

EINFÜHRUNG IN DAS PHYSIKALISCHE PRAKTIKUM

Torsten Hehl

Physikalisches Institut Tübingen

24.2.2023

- **Anwendung** und Erweiterung **physikalischer Kenntnisse und Konzepte** durch eigenes Experimentieren
- **Kommunikation** über messtechnische und physikalische Probleme
- Erwerb experimenteller **Fertigkeiten**
- Kennenlernen ausgewählter **Messtechnik**
- **Versuchsplanung und -durchführung** erlernen
- Umgang mit **Messunsicherheiten**
- Protokollführung und **Versuchsauswertung**, grafische Darstellungen
- Kritische **Analyse der Ergebnisse**
- Strukturierte **Darstellung** der Auswertung

- Untergliederung in **Abteilungen**
- 6er-Gruppen
- Betreuung durch **wechselnde Assistenten** (u.U. **englischsprachig**)
- **Versuchsräume** in D-Bau, 3. Stock, Treff **vor dem Gebäude D**, bei Regen im Foyer, Abstand einhalten und Maske tragen
- Versuche sind (meist) in Schränken verstaut, **Auf- und Abbau** sind Teil der Versuchsdurchführung
- **Schäden** an Versuchsapparaturen oder Messgeräten bitte **melden**
- viele Versuche erfordern **Geduld und experimentelles Geschick** → die Assistenten geben Unterstützung, das Praktikum ist aber kein Dienstleistungsbetrieb

- **Gefährden Sie weder sich selbst noch andere! Hygieneregeln beachten!**
- **Nicht essen und trinken** in den Praktikumsräumen!
- Melden Sie **Schäden!**
- **Fluchtwege:** Richtung Foyer oder über Balkon
- **Feuerlöscher:** In den Versuchsräumen
- **Verbandskasten:** In D3 A19, hinter der Tür links am Schrank
- Bei **Feueralarm** Räume sofort verlassen, Sammelpunkt auf Platz zwischen D-Bau und HZ
- **Elektrische Schaltungen** nur spannungslos aufbauen oder verändern
- Bei Messgeräten auf **richtigen Messbereich** und -eingang achten
- Bei Unfällen **Hauptschalter** (roter Not-Ausknopf) drücken, Betreuer verständigen
- **Ionisierende Strahlung:** Inkorporation vermeiden, Exposition bei den im AP eingesetzten Quellen vernachlässigbar
- **Laser:** alles unter 1 mW oder eingehaust → Blick in den Laser oder seine Reflexionen (Uhren, Ketten!) vermeiden

Das Messprotokoll dient der nachvollziehbaren Aufzeichnung der Messdaten

- **Kopf:** Titel des Versuches, Teilnehmer, Betreuer, Datum
- **Messergebnisse** (Tabellen), wichtige **Parameter** (z.B. Probennr., Nr. der Versuchsanordnung)
- **Messunsicherheiten:** (u.U. geschätzte) Gerätegenauigkeiten, Ablesegenauigkeiten
- Zwischenauswertungen
- fertigen Sie möglichst zügig eine persönliche **Kopie des Messprotokolls** an, das gilt auch für Dateien mit Messwerten

Auswertung nach Möglichkeit **gemeinsam**, Arbeitsteilung hat mehr Nachteile als Vorteile

Die Versuchsprotokolle sind Ihre ersten “Mini-Veröffentlichungen”!

→ *übersichtlich, strukturiert, nachvollziehbar*

Nicht verwenden: Zeichnungen oder Fotos aus anderen Quellen, Fotos der Apparatur.

Besser: Eigene kleine Skizzen

Form: Handschriftlich oder mit PC (nur PDF)

- 1 Titel:** Versuchstitel, -datum, Autor und Partner, Gruppe, Betreuer, Abgabedatum
- 2 Zielstellung:** in 1-3 Sätzen kurze Darstellung des Versuchsziels
- 3 Physikalische Grundlagen:** Mit *eigenen* Worten (+ ggf. Skizzen) verwendete Formeln erklären
- 4 Durchführung:** Messapparate, Besonderheiten des Ablaufs, evtl. Skizze
- 5 Ergebnisse und Diskussion:** Nachvollziehbare Darstellung der Messwerte, Berechnungen und Fehlerabschätzungen. Grafische Darstellungen mit Nummerierung, Legenden und Bildunterschriften, Diskussion der Ergebnisse (z.B. Vergleich mit Literaturwert)
- 6 Kurze Zusammenfassung**

Tipp zur Erstellung: mit Punkt 4 beginnen, mit 2 schließen

Stil: wissenschaftlich, kein “Brief an die Oma”

Hilfe: 10 Schritte... der Uni Bremen

- **Variablen, Parameter und Funktionen:** *kursiv*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Funktionen mit festem Namen und Operatoren:** aufrecht

$\sin(x)$, $\exp(x)$ oder $\log(x)$

- **Einheiten:** immer aufrecht!

richtig: $r = 3 \text{ cm}$ **falsch:** $r = 3 \text{ cm}$

- Kleiner Zwischenraum zwischen Zahl und Einheit

in \LaTeX : Paket *siunitx* verwenden

- **Konstanten:** Mathematische Konstanten: aufrecht $i = \sqrt{-1}$

naturwissenschaftliche und technische Konstanten kursiv:

$$c_0 \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

- **Indizes:** für Variablen kursiv $c_P > c_V$, für Konstanten aufrecht μ_r

- **Vektoren:** kursiv und fett \mathbf{v} oder mit Pfeil \vec{v}

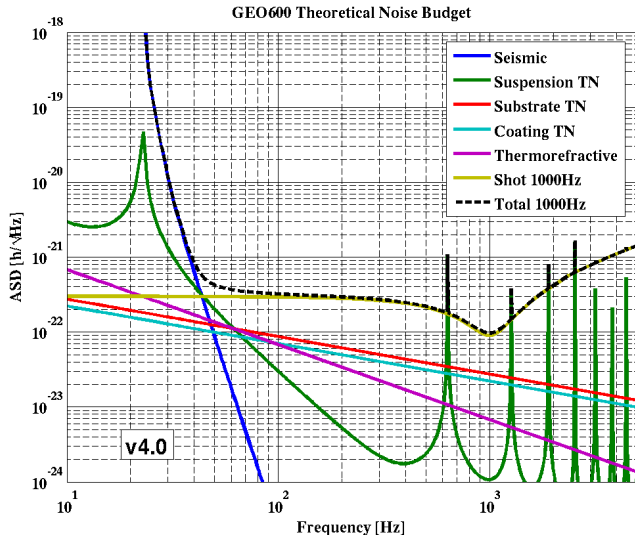
- **Achsbezeichnungen:** *Größe/Einheit* oder *Größe in Einheit*: t/s , t in s (**falsch:** $t[s]$)

Beispiel **Längenmessung**:

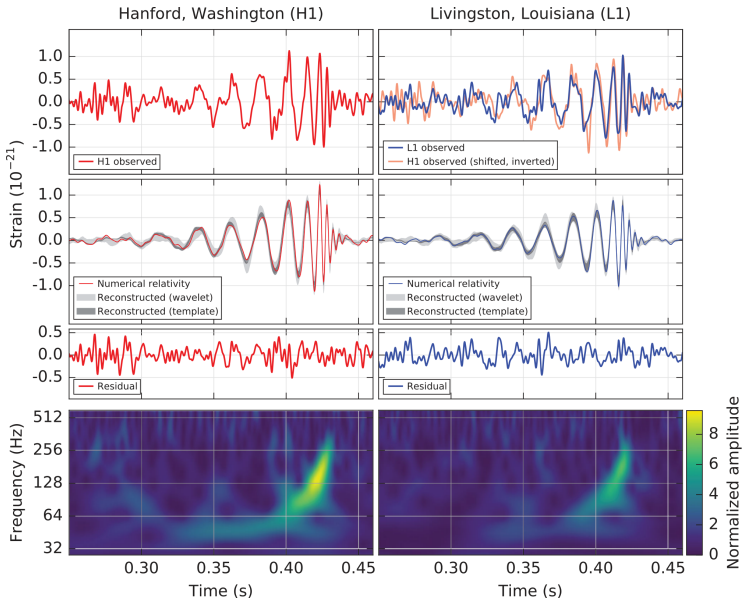
- **Maurer**: Man ist froh, wenn er auf dem Grundstück bleibt...
- **Zimmermann**: 10 mm
- **Tischler**: 1 mm
- **Mechanik** (Schieblehre): 0.1 mm
- **Feinmechanik** (CNC): 10 μm
- **Gravitationswellen**: rel. Änderung von $< 10^{-21}$



Kann ein Wert von 1203.321 743 589 273 961 98 m **gemessen** werden?
 Mit dem richtigen Aufwand schon: **GEO600** misst Gravitationswellen:



DETEKTION VON GRAVITATIONSWELLEN MIT LIGO



Klassifizierung folgt der Richtlinie *Guide to the expression of uncertainty in measurement*

Messunsicherheiten ergeben sich in jeder Messung aus folgenden Gründen:

- A **unvollständige Festlegung** der Messgröße
- B nicht perfekte **Umsetzung** der Definition
- C nicht repräsentative **Messpunkte**
- D ungenügende Berücksichtigung von **Umgebungseffekten**
- E persönliche **Voreingenommenheit** (bias)
- F endliches **Auflösungsvermögen** und Messbereichsgrenzen
- G ungenaue Werte der **Messtandards** und Referenzmaterialien
- H ungenaue **Konstanten** und Parameter in der Datenanalyse
- I **Näherungen und Annahmen** in Messmethode und Auswerteverfahren
- J **Variationen des Messwerts** bei offensichtlich identischen Versuchsbedingungen

Ursachen können mehrfach auftreten, Punkt J ist oft nicht von A-I trennbar.

Messgrößen müssen stets mit ihrer **Messunsicherheit** angegeben werden!

Fehler sind in der Regel keine falschen Messungen, sondern unvermeidbar!

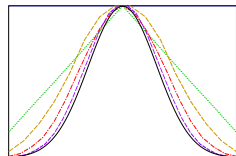
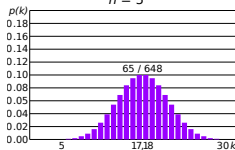
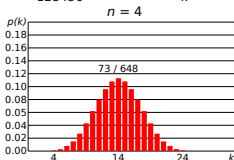
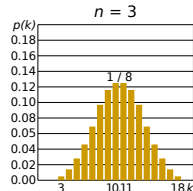
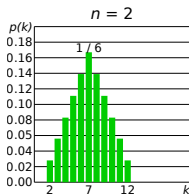
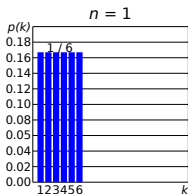
Man unterscheidet

- **Grobe Fehler:** echte Irrtümer, z.B. Schreibfehler, defekte Messgeräte. Erkannte grobe Fehler dürfen eliminiert werden.
- **Systematische Fehler:** Messunsicherheiten A-I. Sie müssen, sofern möglich, korrigiert werden. Die verbleibenden Restfehler werden oft vom Hersteller angegeben oder sind gesetzlich limitiert (Eichfehlergrenzen)
- **Zufällige Fehler:** J und teilweise in A-I, sofern innerhalb einer Messreihe veränderlich

Variiert der Messwert bei wiederholter Messung, so sind statistische Verfahren möglich:
 Misst man beliebig oft (bei konstanten Bedingungen), so kann man damit die
 Verteilungsfunktion der Messgröße bestimmen.

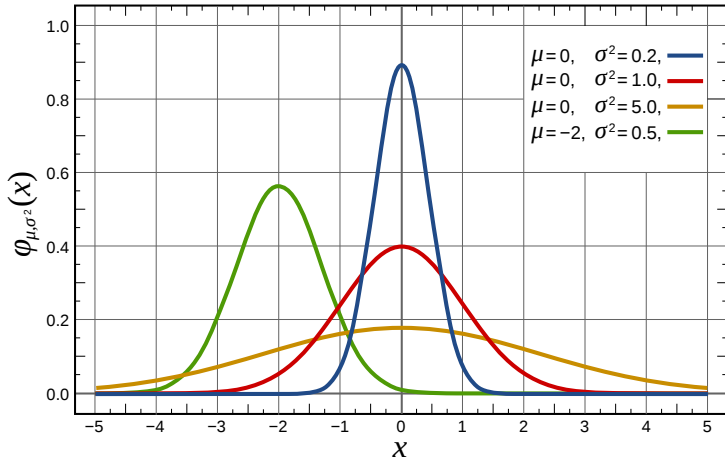
Beispiele:

Würfel: Augenzahlen ergeben diskrete Verteilung, gleichverteilt $p(i) = 1/6$, $i = 1 \dots 6$
 viele Würfel: Summe der Augenzahlen ergibt Kurve



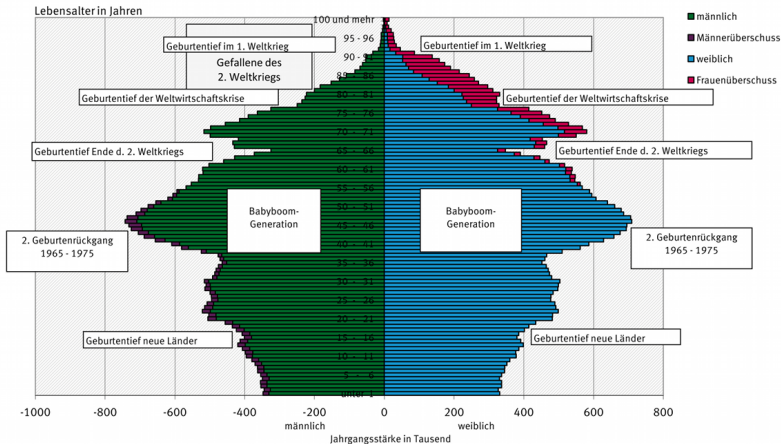
Addition vieler beliebiger Zufallsverteilungen führt zu **Normalverteilung**:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Bildquelle: Wikipedia (Normal Distribution)

Altersaufbau der Bevölkerung Deutschlands zum 31.12.2010



Geburten- und Sterberate ist zeitabhängig → keine Gaußverteilung
bei zeitunabhängiger Sterbe- und Geburtswahrscheinlichkeit: mit Alter abklingende Exponentialfunktion

Wenn Verteilungsfunktion unbekannt, dann muss sie durch **Stichproben** ermittelt werden. Annahme ist eine zugrundeliegende **Normalverteilung** mit den Parametern μ und σ . Beste Abschätzung für zentralen Wert μ :

Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

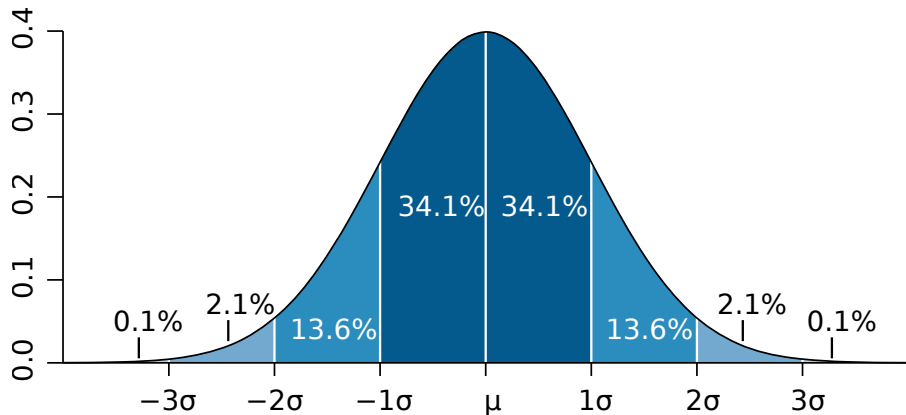
Beste Abschätzung für Breite σ :

Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Fehler des Mittelwerts

Der zufällige Fehler des Mittelwerts ergibt sich dann aus dem Vertrauensintervall und der Zahl der Messwerte.



Bildquelle: Wikipedia (Standardabweichung)

STUDENTSCHE T-VERTEILUNG

Kleine N : Stichprobenverteilung nicht normalverteilt, sondern Studentische t-Verteilung:
Vertrauensintervall

$$\bar{x} \pm \frac{s \cdot t}{\sqrt{N}}$$

STUDENTSCHE T-VERTEILUNG

N	t für zweiseitigen Vertrauensbereich							
	0,5	0,75	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998
	t für einseitigen Vertrauensbereich							
	0,75	0,875	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	1,000	2,414	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309
2	0,816	1,604	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	0,765	1,423	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215
4	0,741	1,344	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,301	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
10	0,700	1,221	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
20	0,687	1,185	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
30	0,683	1,173	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
∞	0,674	1,150	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

- Treten **immer gleich** auf oder ändern sich gesetzmäßig (d.h. sie mitteln sich nicht heraus)
Beispiele: falsch gehende Uhr, ungenaue Maßstäbe, Messung beeinflusst Messgröße
- **Differenz** zwischen Erwartungswert $\bar{x}(N \rightarrow \infty)$ und tatsächlichem Wert der Messgröße
- **Korrektur** erfasster systematischer Fehler (z.B. nach Nachmessung von Wägestücken, Innenwiderstände von Strom- und Spannungsmessern)
→ Kalibrierung
- Systematische **Restfehler**: Genauigkeit der Messgeräte
Korrektur zu aufwändig oder nicht sinnvoll (z.B. Drift)
→ Herstellerangabe
- **Digitalisierungsfehler**, Abschätzung der Restfehler:
Sinnvollerweise die kleinste ablesbare Stelle (LSB)

PROBLEM

Oft ist die gesuchte Größe eine Umformung oder Verknüpfung fehlerbehafteter Messgrößen

$$\bar{F} = F(\bar{x}, \bar{y}, \dots)$$

Bei kleinen Änderungen und unkorrelierten Größen (d.h. Δx unabh. von Δy) kann näherungsweise totales Differential verwendet werden:

$$\Delta F_{\text{sys}} \approx \left| \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x_{\text{sys}} \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y_{\text{sys}} \right| + \dots$$

Da die Vorzeichen der Δ unbekannt sind, kann man nur den Betrag abschätzen.

Diese Berechnung gilt bei systematischen oder abgeschätzten Fehlern (Größtfehlermethode).

Bei **normalverteilten Messgrößen** (zufälligen Fehlern) gilt hingegen folgendes Fortpflanzungsgesetz:

$$(\Delta F_{\text{zuf}})^2 \approx \left| \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x_{\text{zuf}} \right|^2 + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y_{\text{zuf}} \right|^2 + \dots$$

Systematische und zufällige Fehler nach Möglichkeit getrennt angeben

$$s = (7,9 \pm 0,1(\text{zuf.}) \pm 0,2(\text{syst.})) \text{ m}$$

Ergebnis auf sinnvolle Stellenzahl runden:

RUNDUNG

richtig

falsch

$$s = (7,84 \pm 0,05) \text{ m}$$

$$s = (7,8393 \pm 0,0517) \text{ m}$$

$$U = (17,00 \pm 0,04) \text{ V}$$

$$U = (17 \pm 0,04) \text{ V}$$

Immer **nur das Endergebnis runden**, zu frühes Runden kann zu Rundungsfehlern führen

MODELL

gibt einen Zusammenhang zwischen physikalischen Größen wieder, oft gestützt durch eine Theorie. Modelle enthalten oft Parameter, die durch die Messung festzulegen sind.

Beispiel freier Fall:

$$s = \frac{g}{2} t^2$$

Zusammenhang zwischen s und t ist quadratisch, einziger Parameter ist g (Erdbeschleunigung, vom Abstand zur Massenverteilung der Erde abhängig, daher auch Ortsfaktor genannt). Zugrunde liegt die Theorie der Gravitation.

Nebenfrage: welches sind die systematischen Fehler einer solchen Messung?

Messung: viele t_i für viele s_i bestimmen

Naheliegende Auswertung:

$$\bar{g} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{t_i^2}$$

ist meist falsch, da bei konstantem absoluten Fehler der Messwerte kleine Werte zu stark eingehen (Beispiel Landtagswahl)

Ein paar Orte im Landkreis Tübingen gehören zum Wahlkreis Reutlingen:

VORLÄUFIGES ENDERGEBNIS IM WAHLKREIS REUTLINGEN (60)

Gemeinde	Wahlbeteiligung			 CDU		 # GRÜNE Die Grünen		 SPD		 Freie Demokraten FDP		 DIE LINKE.		 Alternative für Deutschland		SONSTIGE	
	Wahlberechtigte	2016 %	2011 %	2016 %	2011 %	2016 %	2011 %	2016 %	2011 %	2016 %	2011 %	2016 %	2011 %	2016 %	2011 %	2016 %	2011 %
Pfullingen	13.020	71,3	68,7	25,9	39,8	29,9	22,7	13,5	24,6	9,7	5,9	2,7	2,6	15,1	-	3,3	4,4
Pliezhausen	8.458	67,8	75,4	26,3	41,4	29,6	22,9	11,8	23,4	9,1	5,0	2,4	1,8	17,5	-	3,3	5,5
Reutlingen	76.218	68,2	64,0	22,6	35,0	30,7	25,9	14,6	25,3	8,4	5,8	3,8	3,2	15,8	-	4,0	4,8
Walddorfhäslach	3.767	79,4	73,8	31,4	33,1	26,0	27,2	13,2	24,5	7,8	9,3	1,3	1,6	16,6	-	3,8	4,3
Wannweil	3.802	76,4	74,8	23,4	47,9	34,2	19,7	14,4	19,9	9,8	5,3	2,5	1,2	12,3	-	3,5	6,1
Kreis Reutlingen	105.265	69,2	66,1	23,7	36,5	30,5	25,1	14,2	24,8	8,7	5,9	3,4	2,9	15,8	-	3,8	4,8
Dußlingen	4.087	73,4	70,2	25,0	37,2	29,7	24,0	13,1	26,0	6,8	4,2	5,1	3,4	16,2	-	4,1	5,2
Gomaringen	6.482	75,0	73,1	29,4	41,0	31,3	24,5	13,3	22,5	7,5	4,7	2,2	2,4	12,3	-	4,0	4,9
Kirchentellinsfurt	4.086	76,2	73,7	22,7	33,7	37,0	30,3	15,4	24,3	7,9	5,1	2,8	2,3	10,7	-	3,6	4,5
Kusterdingen	6.485	75,6	78,2	22,4	31,7	37,5	32,8	13,4	22,4	8,4	6,0	3,5	2,6	11,5	-	3,3	4,6
Nehren	3.048	75,2	69,2	20,1	31,4	33,7	26,3	19,5	30,4	6,4	4,4	3,3	3,1	12,4	-	4,7	4,4
Kreis Tübingen	24.188	75,1	73,6	24,5	35,3	34,0	28,0	14,4	24,3	7,5	5,0	3,3	2,7	12,5	-	3,9	4,7
Gesamtergebnis	129.453	70,3	67,4	23,9	36,3	31,2	25,6	14,2	24,7	8,4	5,7	3,4	2,8	15,1	-	3,8	4,8

Eine Mittelung der Prozente würde das Ergebnis stark verzerren!

EINFLUSS SYSTEMATISCHER FEHLER AUF ABGELEITETE GRÖSSEN

Bestimmung des Ohmschen Widerstands durch Strom- und Spannungsmessung

IDEALE MESSGERÄTE

I/A	U/V	R in Ω
0.1	0.2	2
0.2	0.4	2
0.5	1.0	2
1.0	2.0	2.0
2.0	4.0	2.0
5.0	10.0	2.0
10.0	20.0	2.00
20.0	40.0	2.00
Mittelwert:		2.0
Standardabw.:		0

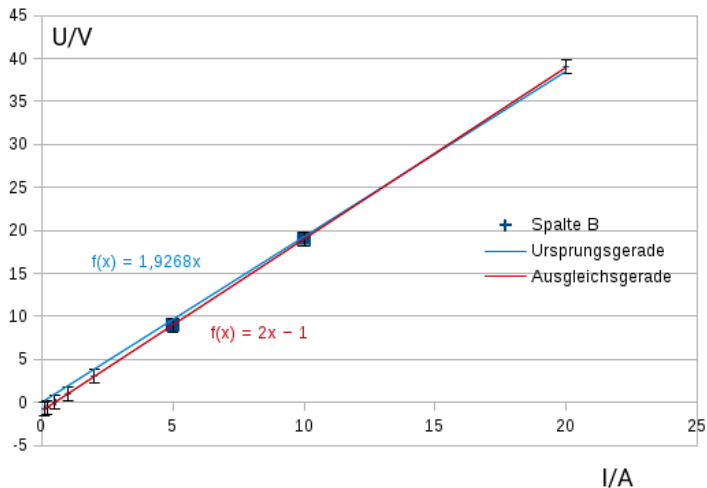
VOLTMETER -1 V FALSCH

I/A	U/V	R in Ω
0.1	-0.8	-8
0.2	-0.6	-3
0.5	0	0
1.0	1.0	1
2.0	3.0	1.5
5.0	9.0	1.8
10.0	19.0	1.9
20.0	39.0	1.95
Mittelwert:		-0.36
Standardabw.:		1.24

Achtung: Mittelwertbildung abgeleiteter Größen geht in der Regel schief!

EINFLUSS SYSTEMATISCHER FEHLER AUF ABGELEITETE GRÖSSEN

Grafische Methode:



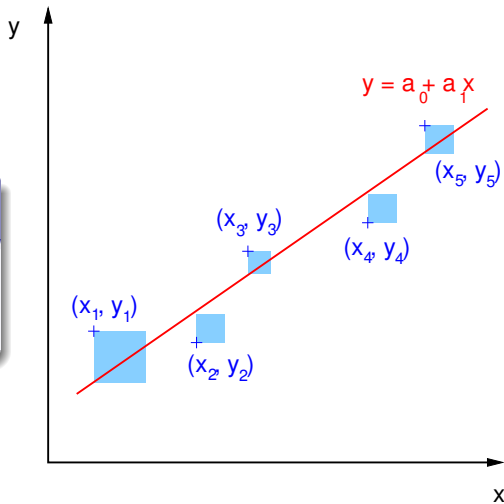
Wie geht das korrekt?

Anpassung von Messwerten y_i an
Modellfunktion y :

$$y(x) = y(x; a_1 \dots a_M)$$

METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE (C.F. GAUSS)

$$\sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i; a_1 \dots a_M)]^2 \rightarrow \text{Min.}$$



Annahme: Messwerte y_i seien jeweils normalverteilt:

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(y_i - y)^2}{2\sigma_i^2}}$$

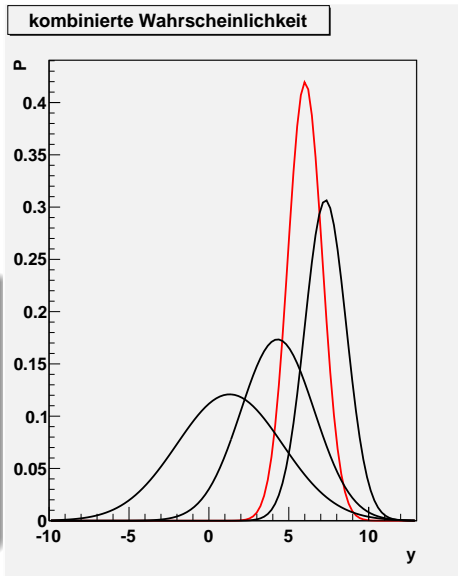
max. Wahrscheinlichkeit für 1 Punkt: $y = y_i$

Viele Punkte → kombinierte
Wahrscheinlichkeit

MAXIMUM LIKELIHOOD FÜR NORMALVERTEILUNGEN

$$P = \prod_{i=1}^N P_i \sim \prod_{i=1}^N e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2} \rightarrow \text{Max.}$$

$$-\ln P \sim \chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 \rightarrow \text{Min.}$$



χ^2 -VERTEILUNGSFUNKTION (HELMERT 1875, PEARSON 1900)

$$F(\chi^2) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)2^\lambda} \int_0^{\chi^2} u^{\lambda-1} e^{-\frac{1}{2}u} du \quad .$$

$$\lambda = \frac{N - M}{2}, \quad E(\chi^2) = (N - M), \quad \sigma^2(\chi^2) = 2(N - M)$$

→ $\frac{\chi^2}{N - M}$: Maß für Güte der Anpassung (reduziertes χ^2)

≈ 1: Gute Anpassung

≫ 1: Inkonsistenz zwischen Daten und Modellfunktion, meist Fehler zu klein angegeben

≪ 1: Anpassung ist konsistent, aber Fehler zu groß oder Daten geschönt

BSP.: MESSUNG DER LICHTGESCHWINDIGKEIT (1948)

Bergstrand (1948)	$299\,793 \pm 2.0 \text{ km/s}$
Essen et al. (1947)	$299\,792 \pm 4.5 \text{ km/s}$
Jones (1947)	$299\,782 \pm 25 \text{ km/s}$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{c_i - \bar{c}}{\Delta c_i} \right)^2 \rightarrow \text{Min.}$$

$$\frac{d\chi^2}{d\bar{c}} = 0 = \sum_{i=1}^3 2 \frac{c_i - \bar{c}}{\Delta c_i^2} = 0$$

$$\rightarrow \bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{\Delta c_i^2}}{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Delta c_i^2}}$$

Ohmsches Gesetz (s. Beispiel)

$$U(I) = U(I; R) = R \cdot I$$

$$\chi^2(R) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{U_i - R \cdot I_i}{\sigma_i} \right)^2 \rightarrow \text{Min.}$$

Daraus folgt die Bedingung

$$0 = \frac{d\chi^2}{dR} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{U_i - R \cdot I_i}{\sigma_i^2} \rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{U_i \cdot I_i}{\sigma_i^2} = R \sum_{i=1}^N \frac{I_i^2}{\sigma_i^2}$$

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{I_i^2}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{U_i \cdot I_i}{\sigma_i^2}}$$

$$\text{FFG : } \sigma_R^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \left(\frac{dR}{dU_i} \right)^2 = 1 / \sum_{i=1}^N \frac{I_i^2}{\sigma_i^2}$$

Mit einem konstanten zuf. Fehler von $\sigma_i=0.8 \text{ V}$ ergibt sich hier:

$\bar{R} = 1.927 \Omega$, $\sigma_R = 0.035 \Omega$ (intern), $\sigma_R = 0.04 \Omega$ (extern)

Lineare Modellfunktion

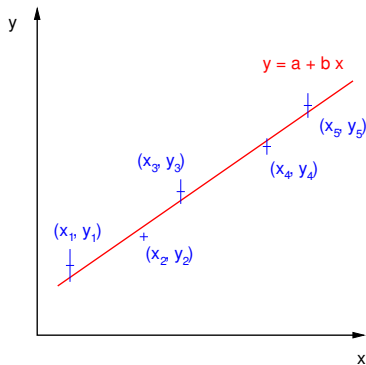
$$y(x) = y(x; a, b) = a + bx$$

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i} \right)^2 \rightarrow \text{Min.}$$

Daraus folgen die Bedingungen

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i^2}$$

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{x_i(y_i - a - bx_i)}{\sigma_i^2}$$



Mit den Abkürzungen

$$S \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad S_x \equiv \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}, \quad S_y \equiv \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}$$

$$S_{xx} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, \quad S_{xy} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$$

erhalten wir das Gleichungssystem:

$$aS + bS_x = S_y$$

$$aS_x + bS_{xx} = S_{xy}$$

Lösungen: (mit der Determinante $D = SS_{xx} - S_x^2$):

$$a = \frac{S_{xx}S_y - S_xS_{xy}}{D}$$

$$b = \frac{SS_{xy} - S_xS_y}{D}$$

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^2$$

Hier:

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{S_{xx} - S_x x_i}{\sigma_i^2 D}$$

$$\frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{S x_i - S_x}{\sigma_i^2 D}$$

Damit erhält man:

$$\sigma_a^2 = \frac{S_{xx}}{D}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{S}{D}$$

Modellfunktion als Summe von beliebigen $f(x)$ mit linearen Koeffizienten:

$$y(x; a_1, \dots, a_M) = \sum_{j=1}^M a_j f_j(x) \quad ,$$

Dann ergibt sich lineares Gleichungssystem M -ter Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=1}^N \frac{\left(y_i - \sum_{j=1}^M a_j f_j(x_i) \right)^2}{\sigma_i^2} = 0$$

Beispiele:

Polynom $M - 1$ -ten Grades: $y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_M x^{M-1}$

Legendrepolynome: $P_{j-1}(x) \equiv f_j(x)$ mit Rekursion:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

Transformation von y so, dass lineare Funktion y' entsteht: Beispiel:

$$y(x; a, b) = e^{a+bx_i}$$

Transformation (Logarithmus):

$$y' = \ln y = a + bx_i$$

Wichtig: Transformation der Fehler σ_i nicht vergessen!

$$(\sigma'_i)^2 = \sigma_i^2 \frac{dy'_i}{dy_i} = \sigma_i^2 \frac{d}{dy_i} \ln y_i = \frac{\sigma_i^2}{y_i}$$

Zu minimieren ist dann:

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N \frac{y_i (\ln y_i - a - bx_i)^2}{\sigma_i^2} \rightarrow \text{Min.}$$

- **Skalierung:** der dargestellte Bereich muss dem gemessenen Bereich entsprechen
- **Transformation:** einfach logarithmische (bei exponentiellen Abhängigkeiten) bzw. doppelt logarithmische (bei Potenzgesetzen) Achsen verwenden. Gelegentlich sind auch quadrierte Achsen sinnvoll
- **Messdaten:** stets als Punkte (Symbole), NIE verbinden! Ausnahme: Bei schnell oszillierenden Punkten ist u.U. die Abfolge nicht mehr erkennbar
- **Fehler:** als Balken oder Kreuze
- **Theoretische Kurven:** anpassen und stets als durchgehende Kurven zeichnen!
- **Farben** oder Schraffuren zur Unterscheidung verwenden
- **Beschriftung:**
 - **Physikalische Größe:** Einheiten in sinnvollen Größen an die Achse
 - **Teilstriche:** sinnvolle Anzahl für gute Ablesbarkeit, evtl. Koordinatennetz
 - **Zahlen:** ca. jeden 5. - 10. Teilstrich beschriften, möglichst kurze Mantissen (lieber 10, 20, 30, 40, 50 m statt 0,01 km oder 10000 mm)
 - **Legende:** bei verschiedenen Messreihen oder Kurven Pflicht (bitte nicht Excels Reihe 1 lassen!)
- **Zeichnungsgröße:** Messfehler müssen ablesbar sein (d.h. ca. 0,2 mm entsprechen). Ansonsten Ausschnittsvergrößerung oder Residuen (Abweichung von Ausgleichskurve) zeichnen. Volle Textbreite nutzen, keine Briefmarken!
- **Fontgröße:** lesbar, sollte restlichem Text entsprechen

- **Zeit:** digitale Stoppuhren (Armbanduhr, Handy)
- **Längen:** Lineal, Schieblehre, Laserentfernungsmessgerät
- **elektrische Größen:** Multimeter (U , I , R), Oszilloskop
- **Temperatur:** Thermometer (Glas), digitale Thermometer, Widerstandsthermometer Pt100, Pt1000
- **optische Wellenlängen:** Handspektrometer, USB-Spektrometer
- **Detektoren:** Geiger-Müller-Zählrohre (Gamma), Halbleiterdioden (Röntgen, Gamma)
- **Sensoren im Smartphone:** Beschleunigung, Drehbewegung, Schall, Licht, ...

- Mikroprozessor-gesteuerte **Messboxen**: digitale Anzeigen, Einstellung der Größen mit +/++ bzw. -/- - Tasten
- **CASSY** (Firma Leybold Didactic): modulares Messsystem (SENSORCassy, POWERCassy, PROFICassy) mit zahlreichen Sensoren und Aufnahmesoftware CASSYLab, Anschluss per USB
- **PHYCON** (Firma PHYWE): Spannungsmessung per USB
- **LabView** (Firma National Instruments): erst im F-Praktikum

- **CASSYlab**: Mess- und Auswertesystem von Leybold didactic, wird in einigen Versuchen als Messsystem eingesetzt, leicht erlernbar, sehr variabel, keine Fehlerberechnung innerhalb CASSYlab möglich, zur Auswertung ohne Lizenz einsetzbar (Windows)
- **Python + Matplotlib**: Leicht erlernbare Skriptsprache mit mächtigem Plotpaket
- **MATLAB** (Uni-Lizenz)
- **Origin** (teuer) und günstige Clones wie Qtiplot oder SciDAVis
- **Gnuplot** freie Plot-Software, recht mächtig, Bedienung über Kommandozeile (Linux/Windows)
- **Grace** (aka xmgrace): Einfach zu bedienendes Plotprogramm mit Fitfunktionen (beliebt bei Theoretikern)
- **ROOT**: Framework zur Datenanalyse und -darstellung, sehr mächtig, Open Source, entwickelt am CERN, C++-Kenntnisse von großem Vorteil (Linux/Windows/Mac)
- **Excel**: Tabellenkalkulationsprogramm von Microsoft mit Möglichkeiten zur grafischen Darstellung, sehr flexibel, viele Standardeinstellungen sind allerdings ungünstig, lizenzpflichtig (Windows)