \bullet x \bullet y$ der *Kommutator* von x und y. Die höheren Kommutatoren werden wie folgt definiert:

$$[x, y, z] = [x, [y, z]], \ldots$$

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k] = [x_0, [x_1, [x_2, \ldots, [x_{k-1}, x_k] \ldots]]]$$

Definition. Eine Gruppe G ist *nilpotent der Klasse k,* wenn

$$\forall x_0 \in G\ \forall x_1 \in G \ldots \forall x_k \in G \text{ gilt: } [x_0, x_1, \ldots, x_k] = 1$$

und $\exists x_1 \in G \ldots \exists x_k \in G : [x_1, x_2, \ldots, x_k] \neq 1$ gilt.

Eine Gruppe ist *nilpotent,* wenn es eine natürliche Zahl k gibt so, daß G nilpotent der Klasse k ist. Sei $\mathcal{K}_{nil}$ die Klasse aller nilpotenten Gruppen.

Den Namen „nilpotent" hatte Hans Zassenhaus in seinem „Lehrbuch der Gruppentheorie" (Leipzig 1937) eingeführt. Nilpotente Gruppen wurden unter anderem Namen aber schon im ausgehenden 19. Jahrhundert untersucht.

Nach dieser Definition sind die abelschen Gruppen genau die nilpotenten Gruppen der Klasse 1. Die Diëdergruppen

$$D_n = \langle a,b \,;\, a^2 = b^2 = (ab)^n = 1 \rangle$$

der Ordnung 2n sind genau dann nilpotent, wenn n eine Potenz von 2 ist. Dann ist $Z(D_n) = \{1, c^{n/2}\}$ (für $c = ab$) das Zentrum von D_n und für die Faktorgruppe gilt: $D_n / Z(D_n) = D_{n/2}$. Daraus folgt dann sofort:

D_{2^k} ist nilpotent der Klasse k, falls $1 \leq k \in \mathbb{N}$.

Die Klasse $\mathcal{K}_{nil}$ aller nilpotenten Gruppen wurde in der mengentheoretischen Sprache definiert. In der Definition wird über natürliche Zahlen quantifiziert und es stellt sich die Frage, ob die Klasse aller nilpotenten Gruppen auch in der rein gruppentheoretischen Sprache $\mathcal{L}$ (deren einzige außerlogische Zeichen $\bullet, ^{-1}, 1$ sind) beschrieben werden kann. Wir zeigen, daß das grundsätzlich unmöglich ist.

15.4 Satz: *Die Klasse aller nilpotenten Gruppen ist nicht axiomatisierbar.*

Beweis. Sei $\mathcal{L}$ die Sprache der Gruppentheorie mit den außerlogischen Zeichen $\bullet, ^{-1}, \dot{e}$. Wir nehmen an, es gäbe eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Aussagen so, daß $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathfrak{G};\ \mathfrak{G} \models \Sigma\}$ die Klasse aller nilpotenten Gruppen wäre. Betrachte

$$T = \Sigma \cup \{\Phi_k;\ 2 \leq k \in \mathbb{N}\}$$

wobei $\quad \Phi_k \triangleq \exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_k\, [x_0, x_1, \ldots, x_k] \neq 1 .$

Behauptung: jede endliche Teilmenge von T hat ein Modell.

Sei Δ eine endliche Teilmenge von T. Wähle eine natürliche Zahl m so, daß $\Phi_k \notin \Delta$ für alle $m \leq k$. Die Dieder-Gruppe D_{2k} ist demnach ein Modell von Δ.

Nach dem Kompaktheits-Satz hat ganz T ein Modell $\mathfrak{H}$. Dann ist $\mathfrak{H}$ insbesondere ein Modell von Σ und ist daher nach obiger Annahme eine nilpotente Gruppe. Aber $\mathfrak{H}$ ist auch Modell von allen Aussagen Φ_k und kann daher keine Nilpotenzklasse haben, ein Widerspruch! ❑

Nach diesem Muster kann man viele Klassen mathematischer Strukturen daraufhin überprüfen, ob sie axiomatisierbar sind oder nicht. Das kann in vielen Fällen jedoch sehr schwierig sein.

Wir geben noch eine dritte Anwendung des Kompaktheits-Satzes in der Algebra. Diese Anwendung soll zeigen, daß auch manche Sätze der Algebra und der Analysis etc. unter Verwendung des Kompaktheitssatzes sehr elegant und überzeugend bewiesen werden können.

Definition. Sei $\langle G,+,0\rangle$ eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe und sei $g \in G$, $g \neq 0$.

(1) Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei $ng = \underbrace{g+g+\ldots+g}_{n}$ (Summe von n Kopien von g).

(2) (A. Cauchy, 1815): o(g) sei die *Ordnung* von g. Dabei ist

$o(g) = \infty$ falls $ng \neq 0$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Es ist

$o(g) = k$ falls $kg = 0$ und $ng \neq 0$ für alle $1 \leq n < k$.

(3) $\langle G,+,0\rangle$ heißt *torsionsfrei,* wenn jedes von 0 verschiedene Element g von G eine unendliche Ordnung hat.

(4) $\langle G,+,0\rangle$ ist eine *Torsions-Gruppe,* falls jedes von 0 verschiedene Element eine endliche Ordnung hat. Torsions-Gruppen werden auch *„periodische Gruppen"* genannt.

Im Lateinischen bedeutet 'torquēre' (torquĕo, torsi, tortum) „drehen, umdrehen, verdrehen, verrenken" (und daher auch „foltern"). Zum Partizip 'tortum' gibt es die Nebenform 'torsum' woraus das Wort 'Torsion' (die Verdrehung, Windung) entstanden ist.
Man nennt Elemente endlicher Ordnung 'Torsions-Elemente', weil sich die Folge der Potenzen $g, g^2, g^3, \ldots, g^{n-1}, g^n = 1, g^{n+1} = g, g^{n+2} = g^2, \ldots$ gewissermaßen unendlich oft „im Kreise dreht".

Beispiele. (1) Die (additiv geschriebene) Gruppe **Z** aller ganzen Zahlen ist torsionsfrei und die (additiv geschriebene) Gruppe **Q** aller rationalen Zahlen ist torsionsfrei.

(2) Die Faktorgruppe **Q/Z** ist jedoch eine Torsionsgruppe, denn für eine rationale Zahl a/b mit teilerfremden ganzen Zahlen a und b ist b die Ordnung der Nebenklasse a/b + **Z.** Man nennt **Q/Z** die *Torus-Gruppe.*

Definition. Eine additiv geschriebene abelsche Gruppe $\langle G,+,0\rangle$ ist eine *anordenbare* Gruppe (kurz: eine *O-Gruppe*), falls auf G eine lineare Ordnung $\leq$ eingeführt werden kann, so daß das folgende Monotonie-Gesetz gilt:

$$\forall a,b,c \in G\,(a \leq b \;\Rightarrow\; a+c \leq b+c)$$

Der folgende Satz wurde zuerst von Friedrich-Wilhelm Levi (*„Arithmetische Gesetze im Gebiet diskreter Gruppen"*, Rendiconti Palermo 35 (1913), pp.225-236) bewiesen. Wir geben hier einen anderen Beweis unter Verwendung des Kompaktheitssatzes. Im Beweis benötigen wir nur den folgenden wohlbekannten Satz der Gruppentheorie:

Satz von Frobenius-Stickelberger (Crelle J.Math. 86(1878), pp.217-262): *Jede endlich-erzeugte abelsche Gruppe kann als direkte Summe zyklischer Gruppen geschrieben werden.*

Beweise dieses grundlegenden Satzes findet man in nahezu allen Lehrbüchern der Algebra, beispielsweise in K.Meyberg „Algebra, Band 1" (München 1980), Seite 78.

<u>**15.5 Satz**</u> (F.W.Levi, 1913) *Für abelsche Gruppen* G *gilt:*

G *ist eine* O-*Gruppe genau dann wenn* G *torsionsfrei ist.*

<u>Beweis</u>. (1) Sei $\langle G,+,0\rangle$ eine abelsche O-Gruppe und $0 \neq g \in G$. Sei $\leq$ eine lineare Ordnung auf G, für die das oben genannte Monotonie-Gesetz gilt.

1. Fall: $0<g$. Wir addieren (auf beiden Seiten) g und erhalten aufgrund der Monotonie: $g=0+g<g+g=2g$, und mit $0<g$ folgt daraus $0<g<2g$. Genauso folgt $0<3g$ etc. und allgemein $0<ng$, also insbesondere $0 \neq ng$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Also hat g unendliche Ordnung.

2.Fall: $g<0$. Hier liefert die Monotonie $2g<0$, etc. und es folgt $0 \neq ng$ wie oben. Also sind ordenbare abelsche Gruppen stets torsionsfrei.

(2) Umkehrung: Sei $\langle G,+,0\rangle$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe und $\mathcal{L}$ die quantorenlogische Sprache, deren einzige außerlogische Zeichen $\dot{+}$ und $\dot{0}$ sind. $\langle G,+,0\rangle$ ist also eine $\mathcal{L}$-Struktur. Wir expandieren $\mathcal{L}$, indem wir ein zweistelliges Relations-Zeichen $\dot{\leq}$ und Individuen-Konstanten $\dot{g}$ (für $g \in G$) zum Alphabet von $\mathcal{L}$ hinzufügen. Die expandierte Sprache sei $\mathcal{L}^*$ genannt. Betrachte die folgende Menge von $\mathcal{L}^*$-Aussagen:

$$\begin{aligned}
\Sigma =& \{\forall x \forall y \forall z\, ((x \dot{+} y) \dot{+} z = x \dot{+} (y \dot{+} z)),\ \forall x \forall y : x \dot{+} y = y \dot{+} x,\ \forall x \forall y \exists v : x \dot{+} v = y\} \\
& \cup \{\forall x : x \dot{\leq} x,\quad \forall x,y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \rightarrow x = y), \\
& \qquad \forall x,y (x \dot{\leq} y \vee y \dot{\leq} x),\quad \forall x,y,z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \rightarrow x \dot{\leq} z)\} \\
& \cup \{\forall x,y,z (x \dot{\leq} y \rightarrow x \dot{+} z \dot{\leq} y \dot{+} z)\} \\
& \cup \{\dot{g} \dot{+} \dot{h} = \dot{k};\ g,h,k \in G \ \&\ g+h=k \ (\text{in } G)\} \\
& \cup \{\dot{g} \dot{+} \dot{h} \neq \dot{k};\ g,h,k \in G \ \&\ g+h \neq k (\text{in } G)\}.
\end{aligned}$$

In der ersten Klammer stehen die Axiome für abelsche Gruppen, in der zweiten Klammer stehen die Axiome für lineare Ordnungen, in der dritten Klammer steht das Monotonie-Gesetz und in den beiden letzten Klammern das „Cayley-Diagramm" von G (d.h. die volle Additions-Tafel von G einschließlich aller Ungleichheiten).

Behauptung: Σ hat ein Modell.

Sei Δ eine endliche Teilmenge von Σ und sei

$$D = \{g;\ g \in G\ \&\ \dot{g} \text{ kommt in einer Formel aus } \Delta \text{ vor}\}.$$

Sei H die von D erzeugte Untergruppe (von G). Da D endlich ist, ist H (nach dem Satz von Frobenius-Stickelberger) isomorph zur direkten Summe von endlich vielen Kopien der Gruppe $\langle \mathbf{Z},+,0\rangle$ der ganzen Zahlen, etwa $H \cong \mathbf{Z}^{(m)} = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}$ (m Summanden). Da $\mathbf{Z}$ linear geordnet ist, kann auch $\mathbf{Z}^{(m)}$ auf lexikographische Weise linear geordnet werden. In Bezug auf diese lexikographische Ordnung $\leq$ erfüllt $\mathbf{Z}^{(m)}$ das Monotonie-Gesetz. Wenn wir $\dot{\leq}$ durch $\leq$ interpretieren, $\dot{+}$ durch $+$ und $\dot{g}$ durch g, dann ist offenbar $\langle H,+,0,\leq\rangle$ ein Modell von Δ.

Jetzt folgt aus dem Kompaktheits-Satz, daß auch ganz Σ ein Modell hat.

Sei $\mathfrak{M} = \langle M,+,0,m_g,\leq\rangle_{g \in G}$ ein Modell von Σ, wobei m_g die Interpretation der Individuen-Konstante $\dot{g}$ sei. Dann ist $\langle M,+,0,\leq\rangle$ eine linear-geordnete abelsche Gruppe und $\{m_g;\ g \in G\}$ ist eine linear-geordnete Untergruppe von M. Offenbar ist $m_g \mapsto g$ (für $g \in G$) ein Isomorphismus und dieser überträgt die lineare Ordnung auf G. ❑

Literatur

Kurt Gödel: *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls.* Monatshefte für Mathematik u.Physik 37 (1930), pp.349-360.

A.I.Malzew: *Untersuchungen aus dem Gebiet der mathematischen Logik.* Math. Sbornik N.S. 1 (1936), pp.323-336.

Übungsaufgaben zu §15

Sei $\mathcal{W}$ der Raum aller vollständigen, widerspruchsfreien Satzmengen.

(1) Zeigen Sie, daß die Mengen der Form $X = \{\Sigma \in \mathcal{W};\ \Phi \in \Sigma\}$, wobei Φ eine $\mathcal{L}$-Aussage ist, genau die Teilmengen des Raumes $\mathcal{W}$ sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Definition. Hausdorff-Räume $\langle R,\tau\rangle$, die das folgende Trennungs-Axiom (T_4) erfüllen, werden seit Alexandroff und Urysohn (Math. Annalen 92 (1924), pp. 258-266) *normal* genannt.

(T_4) $\forall A,B\in\tau(A\cup B=R\Rightarrow\exists U,V\in\tau:(R-A)\subseteq U\&(R-B)\subseteq V\&\ U\cap V=\emptyset)$

Das Axiom (T_4) wurde von H. Tietze („Beiträge zur allg. Topologie", Math. Annalen 88 (1923), pp.290-312) eingeführt.

(2) Zeigen Sie, daß der Raum $\langle\mathcal{W},\tau\rangle$ *normal* ist.

Tip: Verwende den Kompaktheitssatz (oder §7, Aufgabe 2).

(3) Zeigen Sie, daß der Raum $\langle\mathcal{W},\tau\rangle$ *total-unzusammenhängend* ist, d.h., daß es zu je zwei verschiedenen Punkten p und q des Raumes $\mathcal{W}$ stets offene Mengen $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ gibt mit $\mathcal{U}\cup\mathcal{V}=\mathcal{W}$ & $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\emptyset$ & $p\in\mathcal{U}$ & $q\in\mathcal{V}$. (diesen Begriff hatte W. Sierpiński, Fund.Math. 2 (1921), pp.81-95, eingeführt).

(4) Zeigen Sie, daß im Falle einer abzählbaren Sprache $\mathcal{L}$ der Raum $\langle\mathcal{W},\tau\rangle$ das zweite Abzählbarkeits-Axiom erfüllt (d.h. eine abzählbare Basis hat).

(5) Zeigen Sie, daß die Klasse aller wohlgeordneten Mengen nicht axiomatisierbar ist.

(6) Zeigen Sie, daß die Klasse aller auflösbaren Gruppen nicht axiomatisierbar ist.

(7) Zeigen Sie, daß die Klasse $\mathcal{K}_{\mathrm{aaK}}$ aller algebraisch-abgeschlossenen Körper zwar axiomatisierbar, aber nicht endlich-axiomatisierbar ist.

(8) Zeigen Sie unter Verwendung des Kompaktheitssatzes 15.1 der Quantoren-Logik, daß jede partielle Ordnung stets zu einer linearen Ordnung erweitert werden kann (Vergl. §7, Aufgabe (3), wo dieser Ordnungs-Erweiterungs-Satz aus dem Kompaktheits-Satz der Aussagenlogik gefolgert werden sollte).