

Aufgabe 1

Das System D entstehe aus K , indem man die Regeln von K um das Axiomenschema

$$\overline{\Box A \rightarrow \Diamond A}$$

ergänzt. Zeigen Sie:

- Ein Rahmen $\langle W, R \rangle$ ist genau dann ein Rahmen für D , wenn W keine *dead ends* bezüglich R besitzt. Dabei ist $u \in W$ ein *dead end* bezüglich R , falls es kein $v \in W$ mit uRv gibt.
- Jede Erweiterung von D (also insbesondere D selbst) besitzt die abgeleitete Regel

$$\frac{A}{\Diamond A}.$$

- Das System K enthält kein Theorem der Form $\Diamond A$. Ist in einer Erweiterung S von K eine Formel der Form $\Diamond A$ ableitbar, so auch schon jede D -Konsequenz.
- Der kanonische Rahmen von D ist ein Rahmen für D .

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

- Der kanonische Rahmen von T ist ein Rahmen für T .
- Der kanonische Rahmen von B ist ein Rahmen für B .
- Der kanonische Rahmen von $S4$ ist ein Rahmen für $S4$.
- Der kanonische Rahmen von $S5$ ist ein Rahmen für $S5$.

Aufgabe 3

Die Regel

$$\frac{\Box A_1 \vee \dots \vee \Box A_n}{A_i} \text{ (RD)}$$

für alle n und alle $1 \leq i \leq n$ heißt *Disjunktionsregel*. Zeigen Sie: Genau dann ist (RD) eine abgeleitete Regel des Systems S , wenn der kanonische Rahmen eine Welt w enthält, von der aus jede andere Welt des kanonischen Rahmens zugänglich ist. (Hinweis: für die eine Richtung des Beweises erweise man die Menge $\{\neg\Box A \mid \not\vdash_S A\}$ als S -konsistent.)

Bemerkung: Man kann zeigen, daß die Systeme K , T und $S4$ die Disjunktionsregel als abgeleitete Regel besitzen, die Systeme B und $S5$ dagegen nicht.

Aufgabe 4

Zeigen Sie $\vdash_{GL} \Box A \rightarrow A$ entweder semantisch, oder indem Sie eine Abbildung $f : \Phi_{ML} \rightarrow \Phi_{AL}$ angeben, die alle GL -Theoreme auf Tautologien, jedoch $\Box A \rightarrow A$ nicht auf eine Tautologie wirft.