

Aufgabe 1

Führen Sie folgende Substitutionen aus:

- a) $\forall xPxy [x/y]$
- b) $\forall xPxy [y/x]$
- c) $\forall xPxy [y/z]$
- d) $\forall xPxy [z/x]$
- e) $\forall xPxy [y/z] [z/y]$
- f) $\forall xPxy [x/z] [x/y]$
- g) $(\forall xPxy \rightarrow Qy) [y/x]$
- h) $\forall zRxy [y/x] [x/y]$

Diskutieren Sie die Eigenschaften der Substitutionsoperation.

Aufgabe 2

Es sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ die Menge der Grundsymbole einer quantorenlogischen Sprache mit

$$\mathcal{A}_1 = \{A, B\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \{P, Q\},$$

$$\mathcal{A}_3 = \{a, b\}.$$

Es sei weiterhin $U = \{0, 1, 2, 3\}$. Die Interpretation \mathcal{I} ist gegeben durch folgende Zuordnungen:

$$\mathcal{I}(A) = w$$

$$\mathcal{I}(B) = f$$

$$\mathcal{I}(P) = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 0, 3 \rangle\} \quad (\text{“... ist kleiner als ...”})$$

$$\mathcal{I}(Q) = \{\langle 1, 0, 2 \rangle, \langle 1, 0, 3 \rangle, \langle 2, 1, 3 \rangle, \langle 2, 0, 3 \rangle\} \quad (\text{“... liegt zwischen ... und ...”})$$

$$\mathcal{I}(a) = 0$$

$$\mathcal{I}(b) = 2$$

Welche der folgenden Behauptungen treffen zu?

- a) $\mathcal{I} \models \neg \exists xPxa$
- b) $\mathcal{I} \models \forall x(Pxb \vee Pbx) \wedge A$
- c) $\mathcal{I} \models B \rightarrow \exists x \forall y Pxy$
- d) $\mathcal{I} \models \forall x \forall y \forall z (Pxy \wedge Pyz \rightarrow Qyxz)$

Aufgabe 3

Es sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ die Menge der Grundsymbole einer quantorenlogischen Sprache mit

$$\mathcal{A}_1 = \emptyset,$$

$$\mathcal{A}_2 = \{P, Q, R\},$$

$$\mathcal{A}_3 = \emptyset.$$

Es sei weiterhin $U = \{anne, babette, claudius, daniel, ella, ferdinand, grete\}$. Die Interpretation \mathcal{I} ist gegeben durch folgende Zuordnungen:

$$\mathcal{I}(P) = \{\langle claudius, ella \rangle, \langle daniel, babette \rangle\} \quad (\text{“... ist der Ehemann von ...”})$$

$$\mathcal{I}(Q) = \{\langle daniel, ella \rangle, \langle daniel, ferdinand \rangle, \langle claudius, grete \rangle\} \quad (\text{“... ist Vater von ...”})$$

$$\mathcal{I}(R) = \{\langle babette, ella \rangle, \langle anne, ferdinand \rangle, \langle ella, grete \rangle\} \quad (\text{“... ist Mutter von ...”})$$

Welche der folgenden Behauptungen treffen zu?

- a) $\mathcal{I} \models \neg \exists x(Qxx \wedge \neg Rxx)$
- b) $\mathcal{I} \models \forall x \forall y (\exists z(Qxz \vee Ryz) \rightarrow Pxy)$
- c) $\mathcal{I} \models \forall x \forall y (Pxy \rightarrow \exists z Ryz)$
- d) $\mathcal{I} \models \exists x \exists y (Qxy \wedge \exists z Ryz)$

Aufgabe 4

Erweitern Sie die Sprache (und entsprechend die Interpretation) aus der vorherigen Aufgabe so, daß Sie folgende Aussagen formalisieren können:

- a) Ferdinand hat keine Kinder.
- b) Anne ist Großmutter.
- c) Wenn jemand Großeltern hat, dann ist er nicht verheiratet.
- d) Jeder hat einen Vater und eine Mutter.

Welche der Aussagen gelten unter der erweiterten Interpretation?