

SAT-Solving und Anwendungen

Lernen und der Implikationsgraph

Prof. Dr. Wolfgang Küchlin
Dipl. Inform. Christoph Zengler

Universität Tübingen

20. Mai 2009

Generelles Vorgehen beim Klausellernen

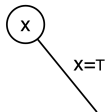
- Standard DPLL Algorithmus
- Variablen werden belegt durch
 - Auswahl (Heuristik) und Belegung (**decision**)
 - Unit propagation (**implication**)
- Mit jeder decision wird das aktuelle **decision level** erhöht
- Wird eine Variable durch UP belegt, so wird der Grund für diese gespeichert

Datenstruktur:

- Zu jeder **decision variable** wird das level gespeichert und als Grund null
- Zu jeder **implication variable** wird das level gespeichert und als Grund die Klausel, wegen der UP erfolgte

Aufbau der Datenstruktur

$\{\neg u, w\}$
 $\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
 $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$
 $\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
 $\{y, f\}$
 $\{\neg f, g\}$
 .
 .
 .
 $\{\neg x, a\}$
 $\{\neg x, b, \neg a\}$
 $\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
 $\{\neg a, \neg d\}$
 $\{\neg b, d, \neg e\}$
 .
 .
 .



Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision

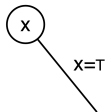
Aufbau der Datenstruktur

$\{\neg u, w\}$
 $\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
 $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$
 $\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
 $\{y, f\}$
 $\{\neg f, g\}$

.
 .
 .

$\{\neg x, a\}$
 $\{\neg x, b, \neg a\}$
 $\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
 $\{\neg a, \neg d\}$
 $\{\neg b, d, \neg e\}$

.
 .
 .



Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	\perp	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	\perp	$\{\neg b, d, \neg e\}$

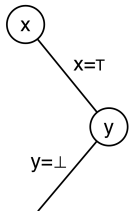
Aufbau der Datenstruktur

$\{\neg u, w\}$
 $\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
 $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$
 $\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
 $\{y, f\}$
 $\{\neg f, g\}$

\cdot
 \cdot
 \cdot

$\{\neg x, a\}$
 $\{\neg x, b, \neg a\}$
 $\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
 $\{\neg a, \neg d\}$
 $\{\neg b, d, \neg e\}$

\cdot
 \cdot
 \cdot



Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	\perp	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	\perp	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	\perp	decision

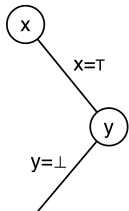
Aufbau der Datenstruktur

$\{\neg u, w\}$
 $\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
 $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$
 $\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
 $\{y, f\}$
 $\{\neg f, g\}$

\vdots
 \vdots
 \vdots

$\{\neg x, a\}$
 $\{\neg x, b, \neg a\}$
 $\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
 $\{\neg a, \neg d\}$
 $\{\neg b, d, \neg e\}$

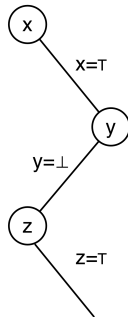
\vdots
 \vdots
 \vdots



Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	\perp	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	\perp	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	\perp	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	\perp	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$

Aufbau der Datenstruktur

$\{\neg u, w\}$
 $\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
 $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$
 $\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
 $\{y, f\}$
 $\{\neg f, g\}$
 \vdots
 \vdots
 \vdots
 $\{\neg x, a\}$
 $\{\neg x, b, \neg a\}$
 $\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
 $\{\neg a, \neg d\}$
 $\{\neg b, d, \neg e\}$
 \vdots
 \vdots
 \vdots



Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	\perp	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	\perp	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	\perp	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	\perp	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
3	z	T	decision

*z kommt in den gegebenen Klauseln nicht vor,
kann jedoch in ... vorkommen.*

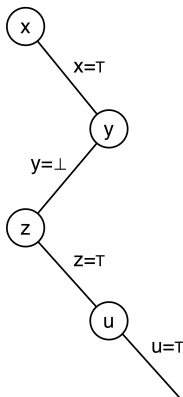
Aufbau der Datenstruktur

$\{\neg u, w\}$
 $\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
 $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$
 $\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
 $\{y, f\}$
 $\{\neg f, g\}$

\vdots
 \vdots
 \vdots

$\{\neg x, a\}$
 $\{\neg x, b, \neg a\}$
 $\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
 $\{\neg a, \neg d\}$
 $\{\neg b, d, \neg e\}$

\vdots
 \vdots
 \vdots



Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	⊥	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	⊥	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	⊥	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	⊥	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
3	z	T	decision
4	u	T	decision

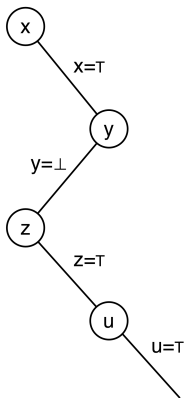
Aufbau der Datenstruktur

$\{\neg u, w\}$
 $\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
 $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$
 $\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
 $\{y, f\}$
 $\{\neg f, g\}$

\vdots
 \vdots
 \vdots

$\{\neg x, a\}$
 $\{\neg x, b, \neg a\}$
 $\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
 $\{\neg a, \neg d\}$
 $\{\neg b, d, \neg e\}$

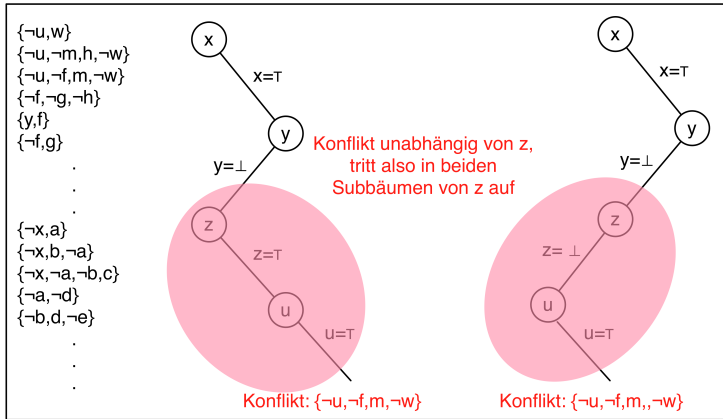
\vdots
 \vdots
 \vdots



Konflikt: $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$

Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	⊥	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	⊥	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	⊥	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	⊥	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
3	z	T	decision
4	u	T	decision
	w	T	$\{\neg u, w\}$
	m	⊥	$\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$

Warum Lernen?



Problem: Bei Backtracking über z hinaus gehen die Informationen über u verloren

Lösung: Hinzufügen einer zusätzlichen Klausel um diese Information zu "lernen"

Welche Klausel wird hinzugefügt

Es können verschiedene Klauseln hinzugefügt werden. Ziel ist:

- eine möglichst kurze Klausel ohne überflüssige Literale
- Klausel soll nach Backtracking unit sein (damit wird das neue Wissen sofort eingesetzt)

Zwei verschiedene Visualisierungen von Lernen:

- Resolution (schon bekannt)
- Implikationsgraph
 - Knoten sind Variablenbelegungen (x bedeutet, $x \mapsto \top$, $\neg x$ bedeutet $x \mapsto \perp$)
 - Kante von A nach B bedeutet, dass A ein Grund war, dass B belegt wurde
 - decision variables haben keine eingehenden Kanten
 - war der Grund für eine implication variable y eine Klausel $\{y, x_1, \dots, x_n\}$, so hat der Knoten y n eingehende Kanten.

Aufbau des Implikationsgraphen

decisions |

Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	\perp	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	\perp	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	\perp	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	\perp	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
3	z	T	decision
4	u	T	decision
	w	T	$\{\neg u, w\}$
	m	\perp	$\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
	m	T	$\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$

Aufbau des Implikationsgraphen

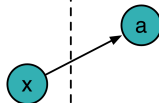
decisions



Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	\perp	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	\perp	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	\perp	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	\perp	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
3	z	T	decision
4	u	T	decision
	w	T	$\{\neg u, w\}$
	m	\perp	$\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
	m	T	$\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$

Aufbau des Implikationsgraphen

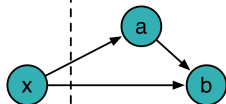
decisions



Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	\perp	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	\perp	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	\perp	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	\perp	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
3	z	T	decision
4	u	T	decision
	w	T	$\{\neg u, w\}$
	m	\perp	$\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
	m	T	$\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$

Aufbau des Implikationsgraphen

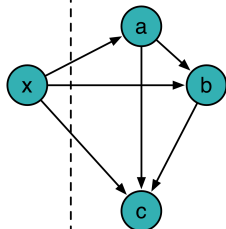
decisions



Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	\perp	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	\perp	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	\perp	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	\perp	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
3	z	T	decision
4	u	T	decision
	w	T	$\{\neg u, w\}$
	m	\perp	$\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
	m	T	$\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$

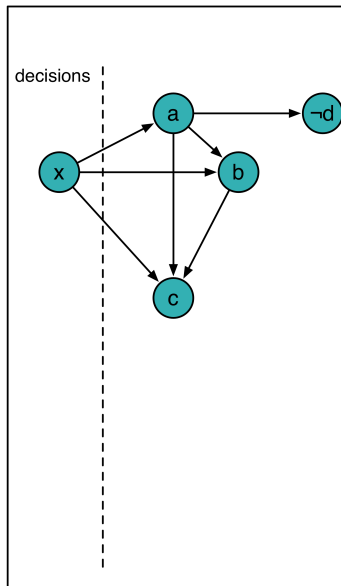
Aufbau des Implikationsgraphen

decisions



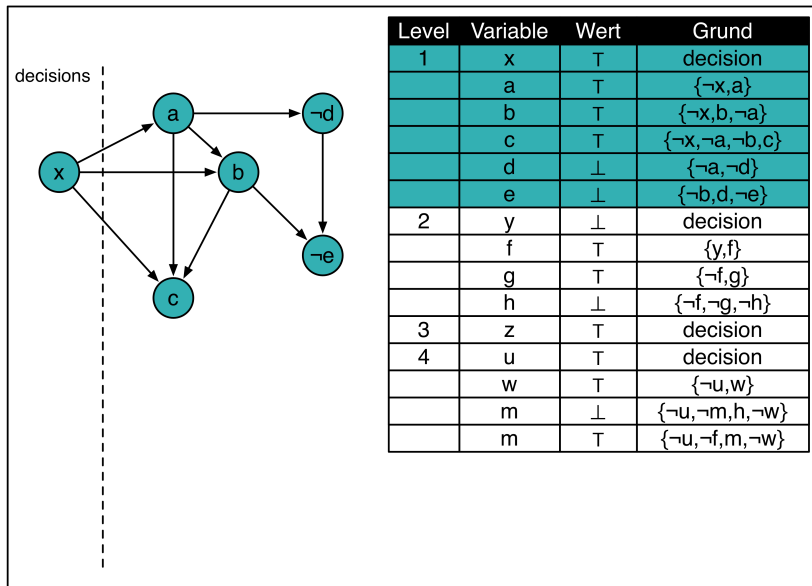
Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	\perp	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	\perp	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	\perp	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	\perp	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
3	z	T	decision
4	u	T	decision
	w	T	$\{\neg u, w\}$
	m	\perp	$\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
	m	T	$\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$

Aufbau des Implikationsgraphen

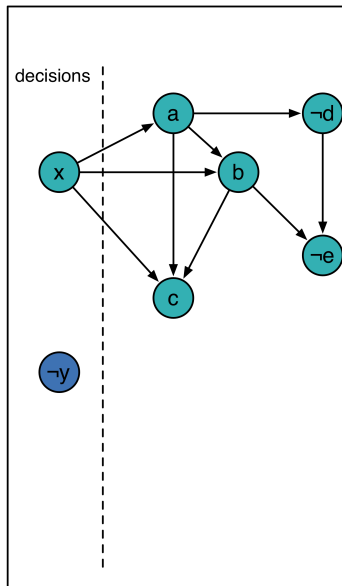


Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	\perp	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	\perp	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	\perp	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	\perp	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
3	z	T	decision
4	u	T	decision
	w	T	$\{\neg u, w\}$
	m	\perp	$\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
	m	T	$\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$

Aufbau des Implikationsgraphen

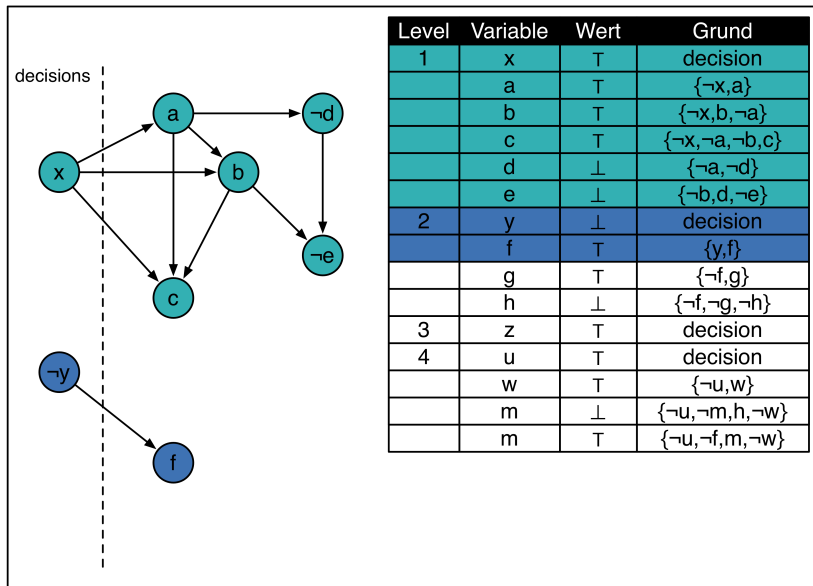


Aufbau des Implikationsgraphen

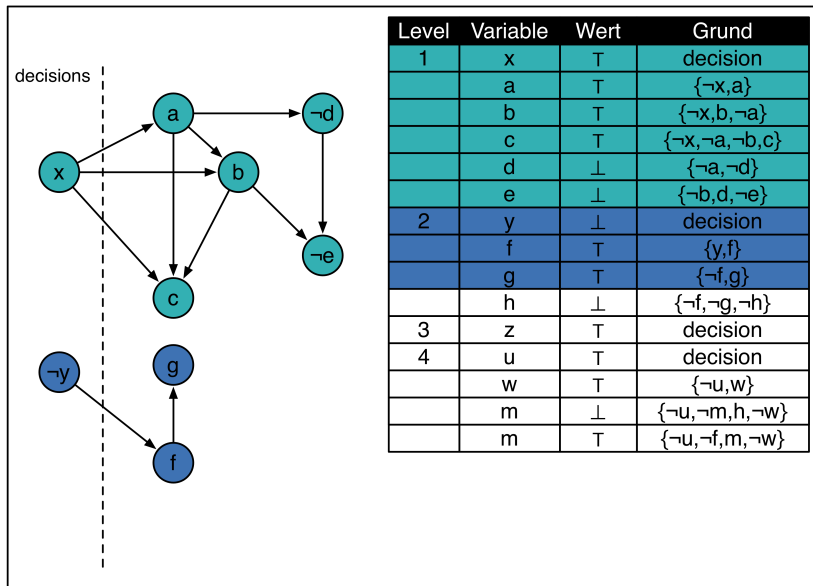


Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	\perp	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	\perp	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	\perp	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	\perp	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
3	z	T	decision
4	u	T	decision
	w	T	$\{\neg u, w\}$
	m	\perp	$\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
	m	T	$\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$

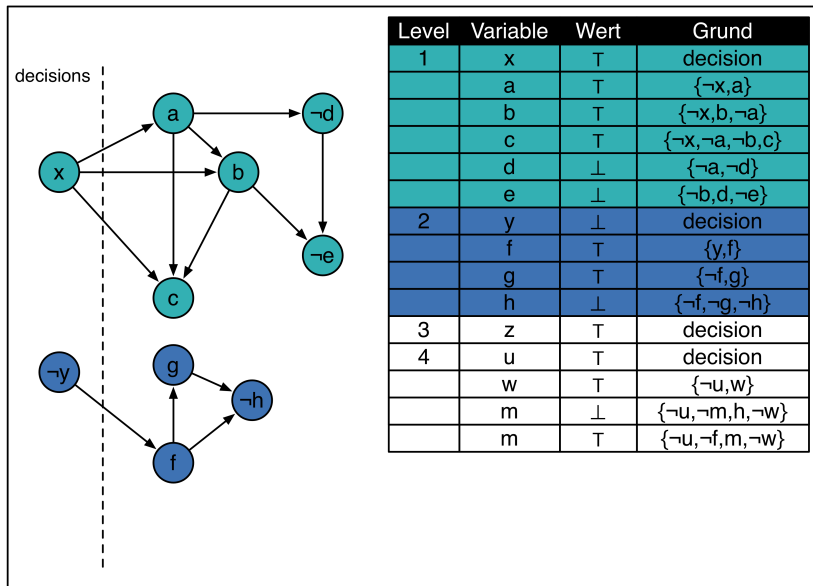
Aufbau des Implikationsgraphen



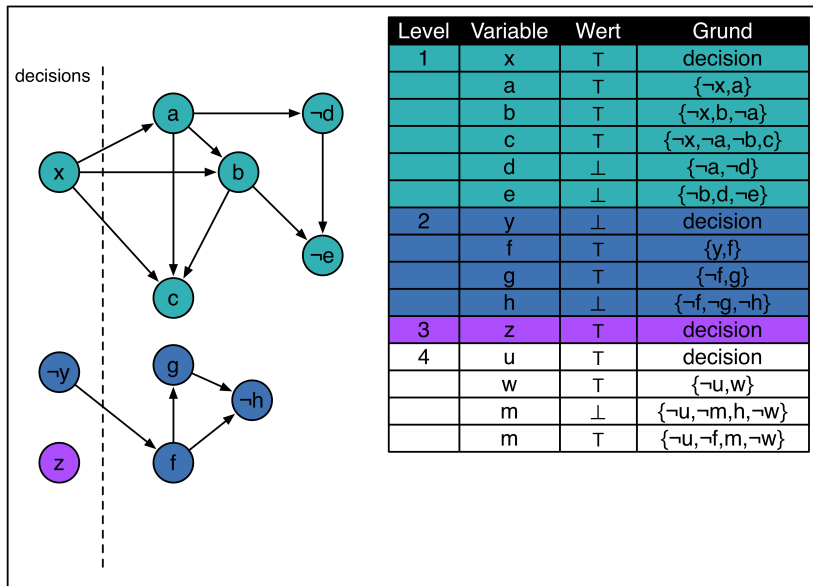
Aufbau des Implikationsgraphen



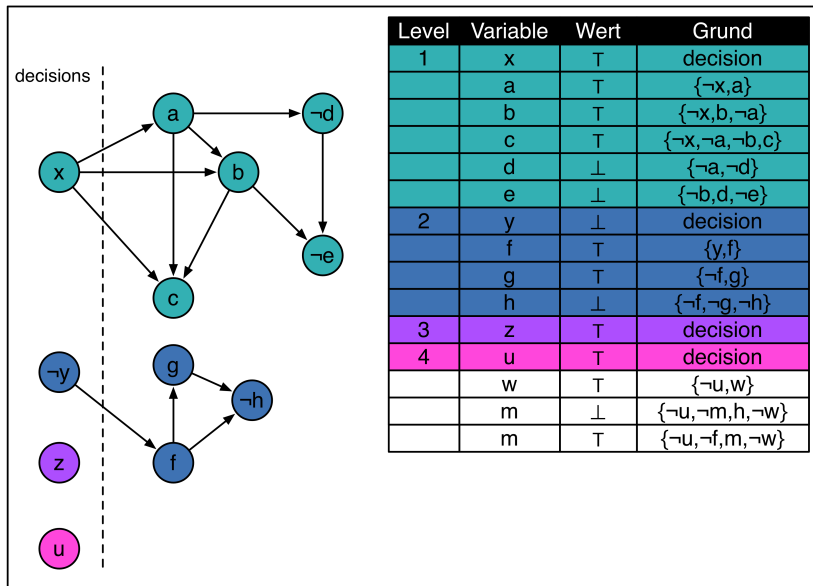
Aufbau des Implikationsgraphen



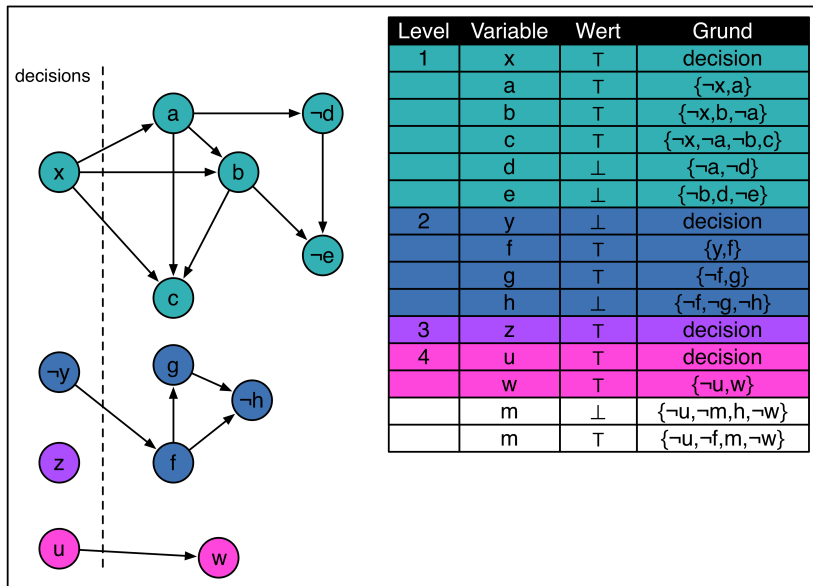
Aufbau des Implikationsgraphen



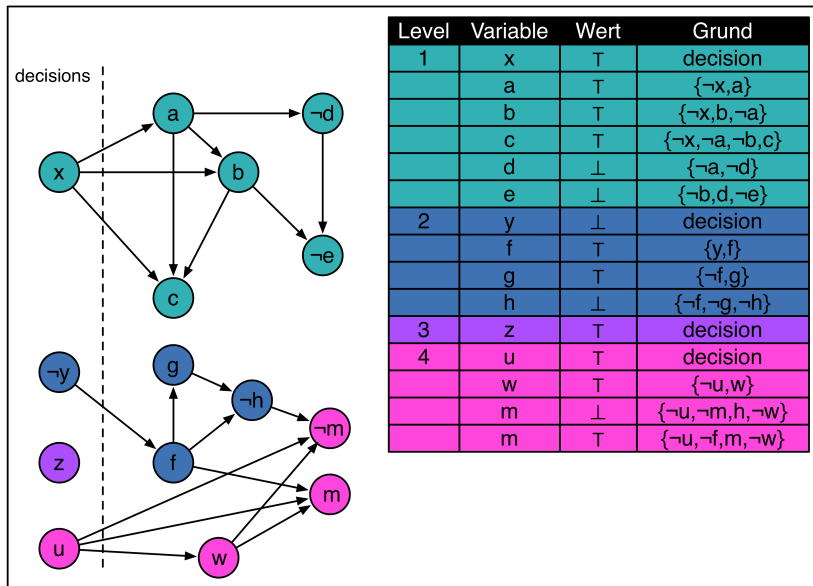
Aufbau des Implikationsgraphen



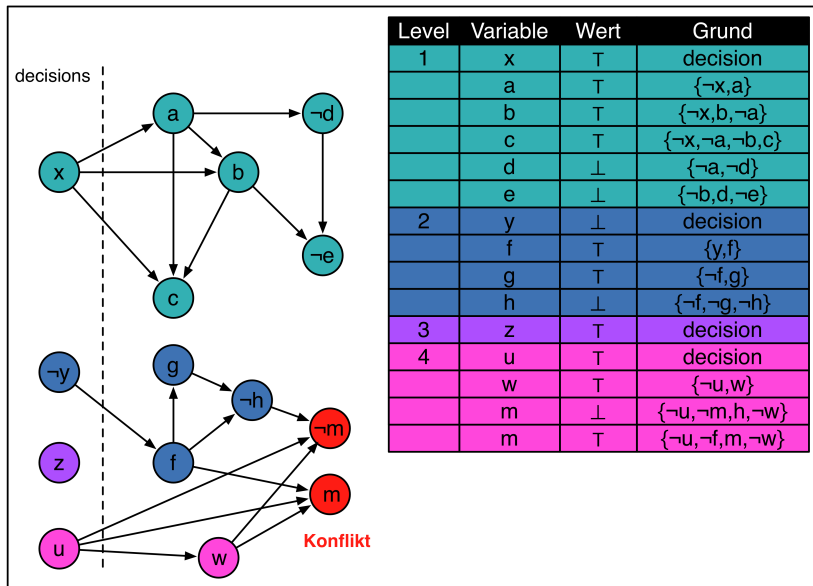
Aufbau des Implikationsgraphen



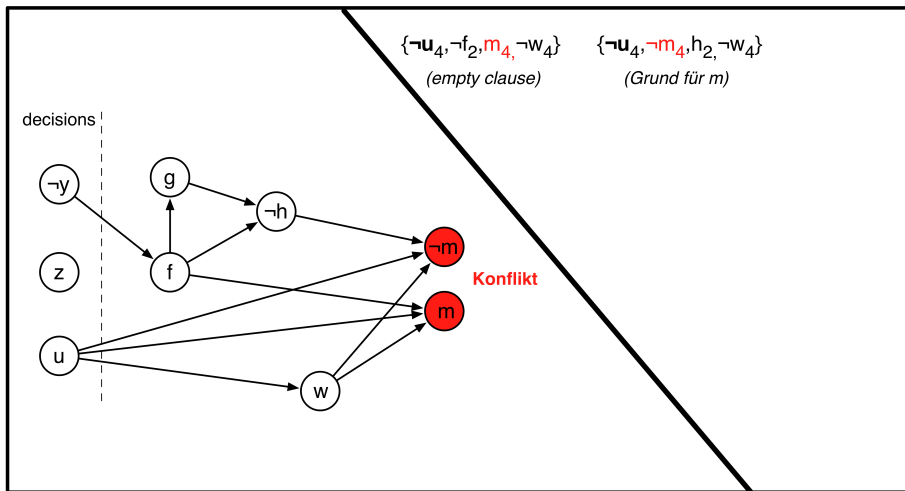
Aufbau des Implikationsgraphen



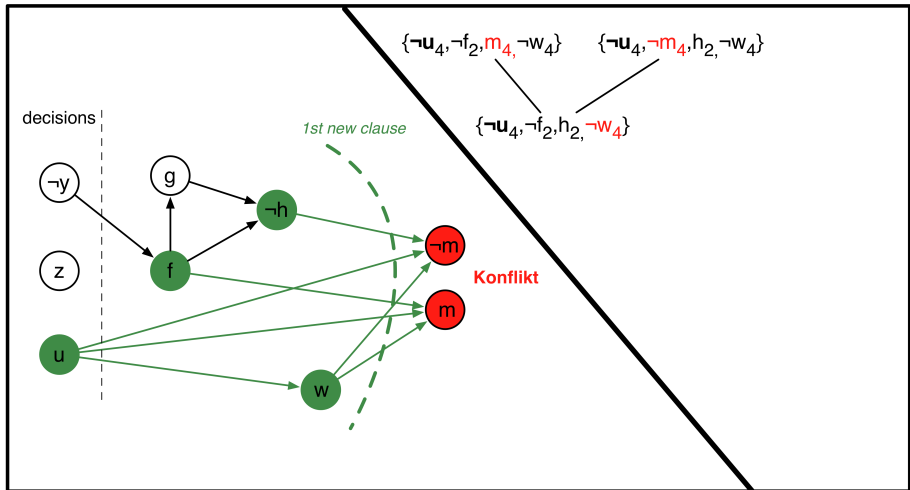
Aufbau des Implikationsgraphen



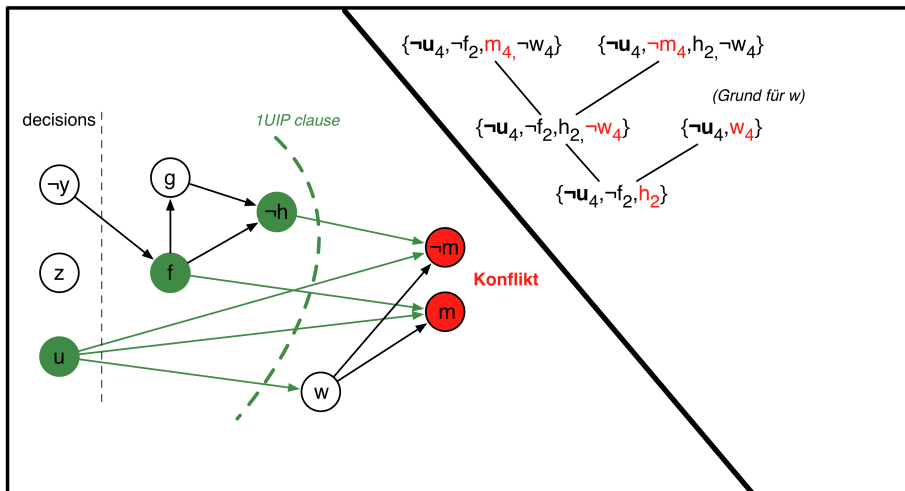
Zusammenhang zwischen Resolution und dem Implikationsgraphen



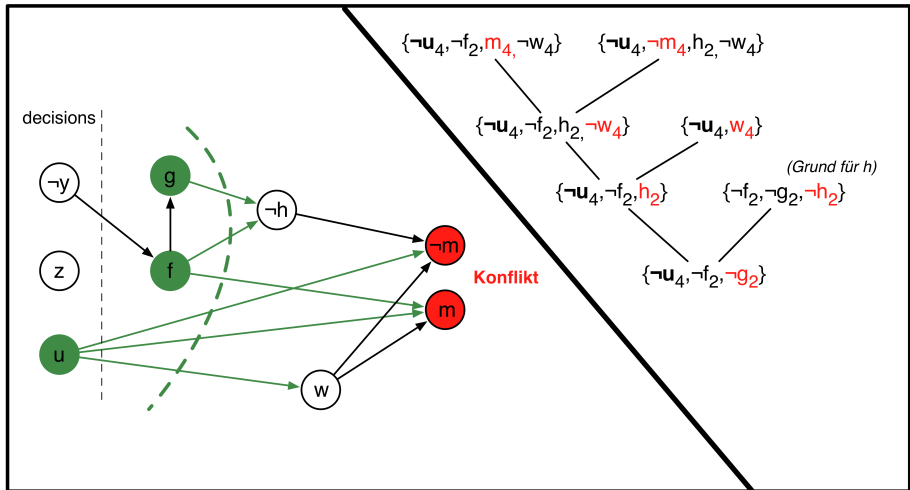
Zusammenhang zwischen Resolution und dem Implikationsgraphen



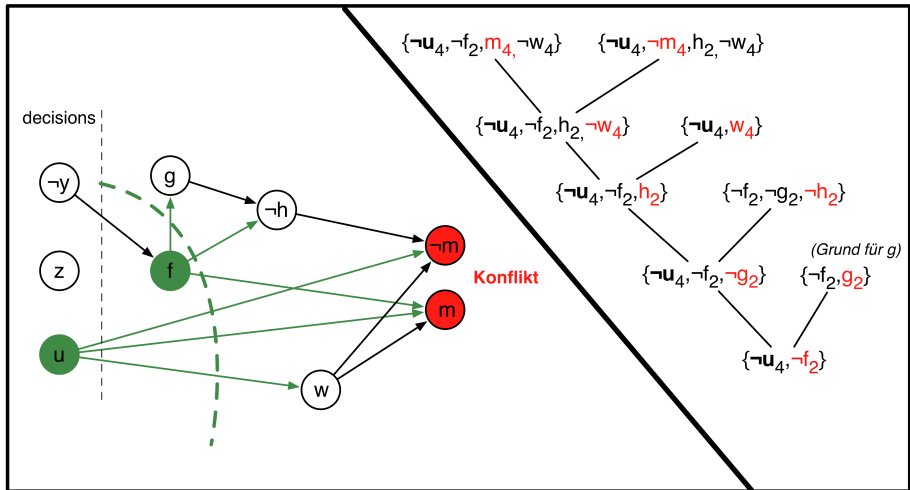
Zusammenhang zwischen Resolution und dem Implikationsgraphen



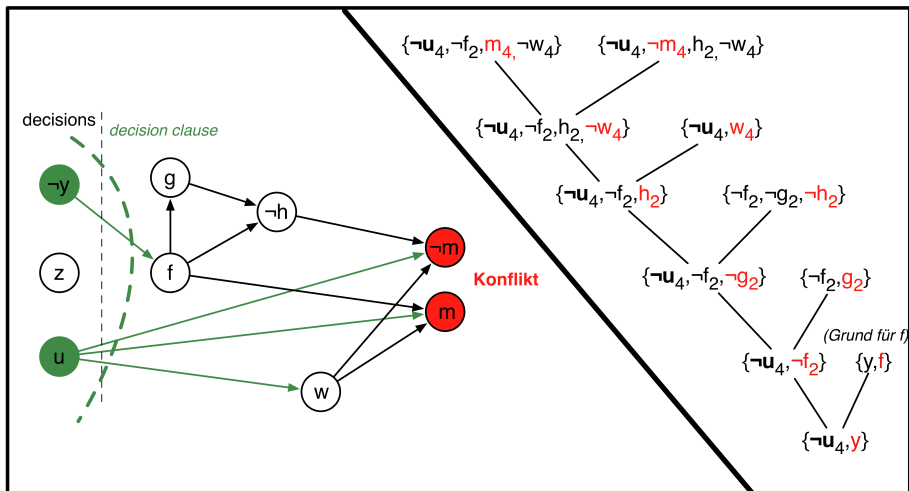
Zusammenhang zwischen Resolution und dem Implikationsgraphen



Zusammenhang zwischen Resolution und dem Implikationsgraphen



Zusammenhang zwischen Resolution und dem Implikationsgraphen



Welche neuen Klauseln kann man lernen

Abhängig davon, wie lange man Resolution betreibt bzw. wo man den Implikationsgraphen schneidet:

- **Decision clause**
 - enthält nur decision variables
- **First new cut clause**
 - enthält auf der einen Seite nur die beiden Konfliktvariablen
- **1UIP clause (Unique implication point)**
 - In der neuen Klausel ist genau eine Variable auf höchstem decision level
 - Diese Klausel wird nach backtracking unit
 - Wird von den meisten Solvern verwendet

Wie wird die neue Klausel eingesetzt?

- Hinzufügen der neuen Klausel zur Klauselmenge
- Backtracking zu höchstem level der neuen Klausel, das $<$ als der aktuelle decision level ist
 - Im Beispiel war Konflikt auf level 4
 - 1UIP: $\{\neg u_4, \neg f_2, h_2\}$
 - d.h. backtracking zu level 2
- Unit propagation (Bei 1UIP ist die neue Klausel dann unit und mindestens eine UP wird ausgeführt)

Auflösung des Beispiels mit der 1UIP clause

$\{\neg u, w\}$
 $\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
 $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$
 $\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
 $\{y, f\}$
 $\{\neg f, g\}$

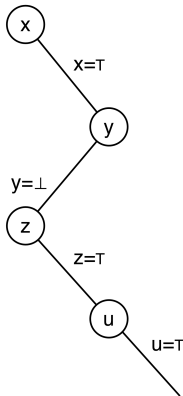
⋮

$\{\neg x, a\}$
 $\{\neg x, b, \neg a\}$
 $\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
 $\{\neg a, \neg d\}$
 $\{\neg b, d, \neg e\}$

⋮

$\{\neg u, \neg f, h\}$ (Neue Klausel)

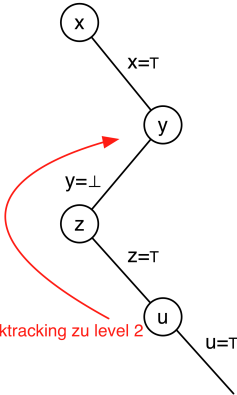
Konflikt: $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$



Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	⊥	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	⊥	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	⊥	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	⊥	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
3	z	T	decision
4	u	T	decision
	w	T	$\{\neg u, w\}$
	m	⊥	$\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$

Auflösung des Beispiels mit der 1UIP clause

$\{\neg u, w\}$
 $\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
 $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$
 $\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
 $\{y, f\}$
 $\{\neg f, g\}$



Backtracking zu level 2

$\{\neg u, \neg f, h\}$ (Neue Klausel)

Konflikt: $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$

Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	⊥	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	⊥	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	⊥	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	⊥	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
3	z	T	decision
4	u	T	decision
	w	T	$\{\neg u, w\}$
	m	⊥	$\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$

Auflösung des Beispiels mit der 1UIP clause

$\{\neg u, w\}$
 $\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
 $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$
 $\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
 $\{y, f\}$
 $\{\neg f, g\}$

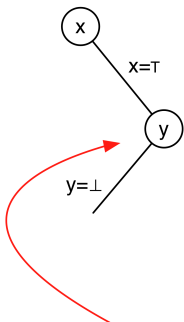
⋮

$\{\neg x, a\}$
 $\{\neg x, b, \neg a\}$
 $\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
 $\{\neg a, \neg d\}$
 $\{\neg b, d, \neg e\}$

Backtracking zu level 2

⋮

$\{\neg u, \neg f, h\}$ (Neue Klausel)



Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	⊥	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	⊥	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	⊥	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	⊥	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$

Auflösung des Beispiels mit der 1UIP clause

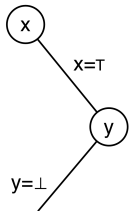
$\{\neg u, w\}$
 $\{\neg u, \neg m, h, \neg w\}$
 $\{\neg u, \neg f, m, \neg w\}$
 $\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
 $\{y, f\}$
 $\{\neg f, g\}$

⋮

$\{\neg x, a\}$
 $\{\neg x, b, \neg a\}$
 $\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
 $\{\neg a, \neg d\}$
 $\{\neg b, d, \neg e\}$

⋮

$\{\neg u, \neg f, h\}$ (Neue Klausel)



Level	Variable	Wert	Grund
1	x	T	decision
	a	T	$\{\neg x, a\}$
	b	T	$\{\neg x, b, \neg a\}$
	c	T	$\{\neg x, \neg a, \neg b, c\}$
	d	⊥	$\{\neg a, \neg d\}$
	e	⊥	$\{\neg b, d, \neg e\}$
2	y	⊥	decision
	f	T	$\{y, f\}$
	g	T	$\{\neg f, g\}$
	h	⊥	$\{\neg f, \neg g, \neg h\}$
	u	⊥	$\{\neg u, \neg f, h\}$

Nach UP von u sind alle gegebenen Klauseln erfüllt