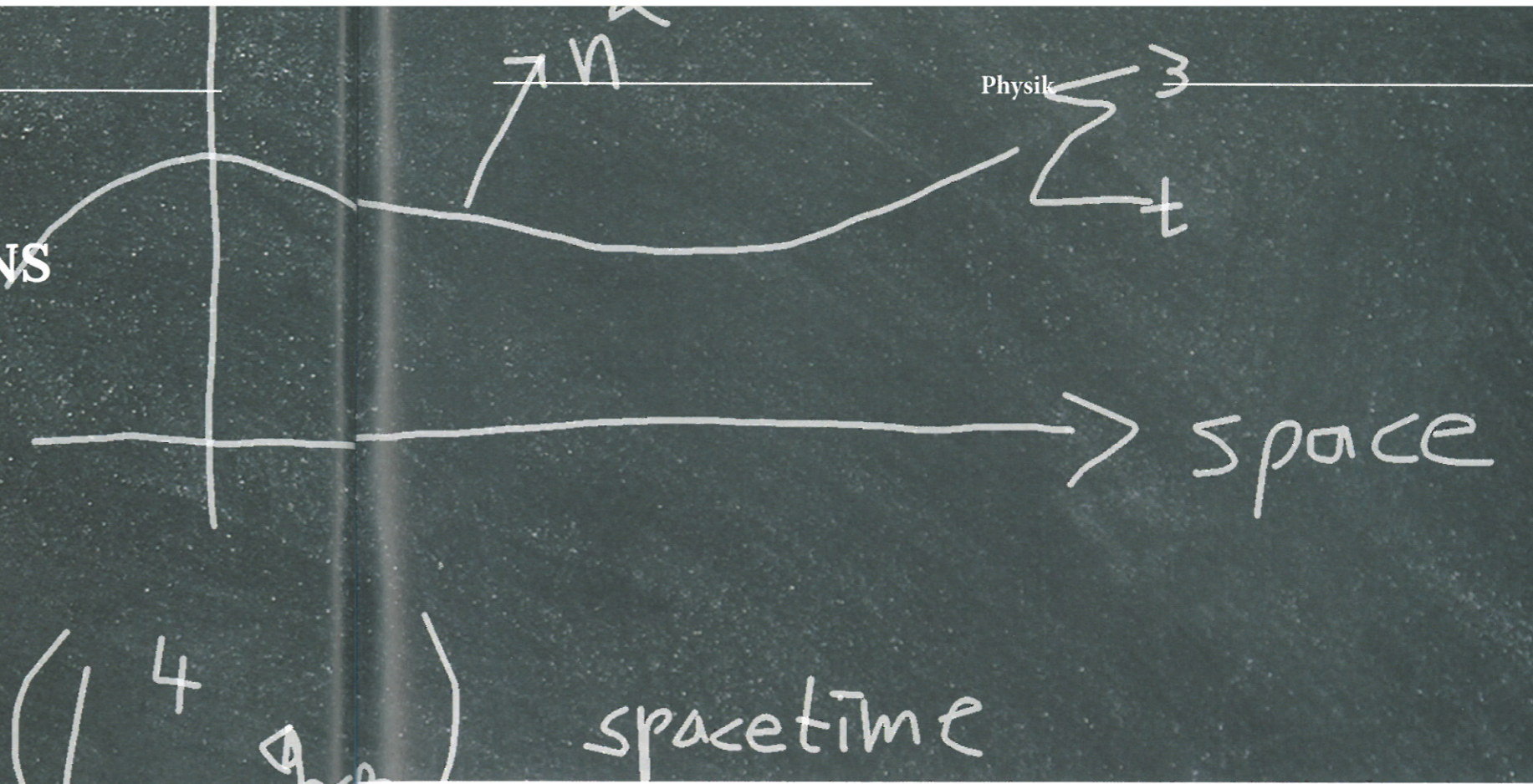


Physik  
hypersurface

## WIE LÖST MAN EINSTEINS GLEICHUNG?

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist durch eine Feldgleichung definiert. Das Lösen dieser Gleichung beschäftigt gleichermaßen Mathematiker\*innen sowie Physiker\*innen nun schon seit über 100 Jahren. Und noch immer sind nicht alle Lösungen gefunden. Moderne Ansätze versprechen jedoch neuartige Lösungswege.



VON OLIVER SCHÖN

Im Jahre 1916 stellte der heute weltberühmte Physiker Albert Einstein (1879–1955) die Allgemeine Relativitätstheorie auf – die Theorie der Gravitation. Als Theorie einer der vier elementaren Kräfte ist die Allgemeine Relativitätstheorie damit in der Physik tief verwurzelt. Zur Überprüfung der Theorie sind über die Jahre viele Tests konzipiert worden – bisher konnten bei keiner dieser Analysen fundamentale Fehler festgestellt werden. Ganz im Gegenteil: Die Theorie selbst prognostizierte die Existenz von Gravitationswellen, welche 2015 zum ersten Mal direkt gemessen werden konnten. Allerdings ist die Theorie nicht ausschließlich in der Physik anzutreffen. Seit dem Wintersemester 2017/18 gibt es in Tübingen den Masterstudiengang Mathematische Physik, der sich hauptsächlich mit den zwei großen Gebieten der modernen theoretischen Physik beschäftigt: der Quantenmechanik und der Allgemeinen Relativitätstheorie. Diese lassen sich axiomatisch, also auf der Grundlage unumstrittener mathematischer Grundbedingungen, sogenannter Axi-

„Seit die Mathematiker über die Relativitätstheorie hergefallen sind, verstehe ich sie selbst nicht mehr.“  
(Albert Einstein)

ome, definieren. Daher haben die beiden Themen einen starken mathematischen Charakter, anders als zum Beispiel Themen aus der Experimentalphysik. Die Mathematische Relativitätstheorie beschäftigt sich mit den Implikationen der **Einstein'schen Feldgleichungen** (in der Literatur auch unter Einstein-Hilbert Gleichung oder als Einsteins Gleichung bekannt). Im Rahmen meiner Masterarbeit befasste ich mich mit ebendiesen Feldgleichungen und versuche hier einen Lösungsweg zu beschreiben. Was das heißt und welche Problematiken damit verbunden sind, möchte ich nun zeigen.

### WORUM GEHT'S DER RELATIVITÄTSTHEORIE?

Die Kernidee der Allgemeinen Relativitätstheorie ist es, Raum und Zeit nicht als separate Konzepte zu betrachten. Das bedeutet, dass der Raum in dem man sich befindet, Einfluss auf das Verhalten der Zeit hat und andersherum. Dieses wechselseitige Verhältnis fasste Einstein unter dem Begriff Raumzeit zusammen. Er erkannte, dass die Krümmung

dieser Raumzeit die Bewegung von großen Objekten vorgibt und erklärte damit beispielsweise, wie unterschiedlich schnell Uhren an verschiedenen Orten ticken (aufgrund der Abhängigkeit von Raum und Zeit).

Um fundamentalen Konzepten der Physik, wie zum Beispiel dem der Energieerhaltung, nicht zu widersprechen, muss die Raumzeit gewisse Regeln erfüllen. Dem tragen die Einstein'schen Feldgleichungen Rechnung, welche in die folgende Form gebracht werden können:

$$\text{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Das bemerkenswerteste Symbol ist hier wohl das Gleichheitszeichen. Die linke Seite der Gleichung besteht aus rein geometrischen Objekten und Krümmungsgrößen, zum Beispiel der Ricci-Krümmung  $\text{Ric}_{\mu\nu}$  und der Skalarkrümmung  $R$ . Diese wurden in der Mathematik bereits in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entwickelt, federführend von Bernhard Riemann (1826–1866). Auf der rechten Seite sind alle physikalischen Größen, wie zum Beispiel die Lichtgeschwindigkeit  $c$ , die Gravitationskonstante  $G$  und das

Abb. 1: Einige Formeln, die zum Lösen der Gleichung von Einstein dienen.

### Gravitative Zeitdilatation

Vielleicht erinnern sich manche an die Szene im Film Interstellar, in der es heißt, „eine Stunde auf dem Planeten [entspricht] sieben Jahren außerhalb des unmittelbaren Einflussbereichs der Gravitation“. Dieser Effekt nennt sich gravitative Zeitdilatation. Damit ist gemeint, dass eine große Masse im Raum (im Film ein schwarzes Loch) ein starkes Gravitationsfeld erzeugt, welches Prozesse, wie das Vergehen von Zeit, verlangsamt.

Materiemodell  $T_{\mu\nu}$  vorhanden. Der berühmte Physiker John Archibald Wheeler (1911–2008) beschrieb die Implikationen dieser Gleichung wohl am besten mit den Worten:

„Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve.“

Frei ins Deutsche übersetzt: Die Raumzeit bestimmt die Bewegung von Materie; Materie bestimmt die Krümmung der Raumzeit.

### WIE LÖST MAN EINSTEINS FELDGLEICHUNG?

Die oben beschriebene Feldgleichung kann auf verschiedene Arten gelöst werden. Zunächst muss man entscheiden, worin man lösen möchte. Damit meint man, welches physikalische Modell man auf der rechten Seite der Gleichung vorschreibt. Das könnte zum Beispiel einfach Vakuum sein, aber auch komplizierte Gebilde wie Flüssigkeiten oder elektromagnetische Felder. Als Lösung für die Gleichung unter Annahme eines speziellen Modells ergibt sich dann eine vierdimensionale Menge, welche später die Raumzeit darstellen soll. Zusätzlich ergeben sich zehn unabhängige Komponenten. Diese Komponenten sind im Prinzip Funktionen, welche zusammengesetzt die Gleichung erfüllen. Die zehn Komponenten beschreiben die gesamte Struktur der Raumzeit. Darunter befinden sich u.a. unser Verständnis von Zeit, Länge, Volumen, Zukunft und Vergangenheit, schwarzen Löchern und vieles mehr.

Für Einsteins Gleichung wurden verschiedene Lösungen gefunden. Die wohl berühmteste Lösung ist die Schwarzschild-Lösung, die ein zentrales, statisches, rundes Objekt in einem sonst leeren Universum modelliert. Sie war beispielsweise ein Hilfsmittel, um die Bewegung des Merkurs zu erklären, welche sich nicht exakt nach der Newton'schen Gravitationstheorie verhält. Simple Raumzeiten wie die Schwarzschild-Lösung erzählen allerdings nicht die gesamte Geschichte der Einstein'schen Feldgleichungen. Diese sind kompliziert und mit gewissen Freiheiten formuliert. Das bedeutet:

1. Je komplexer die physikalischen Verhältnisse sind, die modelliert werden sollen, desto schwieriger werden die Feldgleichungen. Die uns heute bekannten Methoden reichen nicht aus, um diese Gleichungen bis ins letzte Detail zu verstehen, geschweige denn sie auf eine allgemein anerkannte Weise zu lösen.
2. Die Gleichung besitzt mehrere Lösungen. Darunter sind viele, welche man als unphysikalisch bezeichnen würde, da sie Verletzungen physikalischer Grundsätze nicht widersprechen. Zum Beispiel verbietet Einsteins Gleichung nicht per se das Zeitreisen oder Verletzungen der Energieerhaltung.

Man kann es sich nun als Mathematiker\*in oder Physiker\*in zur Aufgabe machen, alle Lösungen der Feldgleichungen zu finden und nach ihrer

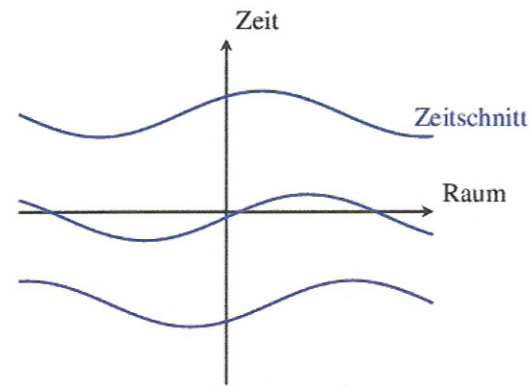


Abb. 2: Eine zweidimensionale, systematische Darstellung einer vierdimensionalen Raumzeit. Diese Raumzeit lässt sich in unendlich viele Zeitschnitte blättern. Alle Ereignisse auf einem solchen Zeitschnitt geschehen, auf gewisse Weise, gleichzeitig.

Sinnhaftigkeit und Verwertbarkeit zu kategorisieren. Dafür müssen neue Methoden und Theorien entwickelt werden. Das Ziel ist es, Lösungen zu finden, welche verschiedenste Situationen in unserem Universum modellieren.

Das Problem hierbei: Die Einstein'schen Feldgleichungen haben, wie wir sie in der obigen Form sehen, wenig mathematisch verwertbare Charakteristika. Das bedeutet, herkömmliche mathematische Lösungswege können zur Lösung der Feldgleichungen nicht angewendet werden.

### RAUMZEIT DOCH ALS RAUM UND ZEIT?

Motiviert durch die beschriebene Problematik haben verschiedene Mathematiker\*innen und Physiker\*innen Mitte des letzten Jahrhunderts, maßgeblich beeinflusst durch die französische

#### Zeit als vierte Dimension

Neben den gängigen drei Raumdimensionen, durch welche wir uns mit kleinen Einschränkungen frei bewegen können, wird die Zeit als vierte Dimension gesehen. Als Beispiel: Will man sich in New York in einem Wolkenkratzer zum Essen verabreden, könnte die Einladung lauten „Wir treffen uns an der 20. Ecke 34 im 40. Stock um 12 Uhr“. Also sind vier Informationen nötig: Zwei definieren die Kreuzung und eine das Stockwerk, daher drei Raumdimensionen. Die Uhrzeit ist hier die vierte Dimension.

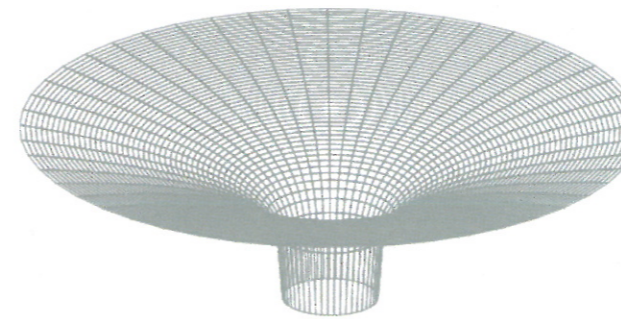


Abb. 3: Ein symmetrischer Zeitschnitt mit zentraler Masse (genannt Flamm'sches Paraboloid). Diese gezeigte Fläche ist zweidimensional, das heißt, die dritte Raumdimension und die Zeitdimension werden hier nicht dargestellt. Das erlaubt diese systematische Darstellung. Dieses Bild stellt also lediglich die Krümmung im Raum dar, nicht die Krümmung in der Zeit.

Mathematikerin Yvonne Choquet-Bruhat (\*1923), eine Möglichkeit gefunden, die Feldgleichungen in eine mathematisch verwertbare Form umzuschreiben. Dabei erlaubt die vierdimensionale Natur der Einsteingleichung ihre Zerlegung in Bedingungen für die Zeit und Bedingungen für den Raum. Hinter diesem Formalismus steckt folgendes Konzept: Kann man den Raum zu einem festen Zeitpunkt hinreichend gut beschreiben, so kann man diesen Raum in der Zeit entwickeln und weiß, wie der Raum zu einem späteren Zeitpunkt aussieht. Dadurch lässt sich eine komplette Raumzeit finden. Das Problem, eine Lösung der vierdimensionalen Feldgleichung zu finden, verlagert sich also dahin, einen Raum zu bestimmen, welcher einen Teil der Einsteingleichung – genannt Einstein constraint equation – erfüllt. Unter einer Einstein constraint equation (zu Deutsch: Einsteinsche beschränkte Gleichung) versteht man eine Gleichung, welche die Lösungen der Feldgleichung unter der Bedingung eines festgelegten Startparameters, also eines festgelegten Raums zum Startzeitpunkt, beschreibt. Man bezeichnet diesen Raum als Zeitschnitt.

Allerdings ist es nicht genug, den Raum alleine genau zu beschreiben, um die Entwicklung in der Zeit vorherzusagen. Man kann sich das stark vereinfacht folgendermaßen vorstellen: Angenommen, alle Positionsdaten unseres Sonnensystems sind zu einem festen Zeitpunkt bekannt. Um Vorhersagen zur zukünftigen Bewegung der

Planeten treffen zu können, muss man zusätzlich Parameter wie die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung der Planeten kennen.

Man nennt nun das Set – bestehend aus einem Raum zusammen mit den zusätzlichen Bewegungsinformationen – Anfangsdaten für die Einsteingleichungen. Meine Forschung beschäftigt sich damit, solche Anfangsdaten zu konstruieren. Anfangsdaten sind also Informationen über den Raum, welche den Vorgaben der oben erwähnten Einstein constraint equations entsprechen müssen. Es ist nicht immer klar, wie man physikalische Konzepte, wie Masse und Energie, auf diese Anfangsdaten überträgt und welche Situationen auf welche Weise beschrieben werden müssen. Die constraint equations selbst können mathematisch auf verschiedene Arten dargestellt werden. Ich erforsche dabei, welche Lösungen der kompletten Einsteingleichung durch eine bestimmte Darstellung der constraint equations erwartet werden können, und für welche Art von Lösungen die Methode fehlschlägt.

### FAZIT

Die Feldgleichungen Einsteins sind 100 Jahre nach der Veröffentlichung noch immer nicht völlig verstanden und erforscht. Um die Natur unseres Universums näher beschreiben zu können, müssen neue Wege zum Lösen dieser Gleichungen entwickelt werden. Zukünftig erhoffen wir uns, einen Großteil aller möglichen Lösungen zu finden und klassifizieren zu können. Dadurch lassen sich dann wieder neue Situationen modellieren. Mit meiner Masterarbeit hoffe ich, hierzu einen Beitrag leisten zu können.

### LITERATUR

Carroll, Sean M. (2003): Spacetime and geometry: An introduction to general relativity. San Francisco, USA: Pearson.

Oliver Schön schreibt gerade seine Masterarbeit „The hyperbolic constraint equations in a cosmological setting“ im Masterstudiengang Mathematical Physics an der Universität Tübingen. Fasziniert von der Allgemeinen Relativitätstheorie hat er sich schon während seines Bachelorstudiums der Mathematik einen Schwerpunkt in der Physik gewählt. Im Anschluss an seinen Master strebt er eine Promotion in Theoretischer Astrophysik an.

