Mathematische Logik I — WS 2016/17

Übungsblatt 6 — **Abgabe am 2.12.** — **T. Piecha**

Wir betrachten ausschließlich den Kalkül NK′.

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Zeigen Sie:

(a) $(\varphi \wedge \psi) \to \sigma \vdash (\psi \wedge \varphi) \to \sigma$ (2 Punkte)

(b) $\vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$ (2 Punkte)

(c) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma))$ (2 Punkte)

(d) $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi \to \neg\psi$ (2 Punkte)

(e) $\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ (consequentia mirabilis) (2 Punkte)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Formulieren Sie ein der induktiven Definition von Ableitung entsprechendes Induktionsprinzip. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie damit:

Sei $\Delta \subseteq \mathrm{PROP}$ eine (unendliche) Aussagenmenge und $\varphi \in \mathrm{PROP}$ eine Aussage. Falls $\Delta \vdash \varphi$, dann gibt es eine endliche Teilmenge Δ' von Δ mit $\Delta' \vdash \varphi$. (3 Punkte)

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Beweisen Sie, dass für alle Aussagen $\varphi, \psi \in \mathrm{PROP}$ und alle Formelmengen $\Delta, \Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ die folgenden Struktureigenschaften gelten:

(a) *Identität:* $\varphi \vdash \varphi$. (1 Punkt)

(b) *Verdünnung:* Wenn $\Gamma \vdash \varphi$, dann $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$. (2 Punkte)

(c) *Schnitt:* Wenn $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Delta, \varphi \vdash \psi$, dann $\Gamma, \Delta \vdash \psi$. (2 Punkte)