# Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

**PD Dr. Fritz Hamm, Prof. Dr. P. Schroeder-Heister** **Blatt 8**

---

**Aufgabe 1** (6 Punkte)

Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig? Begründen Sie!

a) $\forall x \exists y \phi \to \exists y \forall x \phi$

b) $\forall x \exists y \phi \to \forall y \exists x \phi$

c) $\exists x \forall y \phi \to \forall y \exists x \phi$

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Geben Sie für jede allgemeingültige Formel aus der ersten Aufgabe eine Herleitung im Prädikatenkalkül an.

**Aufgabe 3** (6 Punkte)

Zeigen Sie, daß für eine beliebige Struktur $\mathfrak{M}$ die Theorie $T \overset{def}{=} \{\phi \mid Fr(\phi) = \emptyset \text{ und } \mathfrak{M} \models \phi\}$ eine vollständige Theorie ist.

**Aufgabe 4** (8 Punkte)

Die Sprache $\mathcal{L}^*$ ergebe sich aus der Sprache $\mathcal{L}$ durch Hinzunahme weiterer Zeichen. Es sei $S$ eine Menge von $\mathcal{L}^*$-Aussagen und $T$ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen. Die Menge $S$ heißt *konservative Erweiterung* von $T$, wenn für jede $\mathcal{L}$-Aussage $\phi$ gilt:

$$S \vdash_{\mathcal{L}^*} \phi \text{ genau dann, wenn } T \vdash_{\mathcal{L}} \phi$$

Sei nun $T$ eine widerspruchsfreie Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen und sei $T_H$ die Henkinisierung von $T$. Zeigen Sie, daß $T_H$ eine konservative Erweiterung von $T$ ist.