

Aufgabe 21: Beweisen Sie im Kalkül NK' die folgenden Ableitbarkeitsbehauptungen.

- (a) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \sigma \vdash \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)$
- (b) $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi$
- (c) $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\phi \rightarrow \sigma))$
- (d) $\neg(\phi \wedge \psi) \vdash (\phi \rightarrow \neg\psi)$

Aufgabe 22: Zeigen Sie, dass Th und Ded die folgenden Eigenschaften haben:

1. *extreme Werte:* $\text{Th}(\neg\perp) = \text{TAUT}$
2. *endlich:* Falls $\phi \in \text{Ded}(\Gamma)$, dann gibt es endliche Menge $\Delta \subseteq \Gamma$ mit $\phi \in \text{Ded}(\Delta)$.
3. *kompakt:* Falls $\text{Ded}(\Gamma) = \text{PROP}$, dann gibt es endliches $\Delta \subseteq \Gamma$ mit $\text{Ded}(\Delta) = \text{PROP}$.

DEF (endlich erfüllbar): Eine Menge $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ von Formeln heißt *endlich erfüllbar*, wenn jede endliche (!) Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ erfüllbar ist.

Aufgabe 23: Sei $\Gamma \subseteq \text{PROP}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Ist Γ erfüllbar, dann ist Γ insbesondere endlich erfüllbar.
2. Ist Γ endlich und endlich erfüllbar, dann ist Γ erfüllbar.
3. Ist Γ endlich erfüllbar, dann läßt sich Γ zu einer maximalen Menge $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ erweitern, die ebenfalls endlich erfüllbar ist.

Gehen Sie analog zum Beweis des Satzes 7.7 (Konsistente Erweiterbarkeit) vor.

DEF (Vollständig): Eine Menge $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ heißt *vollständig*, falls die folgende Bedingung für alle Formeln $\phi \in \text{PROP}$ erfüllt ist:

$$\Gamma \vdash \phi \quad \text{oder} \quad \Gamma \vdash \neg\phi$$

Aufgabe 24: Sei für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Literal $\lambda_k \in \{p_k, \neg p_k\}$ gegeben. Zeigen Sie durch Induktion über dem Formelaufbau, dass die Menge $\Lambda = \{\lambda_k; k \in \mathbb{N}\}$ vollständig ist. Argumentieren Sie dabei rein syntaktisch und gehen Sie davon aus, dass \perp , \wedge und \rightarrow die einzigen Junktoren der formalen Sprache sind.