Mitt. Math. Ges. Hamburg **38** (2018), 117–137

Die Grundlagen mathematischer Beweise. Philosophisch-logische Überlegungen

Peter Schroeder-Heister

1 Mathematische Logik und Beweistheorie

Traditionell wird die mathematische Logik aufgeteilt in vier Teilgebiete: Modelltheorie, Mengenlehre, Rekursionstheorie und Beweistheorie, so im maßgeblichen *Handbook of Mathematical Logic* (Barwise, 1977) oder bei den großen Konferenzen des Gebiets, etwa dem jährlich stattfindenden *European Summer Meeting* der *Association for Symbolic Logic*. Dabei wird die Beweistheorie häufig mit konstruktiver Mathematik assoziiert: im genannten *Handbook* lautet der entsprechende Abschnitt: „Proof Theory and Constructive Mathematics“. Letztere Assoziation hat nicht nur damit zu tun, dass sich die Beweistheorie primär mit der Formalisierung von Beweisen in der konstruktiven Mathematik beschäftigt, sondern vor allem damit, dass sie in ihren eigenen mathematischen Methoden oft versucht, konstruktiv vorzugehen. „Konstruktiv“ bedeutet hier insbesondere die Einschränkung des Verfahrens indirekter Beweise. So verlangt man häufig, dass Existenzaussagen direkt durch Angabe einer erfüllenden Instanz nachgewiesen werden und Disjunktionsbehauptungen $A_1 \vee A_2$ durch Nachweis der Gültigkeit eines der Disjunkte A_i. Das *tertium non datur* $A \vee \neg A$ als universelles Prinzip wird damit problematisch, da man nicht mehr davon ausgehen kann, dass für jede Behauptung A entweder ein Beweis von A oder von $\neg A$ existiert (d.h. konstruktiv: gefunden werden kann). Ein entsprechendes Problem stellt die universelle Gültigkeit des *duplex negatio affirmat* $\neg\neg A \to A$ dar. Der Zusammenhang zwischen Beweistheorie und konstruktiven Methoden hat dazu geführt, dass die Beweistheorie inzwischen ein sehr viel dominanteres Gebiet der mathematischen Logik geworden ist als sie es zum Zeitpunkt des Erscheinens des *Handbook* noch war. Das hat damit zu tun, dass sie inzwischen in breitem Maße in der Informatik angewendet wird. Die Informatik hat naturgemäß ein enges Verhältnis zu konstruktiven Methoden, ist sie doch die Wissenschaft vom Rechnen und seiner Realisierung auf Rechnern.

2 Warum Beweistheorie in der Mathematik?

In der Mathematik führt man Beweise. Wie kommt es nun aber zum Interesse an einer *Theorie der Beweise*? Weshalb steigt man hier auf eine Meta-Ebene und macht Beweise selbst zu Gegenständen? Wenn es ausschließlich um philosophische Erörterungen ginge, dann wäre dies zumindest verständlich: Philosophen interessieren sich für alles — warum nicht auch für Beweise, zumal Beweise vom philosophischen Standpunkt aus kein x-beliebiger Gegenstand sind, sondern einen signifikanten erkenntnistheoretischen Status haben: Durch mathematische Beweise erkennen und vermitteln wir, dass Behauptungen wahr sind. Beweise sind nichts anderes als deduktive Argumente für Behauptungen. Eine philosophische Beweistheorie ist ein Zweig der Argumentationstheorie.

Die Beweistheorie hat das Licht der Welt jedoch als *mathematische* Theorie erblickt, nicht als deduktionsbezogener Teil einer philosophischen Argumentations- und Erkenntnistheorie. Um das zu verstehen, muss man auf die Grundlagenkrise der Mathematik zu Beginn des 20. Jahrhunderts zurückgehen und zu David Hilberts Versuch, diese mit Hilfe der „Beweistheorie" (das war der von ihm vorgeschlagene Terminus) zu überwinden.

2.1 Die Grundlagenkrise

Die Grundlagenkrise Anfang des 20. Jahrhunderts wurde durch das Auftreten von Widersprüchen bei der Verwendung vermeintlich plausibler Begriffsbildungen hervorgerufen. Die bekannteste ist die Russellsche Antinomie der Menge aller Mengen, die nicht Element von sich selbst sind. Ist diese Menge – sie sei R genannt – ein Element von sich selbst, dann gehört sie nach Definition der Menge R nicht zu R. Ist sie jedoch kein Element von sich selbst, dann gehört sie nach Definition der Menge R zu R. Das heißt, dass gilt:

$$R \in R \text{ genau dann, wenn } R \notin R.$$

Aus dieser Äquivalenz ergibt sich mit sehr elementaren logischen Mitteln sowohl $R \in R$ als auch $R \notin R$, d.h. ein Widerspruch. Ernst Zermelo hatte diese Antinomie schon vor Bertrand Russell entdeckt, allerdings ebenso wenig wie Hilbert und die anderen Göttinger Mathematiker die Signifikanz dieses Widerspruchs gesehen und sie vielmehr als Randphänomen verstanden (siehe Thiel, 1996). Erst Russell war es, der ihre Sprengkraft erkannte. Gottlob Frege, der in seinen *Grundgesetzen der Arithmetik* (1893/1903) eine Begründung der Mathematik auf logischer Grundlage vorgelegt hatte, sah sofort, dass die Russellsche Antinomie explosive Kraft hatte und schrieb im Nachwort seiner *Grundgesetze der Arithmetik*:

> Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als dass ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird.
>
> In diese Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn Bertrand Russell versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte. Es handelt sich um mein Grundgesetz (V). [...]
>
> *Solatium miseris, socios habuisse malorum.* Dieser Trost, wenn es einer ist, steht auch mir zur Seite; denn Alle, die von Begriffsumfängen,

> Klassen, Mengen [Fußnote: Auch die Systeme der Herrn R. Dedekind gehören hierher.] in ihren Beweisen Gebrauch gemacht haben, sind in derselben Lage. Es handelt sich hierbei nicht um meine Begründungsweise im Besonderen, sondern um die Möglichkeit einer logischen Begründung der Arithmetik überhaupt. (Frege, 1893/1903, Bd. II (1903), S. 253)

Frege sah auch sofort, dass grundlegende Änderungen am logischen und mathematischen Begriffsapparat notwendig seien, um dem Antinomie-Problem zu entkommen. Welche Änderungen man hier vornehmen sollte, ist keinesfalls offensichtlich. Hier gehen die Meinungen bis heute auseinander. Daher ist die Bezeichnung „Grundlagenkrise“ für das, was sich im Zusammenhang und im Gefolge der Antinomien Anfang des 20. Jahrhunderts abspielte, keinesfalls verfehlt. Auch wenn Hilbert nicht der philosophisch-logischen Begründung der Mathematik im Sinne Freges (dem „Logizismus“) nahestand. sah er die Notwendigkeit eines neuartigen Grundlagenprogramms für die Mathematik. Die fundamentale Grundidee seines Programms war, Beweise als syntaktische Gegenstände zum Gegenstand logischer und mathematischer Überlegungen zu machen.

2.2 Beweise als Gegenstände

Schon bei Frege findet sich ein sehr präziser Beweisbegriff. In seinem logischen System gibt Frege erstmals genaue Axiome und Regeln an und hat eine klaren Vorstellung davon, wie formales Deduzieren vonstatten geht. Um die Ableitungen in seiner *Begriffsschrift* (Frege, 1879) oder in seinen *Grundgesetzen der Arithmetik* (Frege, 1893/1903) vom heutigen Standpunkt aus zu verstehen, wird man allenfalls von gewissen Eigenarten der Notation, etwa ihrem zweidimensionalen Charakter, abstrahieren. Davon abgesehen kann man die Deduktionen in diesen Texten vom heutigen Standpunkt aus als syntaktisch hinreichend spezifizierte Beweise in der Logik erster oder höherer Stufe ansehen, die modernen Ansprüchen voll genügen. Anders als heute werden allerdings die Axiome, die Frege in seinen Deduktionen annimmt, als einsichtige Prinzipien verstanden — ganz entsprechend der Euklidischen oder Aristotelischen Auffassung von Axiomen. Insofern beginnen Ableitungen bei Frege bei den Axiomen als wahren Aussagen und schreiten zu wahren Aussagen fort. Eine Notwendigkeit, Beweise einschließlich ihrer Axiome und Beweisregeln zum formalen Gegenstand zu machen, bestand für Frege nicht.

Die Russellsche Antinomie zeigte jedoch, wie sehr man sich täuschen kann auch bei vermeintlich einsichtigen Prinzipien. In diesem Zusammenhang diskutiert dann Frege auch die Wahrheit seiner Axiome und die Grenzen von deren Plausibilität. Schon im Vorwort zum ersten Band der *Grundgesetze* hatte Frege die Stelle vorhergesehen, an der sich Probleme ergeben könnten, und an der sie sich dann zehn Jahre später ergeben haben:

> Ich habe Alles zusammengestellt, was die Beurtheilung erleichtern kann, ob die Schlussketten bündig und die Widerlager fest sind. Wenn etwa jemand etwas fehlerhaft finden sollte, muss er genau angeben können, wo der Fehler seiner Meinung nach steckt: in den Grundgesetzen, in den Definitionen, in den Regeln oder ihrer Anwendung an einer bestimmten Stelle. Wenn man Alles in Ordnung findet, so kennt man damit die Grundlagen genau, auf denen jeder einzelne Lehrsatz beruht. Ein Streit kann hierbei, soviel ich sehe, nur um mein Grundgesetz der Werthverläufe (V) entbrennen, das von den Logikern vielleicht noch nicht eigens ausgesprochen ist, obwohl man danach denkt, z.B. wenn man von Begriffsumfängen redet. Ich halte es für rein logisch. Jedenfalls ist hiermit die Stelle bezeichnet, wo die Entscheidung fallen muss. (Frege, 1893/1903, Bd. I (1893), S. VII)

Im Nachwort zum zweiten Band der *Grundgesetze* (2003) versucht Frege sogar, das Grundgesetz V in geeigneter Weise einzuschränken, ein Reparaturversuch, der erst 30 Jahre später von Willard Van Orman Quine als unzulänglich nachgewiesen wurde (Quine, 1955). Dies ist in gewisser Weise ein beweistheoretisches Vorgehen: Wir untersuchen Axiome auf ihre Konsequenzen hin und modifizieren sie in geeigneter Weise, wenn diese Konsequenzen problematisch sind. Die Auffassung von Axiomen als einsichtigen wahren Aussagen ist damit allerdings in Frage gestellt.

Die Beweistheorie im Sinne Hilberts — man vergleiche vor allem dessen grundlegenden Aufsatz „Neubegründung der Mathematik“ (Hilbert, 1922) — geht sehr viel weiter. Hier wird der gesamte Deduktionsapparat einschließlich Axiomen und Schlussregeln als eine formale Konstruktion aufgefasst und daraufhin untersucht, ob er zu Widersprüchen führen kann. Es geht also nicht mehr um die Gültigkeit oder Ungültigkeit einzelner Axiome, sondern um den Deduktionsapparat als Ganzen. Hilberts Versuch der Auflösung der Grundlagenkrise bestand darin, mathematische Beweismethoden insgesamt zum Gegenstand zu machen und auf ihre Konsistenz hin zu überprüfen, wobei diese Methoden bei dieser Vergegenständlichung selbst wieder mathematische Entitäten werden, die mit mathematischen Methoden untersucht werden können.

Damit es nicht zum Zirkel wird, mathematische Methoden mit mathematischen Methoden zu untersuchen und so zu rechtfertigen, muss man die Beweisverfahren, die Gegenstand der Untersuchung sind, unterscheiden von den Beweisverfahren, in denen sich diese Untersuchung vollzieht. Hilbert unterscheidet entsprechend Mathematik von „Metamathematik“. Metamathematische Resultate sollen die Beweismethoden der Mathematik rechtfertigen, indem sie diese als widerspruchsfrei nachweisen. Letzteres kann nur dann gelingen, wenn die Metamathematik selbst nicht derselben Rechtfertigung bedarf.

Hier bestand Hilberts Lösung darin, die Metamathematik auf Methoden zu beschränken, die nicht, wie in der mengentheoretischen Mathematik, potentiell zu Widersprüchen führen können. Unproblematisch sind hier *finite* Methoden, d.h. Verfahren, die nicht über die elementare Manipulation von Symbolen und damit zusammenhängende elementare Induktionsverfahren hinausgehen. Das Programm bestand somit darin, in einer Metamathematik, die finite Hilfsmittel benutzt, sich die Schlussweisen der ‚eigentlichen' Mathematik mit ihren nichtfiniten Methoden zum Gegenstand zu machen und nachzuweisen, dass bestimmte nichtfinite Verfahren insofern unkritisch sind, als sie keine Widersprüche wie die Russellsche Antinomie produzieren. Idealerweise würde die Metamathematik mit ihren finiten Methoden also z.B. die Widerspruchsfreiheit eines mächtigen nichtfiniten mengentheoretischen Systems, in dem man etwa die Analysis formalisieren kann, demonstrieren.

Bekanntlich ist dieses ‚Hilbertprogramm' schon 1931 am Gödelschen Unvollständigkeitssatz gescheitert (Gödel, 1931). Gödel konnte am Beispiel eines Formalismus der Principia Mathematica zeigen, dass die in einem solchen Formalismus kodifizierten Beweisprinzipien alleine nicht ausreichen, um seine Widerspruchsfreiheit zu zeigen, ein Resultat, das auf die Peano-Arithmatik und sogar gewisse Teilsysteme der Peano-Arithmetik übertragbar ist. Wenn es einen Widerspruchsfreiheitsbeweis der Peano-Arithmetik gibt, so muss er Methoden benutzen, die nicht in der Peano-Arithmatik selbst formalisierbar sind. Dieses Resultat zeigte, dass die Idee einer Unterscheidung zwischen Mathematik einerseits und einer die Mathematik rechtfertigenden, aber mit schwächeren Methoden ausgestatteten Metamathematik, zum Scheitern verurteilt war.

Das Scheitern des Hilbertprogramms bedeutete nicht, dass die Mathematik in ihrer Grundlagenkrise gefangen geblieben ist. Es bedeutet nur, dass die von Hilbert intendierte reduktionistische Grundlegung der Mathematik nicht gelungen ist. Die mengentheoretischen und typentheoretischen Systeme, in denen sich moderne Mathematik widerspruchsfrei betreiben lässt, sind begrifflich differenzierter als Ansätze, die auf ‚naiver' Komprehension beruhen und haben sich unbeschadet weiterer Grundlagendiskussionen bewährt. Die Zurückführung auf feste finite Grundlagen haben eher einer Untersuchung der relativen Stärke von mathematischen Formalismen Platz gemacht, d.h. dem Problem der Rückführung von Systemen auf andere, die nicht notwendigerweise in einem erkenntnistheoretischen Sinn elementarer sind. So liegen z.B. Widerspruchsfreiheitsbeweise für die Peano-Arithmetik und für Teilsysteme der Analysis vor, die geeignete transfinite Induktionsprinzipien verwenden. Solche Beweise liefern keine ‚Letztbegründung' für ein System, sagen jedoch etwas über die Ausdrucksstärke von Systemen relativ zueinander aus und erlauben es zum Beispiel, solche Teilsysteme der Analysis nach der Stärke der in ihnen vorhandenen Induktionsprinzipien zu klassifizieren. In diesem Sinne hat sich die Beweistheorie auch ohne das Hilbertprogramm mit profunden Resultaten weiterentwickelt, die teilweise für konstruktive Mathematik und Informatik von unmittelbarer Relevanz sind.

2.3 ‚Allgemeine' Beweistheorie und ‚beweistheoretische' Semantik

Parallel zu dieser Entwicklung und teilweise in Interaktion mit ihr hat sich die ‚allgemeine Beweistheorie' entwickelt. Diese interessiert sich für Beweise als fundamentale Entitäten der Mathematik und anderer Wissenschaften und Kontexte unabhängig davon, zu welchem Zweck man die Beweise verwendet, wie stark Beweissysteme sind, usw. Das Problem der Widerspruchsfreiheit, das die Hilbertsche Beweistheorie prägte, steht also nicht im Vordergrund. Natürlich ist es auch für Beweise *an sich* wichtig, welche Stärke sie haben und ob sie möglicherweise Widersprüche produzieren. Aber das Problem der Stärke formaler Systeme und ihrer Widerspruchsfreiheit ist nicht die leitendende Fragestellung für die allgemeine Beweistheorie, der sich ihre Methoden unterordnen. Man könnte sagen, dass es der allgemeinen Beweistheorie nicht in erster Linie um das Resultat von Beweisen geht, d.h. um die Behauptungen, die von Beweise bewiesen werden und bewiesen werden können, sondern um die Form von Beweisen *als solchen*, d.h. als Entitäten, die Begründungen für Behauptungen repräsentieren. Philosophisch gesprochen geht es in der allgemeinen Beweistheorie um den ‚intensionalen' Aspekt von Beweisen, hingegen in der an der logischen Stärke von Systemen interessierten Beweistheorie — manchmal auch als *reduktive* Beweistheorie bezeichnet — um deren ‚extensionalen' Aspekt.

Die allgemeine Beweistheorie wurde begründet durch Gerhard Gentzens „Untersuchungen über das logische Schließen" (Gentzen, 1934/35). In dieser Arbeit entwickelt und begründet Gentzen den *Kalkül des natürlichen Schließens* als einen Logikkalkül, der dem wirklichen Schließen, d.h. insbesondere dem Schließen in der mathematischen Praxis besonders nahe kommt. Gleichzeitig entwickelt Gentzen den *Sequenzenkalkül*, der für bestimmte beweistheoretische Untersuchungen besonders geeignet ist. Gentzen selbst muss sowohl als Vertreter der allgemeinen als auch der reduktiven Beweistheorie angesehen werden. Er hat mit der Vorlage von Widerspruchsfreiheitsbeweisen für die Arithmetik fundamentale Beiträge zur Weiterentwicklung des Hilbertschen beweistheoretischen Programms und damit zur reduktiven Beweistheorie geliefert. Die von ihm entwickelten Kalküle und Methoden zur Gewinnung von Theorem über Beweise haben Signifikanz für beide Programme. Dies gilt insbesondere für seine Methode der Schnittelimination für Sequenzenkalküle, die die Zulässigkeit bestimmter Transitivitätseigenschaften beinhaltet. Diese Methode ist sowohl fundamental für die reduktive Beweistheorie als auch für das Studium der Struktur von Beweisen, d.h. die allgemeine Beweistheorie.

Den Terminus „allgemeine Beweistheorie" hat Dag Prawitz 1971 eingeführt (Prawitz, 1971, 1973), nachdem dieser schon 1965 in seiner Monographie *Natural Deduction* die erste systematische Untersuchung von Gentzen's Kalkül des natürlichen Schließens vorgelegt hatte (Prawitz, 1965). Zur gleichen Zeit und mit ähnlicher Zielrichtung hatte Georg Kreisel (1971) eine Modifikation des beweistheoretischen Programms der Hilberttradition hin zu einem Studium von Beweisen als zentralen Untersuchungsgegenständen und nicht nur als Werkzeugen zum Studium von Ableitbarkeit und Konsequenz vorgeschlagen. Philosophischerseits war Michael Dummett (1975) dabei, sein Programm einer verifikationistischen Bedeutungstheorie zu entwickeln, was in der Folge in enger Auseinandersetzung mit Prawitz und den Prawitzschen Konzeptionen einer allgemeinen Beweistheorie geschah. Ebenfalls ungefähr gleichzeitig entstand Per Martin-Löf's Typentheorie (Martin-Löf, 1984; Sommaruga, 2000), die auf eng verwandten logischen Grundlagen aufbaute und auf eine Neubegründung der Mathematik als Alternative zur Mengentheorie und zu den typentheoretischen Ansätzen Freges und Russells zielte.

Für diese Ansätze ist in neuerer Zeit vom Autor der Terminus „beweistheoretische Semantik" vorgeschlagen worden (Schroeder-Heister, 2012/2018). Der Grund für die Wahl dieses Terminus bestand darin, einerseits die grundsätzliche Verwandtschaft mit der Tradition der philosophischen Semantik im Sinne von Rudolf Carnap und Alfred Tarski (vgl. Stegmüller, 1968) zu betonen, andererseits jedoch den Terminus „Semantik" nicht der von diesen Semantikern begründeten Richtung, die man als „denotationelle Semantik" bezeichen kann, zu überlassen. Philosophisch gehört die allgemeine Beweistheorie und die beweistheoretische Semantik zur *Gebrauchstheorie der Bedeutung*, d.h. im weitesten Sinne zu der in der Sprachphilosophie vor allem von Ludwig Wittgenstein propagierten Theorie, wonach sich die Bedeutung von Worten und anderen Sprachbestandteilen im *Gebrauch*, den man von diesen macht, niederschlägt (Wittgenstein, 1958).

Man kann sagen, dass allgemeine Beweistheorie eine Beweistheorie aus philosophischem Interesse ist, d.h. aus Interesse an Beweisen *an sich*. Das heißt nicht, dass nicht auch mathematische Methoden ins Spiel kommen, wenn man dieses Interesse verfolgt. Im Gegenteil: Die Anwendung mathematischer Methoden auf Beweise, die geeignet syntaktisch kodifiziert sind, liefert grundlegende philosophische Einsichten. Hierzu gehören insbesondere die Einsichten über die Identität von Beweisen. Damit soll nicht gesagt sein, dass das Thema der Beweisidentität das zentrale Thema der allgemeinen Beweistheorie ist, nicht einmal, dass sehr weit diskutiert wird. Es ist aber ein Thema, das in der allgemeinen Beweistheorie zentral sein sollte und zudem eines, bei dem man vom philosophischen Standpunkt aus viel über die Beweise lernen kann. Daher soll dieser Gesichtspunkt das Thema des folgenden systematischen Teils dieser Abhandlung sein.

3 Die Identität von Beweisen

Von dem Philosophen W.V.O. Quine stammt das dictum „no entity without identity". Dahinter steht die sprachphilosophische These, dass wir, wenn wir einen Gegenstand von einem anderen Gegenstand abgrenzen wollen, ein Identitätskriterium benötigen, das uns von Gegenständen a und b sagt, ob es sich um verschiedene Gegenstände handelt, oder ob es sich vielleicht nur um einen einzigen Gegenstand handelt, auf den wir einmal mit „a“ und einmal mit „b“ Bezug nehmen. Übertragen auf mathematische Beweise, die ja mit sprachlichen Mitteln beschriebene syntaktische Strukturen sind, heißt das, dass wir ein Kriterium benötigen, das uns von *syntaktisch verschiedenen* Beweisen $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ sagt, ob $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ *inhaltlich derselbe* Beweis sind oder nicht.

Ganz abgesehen von dem philosophischen Individuationsproblem, nach dem wir ohne Identitätskriterium gar nicht von einer abgrenzbaren Entität reden könnten, ist es mathematisch einfach interessant zu sehen, ob zwei Beweise, die prima facie verschieden aussehen, im wesentlichen ‚derselbe‘ Beweis sind. Mathematiker haben häufig eine sehr starke und häufig auch übereinstimmende Intuition darüber, ob zwei Beweise auf derselben Beweisidee beruhen.

Der Begriff der *Beweisidee* ist derzeit einer präzisen Behandlung noch nicht zugänglich. Wir beschränken uns hier auf ganz einfache Beweise, die mit logisch sehr elementaren Mitteln formuliert sind. Genauer gesagt, betrachten wir formale Beweise, die nur mit Mitteln der Konjunktion $\wedge$ formuliert sind, d.h. Beweise, in denen nur Aussagen vorkommen, die allenfalls konjunktiv verknüpft sind. Für diese Logik haben wir nur drei Beweisregeln, eine Einführungsregel und zwei Beseitigungsregeln. Die Einführungsregel

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\,\wedge I \tag{1}$$

ermöglicht es, aus Beweisen $\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A\end{matrix}$ von A und $\begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ B\end{matrix}$ von B einen Beweis

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}\,\wedge I$$

von $A \wedge B$ zu erzeugen. Der Ausdruck rechts neben dem Ableitungsstrich bezeichnet die angewendete Regel („I“ für engl. „introduction“). Die Beseitigungsregeln für die Konjunktion lauten

$$\frac{A \wedge B}{A}\,\wedge E_1 \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,\wedge E_2 \tag{2}$$

und ermöglichen uns, aus einem Beweis $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A\wedge B\end{matrix}$ von $A \wedge B$ Beweise

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A \wedge B\end{matrix}}{A}\,\wedge E_1 \qquad \frac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A \wedge B\end{matrix}}{B}\,\wedge E_2$$

von A und von B zurückzugewinnen. Wie wir unten sehen werden, ist es wichtig, die beiden $\wedge$-Beseitigungsregeln („E“ wie engl. „elimination“) terminologisch durch einen Index („1“ bzw. „2“) zu unterscheiden. Die Regel mit Index 1 greift die linke Komponente der Konjunktion heraus, die Regel mit Index 2 die rechte.

Mathematisch gesehen kann man die Einführungsregel für die Konjunktion als Paarbildung für Beweise und die Beseitigungsregeln als die Projektion eines Paars auf die linke bzw. rechte Komponente auffassen. Dieser sehr elementare Rahmen der Konjunktionslogik reicht schon aus, zentrale Probleme, Resultate und Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der Frage nach der Identität von Beweisen aufzuzeigen.

Offenbar gibt es zwei Extreme zur Beantwortung der Frage nach der Identität von Beweisen, die gleichermaßen inadäquat sind. Das eine Extrem bestünde darin, Beweise $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ als identisch anzusehen, wenn sie als syntaktische Objekte identisch sind. Dieses Kriterium entspricht offenbar nicht unserer Vorstellung von Identität von Beweisen, weil es zu eng ist. Alle syntaktisch verschiedenen Beweise einer Aussage müssten dann auch als ‚inhaltlich' verschieden angesehen werden. Die Identität von Beweisen wäre insofern trivialisiert, als sie auf die Identität der syntaktischen Gestalt zurückgeführt wäre. Das andere Extrem bestünde darin, Beweise $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ als identisch anzusehen, wenn sie Beweise derselben Behauptung A sind. Dieses Kriterium ist zu weit. Da danach alle syntaktisch verschiedenen Beweise einer beweisbaren Aussage A identifiziert werden könnten, hätte jede beweisbare Aussage A nur einen einzigen Beweis. Die Identät von Beweisen wäre hier in umgekehrter Richtung trivialisiert und auf die Beweis*barkeit* einer Aussage zurückgeführt. Tatsächlich interessiert es uns in vielen Bereichen nur, ob A beweisbar ist oder nicht — so z.B. in der reduktiven Beweistheorie, in der man sich etwa fragt, ob in einer Theorie ein Widerspruch ‚A und nicht-A' beweisbar ist. In der allgemeinen Beweistheorie hat man aber die Vorstellung, dass das Studium der Beweise über das Studium der Beweisbarkeit hinausgeht, und das heißt insbesondere, dass es (grundsätzlich, obzwar vielleicht nicht in jedem Einzelfall) mehr als einen Beweis einer Aussage geben kann.

Es geht also darum, eine Äquivalenzrelation auf dem Bereich syntaktisch spezifizierter Beweise zu finden, die unserer Vorstellung von Identität von Beweisen nahekommt, und die weder die *syntaktische Identität* ist, bei der jeder syntaktische Beweis zu einer einelementigen Äquivalenzklasse gehört, noch die universelle Identität ist, die alle syntaktischen Beweise (einer gegebenen Aussage) in einer einzigen Äquivalenzklasse zusammenfasst. Wenn $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ Beweise von A sind, wollen wir also eine *nichttriviale* Äquivalenzrelation $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ definieren, die unserer Vorstellung, dass $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ *denselben* Beweis von A darstellen, möglichst nahe kommt.

Um unsere Terminologie nochmals klarzustellen: Wenn wir von der Identität von Beweisen $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ reden und dies durch $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ mithilfe des Identitätszeichens ‚=' ausdrücken, dann ist damit immer die zu explizierende Äquivalenzrelation zwischen Beweisen, die wir „Identität von Beweisen" nennen, gemeint. Wenn wir die syntaktische Identität von Beweisen meinen, sagen wir das immer ausdrücklich, benutzen aber dafür niemals das Identitätszeichen. Wenn $\mathcal{D}$ ein Beweis von A ist, notieren wir das häufig in der Form $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}}{A}$. Der

Ausdruck $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A\end{array}$ bezeichnet dann dasselbe wie $\mathcal{D}$ — das darunterstehende A dient nur dazu, die bewiesene Aussage kenntlich zu machen, und bedeutet nicht etwa eine zusätzliche Erweiterung von $\mathcal{D}$.

3.1 Der Redundanzansatz

Eine Möglichkeit, die Identität zwischen Beweisen zu definieren, besteht darin, innerhalb von Beweisen bestimmte Redundanzen zu erkennen und Verfahren zu beschreiben, diese Redundanzen zu eliminieren. Ein Beweis $\mathcal{D}$ wäre dann als identisch mit einem Beweis $\mathcal{D}'$ anzusehen, wenn $\mathcal{D}'$ aus $\mathcal{D}$ durch Elimination solcher Redundanzen entsteht. Der prominente Fall solcher Redundanzen liegt dann vor, wenn in einem Beweis im Kalkül des natürlichen Schließens eine Aussage erst eingeführt und dann wieder beseitigt wird. Diese Situation kann man sich in Analogie zu algebraischen Operationen wie folgt klar machen.

In der Algebra haben wir es häufig mit Strukturen zu tun, in denen wir zu einer Operation eine Umkehroperation haben, wie etwa bei Gruppen. Nehmen wir z.B. die ganzen Zahlen. Wenn wir zu einer Zahl a die Zahl b erst hinzuaddieren und dann wieder abziehen, erhalten wir dasselbe a wieder zurück:

$$(a+b)-b=a$$

Auf der Ebene der Beweise im natürlichen Schließen liegt eine ähnliche Situation vor, insofern die Beseitigungsregeln die Umkehrungen der Einführungsregeln sind. Im hier betrachteten Konjunktionskalkül sind dies die Regeln (1) und (2).

Analog zum Beispiel von Addition und Subtraktion heben sich Einführung und Beseitigung auf. Betrachten wir nämlich die Einführung einer Konjunktion gefolgt von deren Beseitigung, indem wir von gegebenen Beweisen $\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\end{array}$ und $\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ B\end{array}$ für A und B ausgehen, diese per $\wedge$-Einführung zu einer Konjunktion verknüpfen und letztere per $\wedge$-Elimination wieder beseitigen:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\end{array}\quad\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ B\end{array}}{A\wedge B}\wedge I}{A}\wedge E_1 \tag{3}$$

Dann handelt es sich hier offensichtlich um eine Redundanz, da wir vor Anwendung der Einführungsregel die Aussage A schon bewiesen hatten, nämlich als deren linke Prämisse. Nach dem Redundanzkriterium werden wollen wir zwei Beweise, bei denen einer nur eine redundante Form des anderen ist, identifizieren. Wir postulieren also folgende Identität:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\end{array}\quad\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ B\end{array}}{A\wedge B}\wedge I}{A}\wedge E_1 \quad = \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\end{array} \tag{4}$$

Entsprechend postulieren wir folgende Identität, bei der wir die erste Projektion durch die zweite ersetzen:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ B\end{matrix}}{A \wedge B}\wedge I}{B}\wedge E_2 \quad = \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ B\end{matrix} \tag{5}$$

Diese postulierten Identitäten Bezeichnen wir auch als „Reduktionen“, da sie die Redundanz eines Beweises reduzieren. Da (4) und (5) normalerweise immer postuliert werden, nennen wir diese Identitäten auch *Standardreduktionen* für die Konjunktion (später kommt noch eine weitere Standardreduktion hinzu). Entsprechende Standardreduktionen kann man für alle anderen logischen Zeichen und auch für viele nichtlogische Operationen definieren.

Man kann diese Reduktionen auch algebraisch formulieren, wenn wir Beweisregeln als Funktionen I, E_1, E_2 auffassen, die gegebene Beweise in neue überführen. Die $\wedge$-Einführungsregel generiert dann aus zwei Beweisen $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ für A bzw. B einen neuen Beweis $I(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ für denen Konjunktion, während die Beseitigungsregeln aus einem Beweis $\mathcal{D}$ für eine Konjunktion $A \wedge B$ Beweise $E_1(\mathcal{D})$ und $E_2(\mathcal{D})$ für A bzw. B generieren. Die Standardreduktionen (4) und (5) gehen dann über in die Identitäten

$$E_1(I(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)) = \mathcal{D}_1 \qquad E_2(I(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)) = \mathcal{D}_2 \tag{6}$$

Die Standardreduktionen für die Konjunktion kann man verallgemeinern. Offensichtlich fallen sie unter die allgemeine Form

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ A\end{matrix}}{\dfrac{\vdots}{A}} \quad = \quad \begin{matrix}\mathcal{D} \\ A\end{matrix} \tag{7}$$

Im Fall (4) entspricht dem $\begin{matrix}\mathcal{D} \\ A\end{matrix}$ der Beweis $\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ A\end{matrix}$, und im Fall (5) entspricht der Aussage A die Aussage B und dem Beweis $\begin{matrix}\mathcal{D} \\ A\end{matrix}$ der Beweis $\begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ B\end{matrix}$. Alle anderen Bestandteile dieser Beweise werden in (7) durch die Pünktchen repräsentiert.

Die Idee hinter (7) ist folgende: Wir sehen davon ab, welche möglichen Beweisschritte zwischen dem oberen und dem unteren A verwendet sein mögen und fokussieren nur auf die Situation, in der wir von einem Beweis $\begin{matrix}\mathcal{D} \\ A\end{matrix}$ von A ausgehen und darauf aufbauend in nicht näher spezifizierter Weise wieder zu A gelangen. Da die Schritte, die ausgehend von $\begin{matrix}\mathcal{D} \\ A\end{matrix}$ erneut zu A führen, redundant sind, können wir den verlängerten Beweis von A mit dem Ausgangsbeweis von A identifizieren. Wir bezeichnen diese Idenfikation als die *allgemeine Redundanzreduktion*. Wie gerade erläutert, sind die Standardreduktionen (4) und (5)

Spezialfälle davon, in denen man eine *spezifische* Form der Redundanz, nämlich der Einführung gefolgt von einer Beseitigung betrachtet.

Die allgemeine Form der Redundanzbeseitigung hat jedoch leider unerwünschte Konsequenzen. Betrachten wir dazu folgende Situation, in der wir zwei beliebige gegebene Beweise $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ einer Aussage A benutzen, um daraus folgenden Beweis für A zu konstruieren:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ A\end{matrix}}{A \wedge A}}{A} \tag{8}$$

Hier spielt es keine Rolle, ob die $\wedge$-Elimination als linke oder rechte Projektion aufgefasst wird, da die allgemeine Redundanzreduktion unabhängig von den verwendeten Regeln ist. Bei (8) bestehen offenbar zwei Möglichkeiten zur Anwendung der allgemeinen Redundanzreduktion. Wenn wir das untere A mit dem linken oberen A identifizieren, so erhalten wir die Identität

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ A\end{matrix}}{A \wedge A}}{A} \quad = \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ A\end{matrix} \tag{9}$$

Wenn wir das untere A mit dem rechten oberen A identifizieren, so erhalten wir

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ A\end{matrix}}{A \wedge A}}{A} \quad = \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ A\end{matrix} \tag{10}$$

Aus den Identitäten (9) und (10) erhalten wir sofort

$$\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ A\end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ A\end{matrix}$$

Da $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ beliebige Beweise für A sind, erlaubt die allgemeine Redundanzreduktion also die Identifikation beliebiger Beweise derselben Aussage A.

Damit wird die Identität von Beweisen zur universalen Relation, d.h. zu einer der beiden Trivialisierungen der intendierten Äquivalenzrelation. Der Redundanzansatz für die Identität scheitert also. Man beachte, dass dieses Resultat nicht auf den Standardreduktionen beruht. Je nachdem, ob der Eliminationsschritt in (8) als linke oder rechte Projektion aufgefasst wird, ist (9) oder (10) eine Standardreduktion. Das spielt aber keine Rolle, da die Standardreduktionen Instanzen der allgemeinen Redundanzreduktion sind. Wenn wir also die Einführungs- und Beseitigungsregeln (1) und (2) für die Konjunktion annehmen, dann trivialisiert die allgemeine Redundanzreduktion die Identität von Beweisen (vgl. auch Schroeder-Heister & Tranchini, 2017).

Ein Beispiel

Die Betrachtung von Konjunkionen $A \wedge A$ mag spitzfindig erscheinen. Daher sei die Situation hier nochmals an einem Beispiel erläutert. Wir betrachten den Satz von Euklid, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, und bezeichnen ihn mit $P\infty$. Ferner betrachten wir zwei Beweise dieses Satzes, die auf völlig verschiedenen Konzeptionen aufbauen, z.B. den zahlentheoretischen Beweis von Euklid, hier bezeichnet mit $\mathcal{D}_{Euklid}$, und den Beweis von Euler, der elementare Analysis benutzt, hier bezeichnet mit $\mathcal{D}_{Euler}$ (vgl. Aigner & Ziegler, 2002). Wenn wir diese beiden Beweise wie folgt konjunktiv verknüpfen

$$\frac{\overset{\mathcal{D}_{Euklid}}{P\infty} \qquad \overset{\mathcal{D}_{Euler}}{P\infty}}{P\infty \wedge P\infty}$$

dann haben wir zwar eine Verdopplung der Behauptung $P\infty$, aber gleichzeitig behalten wir die Information sowohl aus dem Euklidischen als auch auch aus dem Eulerschein Beweis. Wir bilden sozusagen aus beiden Beweisen ein Paar von Beweisen, das beide umfasst. Es geht keine Beweisinformation verloren.

Aus diesem Paar können wir entweder durch rechte oder durch linke Projektion wieder den jeweiligen Beweis zurückgewinnen: Durch linke Projektion den Euklidischen Beweis:

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\mathcal{D}_{Euklid}}{P\infty} \qquad \overset{\mathcal{D}_{Euler}}{P\infty}}{P\infty \wedge P\infty}}{P\infty}\wedge E_1 \qquad = \qquad \overset{\mathcal{D}_{Euklid}}{P\infty}$$

und durch rechte Projektion den Eulerschen Beweis

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\mathcal{D}_{Euklid}}{P\infty} \qquad \overset{\mathcal{D}_{Euler}}{P\infty}}{P\infty \wedge P\infty}}{P\infty}\wedge E_2 \qquad = \qquad \overset{\mathcal{D}_{Euler}}{P\infty}$$

Die Art der Projektion (links oder rechts) sagt uns, welchen Beweis wir zurückerhalten. Wir können natürlich die Art der Projektion ignorieren und damit auf die Beweisinformation verzichten. Das heißt, dass wir den Beweis

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\mathcal{D}_{Euklid}}{P\infty} \qquad \overset{\mathcal{D}_{Euler}}{P\infty}}{P\infty \wedge P\infty}}{P\infty} \tag{11}$$

einfach als eine Struktur auffassen, bei der $P\infty$ am Ende steht, *wie auch immer* wir die darüberstehende Konjunktion gewonnen haben. Dagegen spricht nichts. Wir müssen uns nur damit abfinden, dass der so erreichte Beweis zwar dasselbe beweist, nämlich $P\infty$, dass aber weder die Beweisinformation aus $\mathcal{D}_{Euklid}$

noch die aus $\mathcal{D}_{Euler}$ weiter zur Verfügung steht, nachdem wir davon abgesehen haben, den letzten Schritt von (11) eindeutig entweder als linke oder als rechte Projektion aufzufassen. Wir haben aufgrund unseres Beweises weiterhin das Recht, $P\infty$ zu behaupten, da dies am Ende unseres Beweises steht. Wir können diesen Beweis aber weder mit $\mathcal{D}_{Euklid}$ noch mit $\mathcal{D}_{Euler}$ identifizieren, was noch möglich war, als der Übergang zu $P\infty$ als Projektion aufgefasst worden war. Im Fall (11) haben wir auf dem Umweg über $P\infty \wedge P\infty$ sozusagen unser ‚Gepäck' in Form von Beweisinformation ‚weggeworfen', auch wenn die Legitimität der Behauptung $P\infty$ davon nicht tangiert ist. Wir haben also durch den Umweg nicht einfach Redundanz im Sinne von zusätzlicher unnötiger Information geschaffen, sondern haben umgekehrt Information vernichtet, was uns hindert, den erreichten Beweis mit einem der Ursprungsbeweise zu identifizieren.

Aus der Sprachphilosophie bietet sich folgende Analogie an: So wie ein Beweis eine Weise ist, wie uns die Wahrheit einer Behauptung gegeben ist, ist eine Kennzeichnung eine Weise, wie uns ein Gegenstand gegeben ist. Z.B. ist uns nach dem berühmten Beispiel von Frege (1892) die Venus einmal als Abendstern und einmal als Morgenstern gegeben. Beide Kennzeichnungen der Venus kann ich zu einem Paar zusammenfassen, bestehend aus der Venus, gegeben als Abendstern, und der Venus, gegeben als Morgenstern. Und aus diesem Paar kann ich die jeweilige Charakterisierung: Venus gegeben als Morgenstern bzw. Venus gegeben als Abendstern wieder zurückgewinnen. Ich kann aber auch diese Information wegwerfen und mich einfach auf die Venus als Objekt beziehen, durch welche Kennzeichnung auch immer ich dieses Objekt kennengelernt habe. Das macht den Bezug auf die Venus nicht erkenntnistheoretisch minderwertig, da der Bezug auf die Venus ja hergestellt ist. Trotzdem ist gewisse Information verloren gegangen. Die Tatsache, dass ich von der Weise des Gegebenseins der Venus *abgesehen* habe, erlaubt es mir nicht, diese Weisen zu *identifizieren*, d.h. die Eigenschaften „*morgens als hellster Stern sichtbar*" und „*abends als hellster Stern sichtbar*" als identisch anzusehen.

3.2 Harmonie statt Redundanzreduktion

Die Standardreduktionen alleine trivialisieren nachweisbar nicht die Identität von Beweisen. Insofern liegt es nahe, sie zur Definition der Beweisidentität heranzuziehen. Philosophisch muss man sich dann natürlich fragen, was die Standardreduktionen auszeichnet über die Tatsache hinaus, dass sie Fälle der allgemeinen Redundanzreduktion sind, also Redundanz in Beweisen reduzieren.

Hier kommt der Begriff der *Harmonie* ins Spiel, mit dem man die Beziehung zwischen Einführungs- und Beseitigungsregeln häufig charakterisiert (der Terminus geht auf Dummett zurück, vgl. auch Schroeder-Heister, 2016; Tranchini, 2016). Betrachten wir wieder den Fall der Konjunktion. Hier ist es so, dass die *Bedingungen der Einführungsregel* übereinstimmen mit den *Konsequenzen der Beseitigungsregeln*. Die Bedingungen der Einführungsregel für $A \wedge B$ ist das

Paar, bestehend aus A und B, und die Konsequenzen der Beseitigungsregeln sind ebenso dieses Paar, das man durch linke und rechte Projektion erhält.

Wenn man entsprechend (3) von den Bedingungen der Einführungsregel zu den Konsequenzen der Beseitigungsregel übergeht, indem man zuerst eine Konjunktion einführt und sie dann wieder beseitigt, dann ist das ein Schritt von einer Aussage A zu ihrem harmonischen Gegenstück, von einem Bestandteil der Bedingung der Einführungsregel zu einem Bestandteil der Konklusion der Beseitigungsregeln. Man gewinnt nicht nur deshalb keine neue Information, weil es sich beidesmal um dieselbe Aussage A handelt, sondern weil man die komplementären Schritte von Einführungs- und Beseitigungsregel verwendet, die sich entsprechend der Harmonie zwischen beiden Regeln aufheben.

Man erhält auf diese Weise zugleich noch eine dazu duale Schrittfolge. Dass die Bedingungen der Einführungsregel übereinstimmen mit den Konsequenzen der Beseitigungsregeln bedeutet auch, dass man nichts verliert, wenn man eine Beseitigungsregel anwendet, d.h. dass man aus Anwendungen der Beseitigungsregeln auf $A \wedge B$, d.h. beim Übergang zu den Konsequenzen von $A \wedge B$, wieder per Einführungsregel zu $A \wedge B$ zurück kann. Das entspricht der Reduktion

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A\wedge B\end{matrix}}{A}\wedge E_1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A\wedge B\end{matrix}}{B}\wedge E_2}{A\wedge B}\wedge I \quad = \quad \begin{matrix}\mathcal{D}\\ A\wedge B\end{matrix} \tag{12}$$

die ebenfalls eine Standardreduktionen ist. Algebraisch entspricht dies der Gleichung

$$I(E_1(\mathcal{D}), E_2(\mathcal{D})) = \mathcal{D} \tag{13}$$

Die Idee ist also die, dass man aufgrund aufgrund der Übereinstimmung der Bedingungen der Einführung mit den Konsequenzen der Beseitigung Paare von sich aufhebenden, komplett symmetrischen Schritten hat, die eine *spezifische* Beziehung von Redundanzbeseitigung ausmachen. Die Standardreduktionen für die Konjunktion (unter Einbeziehung von (12)) drücken die Komplementarität der Schritte Einführung-Beseitigung bzw. Beseitigung-Einführung aus, und es ist diese spezifische Form der Redundanzbeseitigung, die den nichttrivialisierenden Standardreduktionen zugrunde liegt. Das steht im Gegensatz zur allgemeinen Redundanzreduktion (7), bei der zwischen den identifizierten Vorkommen einer Aussage A ein unspezifizierter Beweisabschnitt liegen kann und nicht nur ein Paar komlementärer Regeln. Man kann zeigen, dass die Standardreduktionen (4),(5),(12) maximal sind in dem Sinne, dass man keine weiteren Identitäten postulieren kann, ohne den Identitätsbegriff zu trivialisieren (Došen & Petrić, 2001). Dieses Maximalitätsresultat wird häufig als Auszeichnung der Standardreduktionen als Basis des Identitätsbegriffs verstanden.

Es ist natürlich keine philosophische Notwendigkeit, die Identität von Beweisen auf den Harmoniebegriff zu gründen, d.h. auf Symmetrieeigenschaften zwischen

Einführungsregeln und Beseitigungsregeln für logische Zeichen. Auch das gerade erwähnte Maximalitätsresultat zwingt einen nicht dazu. Es könnte ja andersartige postulierte Mengen von Identitäten geben, die ebenfalls maximal sind. Aber die Harmonieprinzipien erscheinen derzeit als der einzige plausible Weg, eine Motivation für die Standardreduktionen zu geben, welche die allgemeine Redundanzreduktion, die ja zu weit geht, einschränkt.

Für weitere Diskussion der Identität von Beweisen vom mathematisch-logischen und philosophischen Standpunkt vgl. Došen (2003) und de Castro Alves (2018).

3.3 Die Annotation von Beweisen

Wenn man einen Beweis vollzieht, dann rechtfertigt man seine Schritte, indem man angibt, welchen Schritt man gerade anwendet. In unserem einfachen Fall der Konjunktion haben wir z.B. die Bezeichnung der verwendeten Regel neben den Schlussstrich geschrieben. Häufig findet man die Auffassung, dass diese Annotationen ein metasprachlicher Zusatz sind, d.h. ausschließlich der *Erläuterung* dienen und dem eigentlichen Beweisschritt inhaltlich nichts hinzufügen.

Diese Auffassung ist vom Standpunkt der Beweisidentität falsch, jedenfalls in ihrer allgemeinen Form. In den meisten Fällen ist natürlich offensichtlich, welche Regel angewendet worden ist, einfach weil aufgrund der syntaktischen Form der verwendeten Aussagen nur eine einzige Regel in Frage kommt. Bei der $\wedge$-Einführungsregel ist dies immer der Fall, da eine Konstellation

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}$$

nur die Anwendung der $\wedge$-Einführungsregel sein kann, welche Form auch immer A und B haben. Bei den Beseitigungsregeln ist das jedoch nicht immer klar. Wenn wir eine Beseitigungsregel auf die Aussage $A \wedge A$ anwenden:

$$\frac{A \wedge A}{A}$$

dann kann dies, da die rechte und linke Komponente von $A \wedge A$ identisch sind, sowohl Anwendung der rechten Projektion $\wedge E_1$ als auch der linken Projektion $\wedge E_2$ sein. Um hier Klarheit zu schaffen notieren wir obigen Schritt entweder

$$\frac{A \wedge A}{A}\,\wedge E_1$$

oder

$$\frac{A \wedge A}{A}\,\wedge E_2$$

Die so erfolgte Annotation ist somit Bestandteil des Beweises. Wir können uns der Entscheidung zwischen $\wedge E_1$ und $\wedge E_2$ nicht enthalten. Ansonsten müssten wir sowohl

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ A & A\end{matrix}}{A \wedge A}}{A} \quad = \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A\end{matrix}$$

als auch

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ A & A\end{matrix}}{A \wedge A}}{A} \quad = \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ A\end{matrix}$$

als Identitäten akzeptieren und damit die Identifizierung beliebiger Beweise $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ von A. Das war genau die bei der allgemeinen Redundanzreduktion vorgefundene Situation, in der die verwendete Regel keine Rolle spielte.

Hat man einmal eingesehen, dass die Annotation der verwendeten Regel zum Beweis selbst gehört, dann kann man die Notation entsprechend modifizieren, indem man die Regelanwendung in die bewiesene Behauptung steckt. Den Beweisschritt

$$\frac{A \wedge A}{A} \wedge E_1$$

müsste man etwa notieren als

$$\frac{A \wedge A}{E_1 : A}$$

Nun wird natürlich die Prämisse $A \wedge A$ selbst wieder annotiert sein mit einer Annotation t. Insofern würde man dann schreiben:

$$\frac{t : A \wedge A}{E_1(t) : A}$$

Da auf diese Weise in einer Annotation alle Annotationen der darübergehenden Beweisschritte enthalten sind, kodiert die Annotation einer bewiesenen Aussage den Beweis dieser Aussage. Die Notwendigkeit, die Annotation eines Beweises zum Bestandteil dieses Beweises selbst zu machen, führt somit zur Idee, mit einer bewiesen Aussage eine Kodierung ihres Beweises mitzuführen. Bewiesen wird also ‚eigentlich' nicht die Aussage A, sondern eine Behauptung $t : A$, wobei t für den Beweis selbst steht.

Hier kann man jetzt wieder die in Abschnitt 3.1 erwähnte funktionale Auffassung von Beweisschritten zur Geltung bringen und die Annotation $E_1(t)$ als Funktion auffassen, die auf t angewendet wird, und dabei bestimmte Gleichungen postulieren, die den Standardreduktionen entsprechen. In unserem Fall der Konjunktion sind dies die Gleichungen (6) und (13).

Diese Auffassung fürt zur Grundidee konstruktiver Typentheorien, da die Behauptung $t : A$, die jetzt die ‚eigentliche' Behauptung in einem Beweis darstellt gegenüber der bloßen Aussage A, strukturverwandt ist mit der Behauptung, dass ein Objekt t den Typ A hat oder zur Menge A gehört. Auf dieses Verwantschaft kann hier nicht näher eingegangen werden. Sie liegt insbesondere der Martin-Löfschen Typentheorie zugrunde, die in neuester Zeit durch die homotopietheoretische Interpretation Wladimir Wojewodskis in der allgemeinen Mathematik in den Vordergrund gerückt wurde (Sommaruga, 2000; The Univalent Foundations Program, 2013). Die Motivation für diese Konzeption ist in der Regel eine andere als diejenige, die wir hier gegeben haben. Unser philosophischer Beweggrund dafür war, dass Annotationen von Beweisen zu den zu beweisenden Behauptungen gehören und damit Kodierungen von Beweisen in natürlicher Weise Bestandteil bewiesener Behauptungen werden.

Häufig wird die Auffassung, dass eine bewiesene Behauptung A ‚eigentlich' die Struktur $t : A$ hat, wobei t eine Kodierung ihres Beweises ist, als Argument dafür bzw. dagegen angesehen, dass bestimmte Beweise identifiziert werden können. Das ist jedoch nur partiell schlüssig. Die Standardreduktionen kann man so nicht begründen. Die Situation (3), in der Beseitigung auf Einführung folgt, würde ja jetzt notiert als

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ t_1 : A & t_2 : B\end{array}}{I(t_1, t_2) : A \wedge B}}{E_1(I(t_1, t_2)) : A}$$

Um hier $t_1 : A$ und $E_1(I(t_1, t_2)) : A$ identifizieren zu können, müssten wir schon die Identität

$$E(I(t_1, t_2)) = t_1$$

und damit eine der Identitäten (6) voraussetzen, die aber gerade durch die Standardreduktion motiviert sind. Aber auch wenn wir auf diese Weise keine Begründung der Standardreduktionen erhalten, gewinnen wir eine Ablehnung der allgemeinen Redundanzreduktion (7). Diese würde ja jetzt verlangen, dass man in der Situation

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ t : A\end{array}}{\vdots}}{t' : A}$$

die Behauptungen $t : A$ und $t' : A$ identifizieren kann, und das ist im allgemeinen nicht möglich, wenn es keinen Grund für die Annahme $t = t'$ gibt. Einen solchen Grund kann es aber für unspezifizierte t und t' nicht geben. Die universelle Annahme $t = t'$ drückt ja aus, dass sich beliebige Beweise von A identifizieren lassen, was gerade die Trivialisierung der Beweisidentität ist, die wir nicht intendieren. Insofern haben wir, wenn wir die Idee von Beweisannotationen als Beweisbestandteil akzeptieren, ein Argument gegen die allgemeine Redundanzreduktion, das anders als Abschnitt 3.1 nicht auf Reduktionen selbst, sondern nur auf die Identifizierbarkeit von Behauptungen Bezug nimmt. Zur Rechtfertigung der Standardreduktionen als konstitutiver Grundlage von Beweisidentität bleibt es dabei, dass die Harmonie von Einführungs- und Beseitigungsregeln die Basis bildet.

4 Fazit und Ausblick

Warum ist unser Resultat nicht in jeder Hinsicht befriedigend? Wir haben für den sehr beschränkten Rahmen der Konjunktionslogik gezeigt, dass die allgemeine Redundanzreduktion nicht als Identitätskriterium für Beweise taugt, da sie zur Trivialisierung des Begriffs der Beweisidentität führt. Da die Konjunktionslogik normalerweise in jedem logischen System zur Verfügung steht, hat dieses Resultat eine große Reichweite.

Der Vorteil und des allgemeinen Redundanzkriteriums hätte darin gelegen, dass seine Formulierung davon unabhängig ist, welchen logischen Rahmen man verwendet und welche Beweisregeln man zur Verfügung hat. Die Redundanzidee nur im Zusammhang mit der Harmonie von Einführungs- und Beseitigungsregeln zuzulassen, bedeutet eine signifikante Einschränkung: Ein entsprechendes Identitätskriterium steht nur für Beweissysteme zur Verfügung, die ausschließlich auf harmonischen Regeln aufbauen. Das ist sicherlich in der (konstruktiven) Aussagen- und Prädikatenlogik der Fall. In konstruktiven Typentheorien versucht man ebenfalls, eine solche Konzeption durchzuziehen. Aber müssen Beweissysteme immer so strukturiert sein?

Der in diesem Sinne aporetische Charakter unserer Überlegungen zeigt auch, wie weit die Beweistheorie noch entfernt ist von der Behandlung ‚echter' Beweise in der Mathematik, und wie sie noch weiter entfernt ist von der Explikation der Begriffs der ‚Idee', die hinter einem Beweis steckt. Letzteres ist, was Mathematiker in erster Linie interessiert, wenn sie Beweise vergleichen. Die Beweistheorie tastet sich also nur langsam an die wirklichen Probleme heran. Andererseits muss man der Beweistheorie zugute halten, dass sie überhaupt erst einmal einen präzisen syntaktischen Begriff von ‚Beweis' entwickelt hat, in dem sich konkrete mathematische Beweise formulieren lassen. Neuere beweistheoretische Forschungen zu den Grundlagen mathematischer Begriffsbildung und mathematischen Schließens zeigen eine verstärkte Zusammenarbeit zwischen mathematischer Logik und mathematischer Praxis und geben damit Anlass zur Hoffnung auf Fortschritt.

Danksagung. Ich danke der Mathematischen Gesellschaft Hamburg für die Einladung zu ihrer Herbsttagung 2017 und deren Teilnehmerinnen und Teilnehmern für die produktiven Diskussionsbeiträge zu meinem Vortrag. Luca Tranchini danke ich für eine kritische Durchsicht des Manuskripts dieser Ausarbeitung. Die Arbeit daran wurde durchgeführt im Rahmen des französisch-deutschen ANR-DFG-Projekts „Beyond Logic: Hypothetical Reasoning in Philosophy of Science, Informatics, and Law"(DFG-Az. Schr 275/17-1).

Literatur

Aigner, M. & Ziegler, G. M. (2002). *Das Buch der Beweise*. Berlin: Springer.

Barwise, J. (Hrsg.). (1977). *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland.

de Castro Alves, T. (2018). *Synonymy and Identity of Proofs: A Philosophical Essay*. Tübingen: Dissertation Universität Tübingen.

Došen, K. (2003). Identity of proofs based on normalization and generality. *Bulletin of Symbolic Logic*, *9*, 477–503.

Došen, K. & Petrić, Z. (2001). The maximality of Cartesian categories. *Mathematical Logic Quarterly*, *47*, 137–144.

Dummett, M. (1975). The justification of deduction. *Proceedings of the British Academy*, 201–232. (Separately published by the British Academy 1973. Reprinted in Dummett, M.: Truth and Other Enigmas, London: Duckworth 1978.)

Frege, G. (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle: Louis Nebert.

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, *NF 100*, 25–50.

Frege, G. (1893/1903). *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet* (Bd. I-II). Jena: Hermann Pohle.

Gentzen, G. (1934/35). Untersuchungen über das logische Schließen. *Mathematische Zeitschrift*, *39*, 176–210, 405–431.

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, *38*, 173–198.

Hilbert, D. (1922). Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung. *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität*, *1*, 157–177.

Kreisel, G. (1971). A survey of proof theory II. In J. E. Fenstad (Hrsg.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium* (S. 109–170). Amsterdam: North-Holland.

Martin-Löf, P. (1984). *Intuitionistic Type Theory*. Napoli: Bibliopolis.

Prawitz, D. (1965). *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Stockholm: Almqvist & Wiksell. (Reprinted Mineola NY: Dover Publ., 2006.)

Prawitz, D. (1971). Ideas and results in proof theory. In J. E. Fenstad (Hrsg.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium (Oslo 1970)* (S. 235–308). Amsterdam: North-Holland.

Prawitz, D. (1973). Towards a foundation of a general proof theory. In P. Suppes et al. (Hrsg.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV* (S. 225-250). North-Holland.

Quine, W. V. O. (1955). On Frege's way out. *Mind*, *64*, 145–159.

Schroeder-Heister, P. (2012/2018). Proof-theoretic semantics. In E. Zalta (Hrsg.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford: `http://plato.stanford.edu`.

Schroeder-Heister, P. (2016). Open problems in proof-theoretic semantics. In T. Piecha & P. Schroeder-Heister (Hrsg.), *Advances in Proof-Theoretic Semantics* (S. 253–283). Cham: Springer.

Schroeder-Heister, P. & Tranchini, L. (2017). Ekman's paradox. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *58*, 567–581.

Sommaruga, G. (2000). *History and Philosophy of Constructive Type Theory.* Dordrecht: Kluwer.

Stegmüller, W. (1968). *Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik: Eine Einführung in die Theorien von A. Tarski und R. Carnap.* Wien: Springer.

The Univalent Foundations Program. (2013). *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics.* Princeton: Institute for Advanced Study.

Thiel, C. (1996). Zermelo-Russellsche Antinomie. In J. Mittelstrass (Hrsg.), *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie* (Bd. IV, S. 845–846). Stuttgart: Metzler.

Tranchini, L. (2016). Proof-theoretic harmony: towards an intensional account. *Synthese*, Online First.

Wittgenstein, L. (1958). *Philosophical Investigations* (G. Anscombe & R. Rhees, Hrsg.). Oxford: Basil Blackwell.

Eingegangen am 15. 08. 2018

Peter Schroeder-Heister

Universität Tübingen
Wilhelm-Schickard-Institut für Informatik
Sand 13
72076 Tübingen
Email: psh@uni-tuebingen.de