

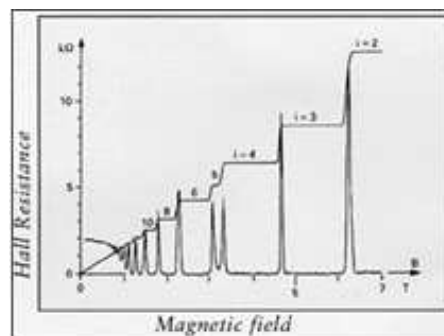
Der Quanten Hall Effekt im F-Praktikum - Überblick

Die klassische Hall-Messung ist eine Standardmethode zur Charakterisierung von zweidimensionalen und dreidimensionalen Elektronensystemen. Ihren Namen erhielt sie von E.H. Hall, der im Jahre 1879 den Hall-Effekt entdeckte.

Im Gegensatz zum klassischen Hall-Effekt, bei dem der Hallwiderstand an den Rändern der Probe linear mit dem Magnetfeld ansteigt, beobachtet man beim Quanten Hall Effekt einen stufenförmigen Anstieg. Die Messungen werden bei tiefen Temperaturen und starken Magnetfeldern durchgeführt, damit die Zustandsdichte im zweidimensionalen Elektronengas quantisiert ist (Landauniveaus). Die Höhe der Stufen im Hallwiderstand beträgt $\frac{h}{ze^2}$, wobei die natürlichen Zahlen z mit den quantisierten Elektronenbahnen in der Ebene übereinstimmen. Gleichzeitig oszilliert der Längswiderstand.

Da sich damit das Verhältnis zweier Naturkonstanten sehr genau bestimmen lässt, ist der Quanten Hall Effekt sehr wichtig für die Messtechnologie. K. von Klitzing erhielt für seine 1980 gemachte Entdeckung fünf Jahre später den Nobelpreis:

<<http://www.nobel.se/physics/laureates/1985/>>.



1998 wurde ein weiterer Nobelpreis vergeben, dieses Mal für die Entdeckung und Deutung des Fractional Quanten Hall Effekts. Mehr hierzu und zur Geschichte des Hall-Effekts unter <<http://www.nobel.se/physics/educational/poster/1998/>>.

Das Ziel unseres Praktikumsversuchs ist es, einen Einblick in das äußerst vielfältige Gebiet der Tieftemperatur-Festkörperphysik, und hier insbesondere des Magneto-transport, zu geben.

Im ersten Versuchsteil soll ein Glaskryostat mit flüssigem Stickstoff und flüssigem Helium gefüllt und auf eine Temperatur von 4,2 K gekühlt werden. Darin wird nun eine geeignete Hall-Probe eingebaut und vermessen.

Dies geschieht in dem folgenden messtechnischen Teil, in dem bei Magnetfeldern im Bereich von 0 bis 7 Tesla der Längs- und Querwiderstand der Probe zu bestimmen sind. Da die Messungen bei sehr kleinen Spannungen und Strömen stattfinden (μV bzw. nA), findet hierbei das Lock-in Verfahren Anwendung. Aus den Messungen lassen sich die Elektronendichte und Elektronenbeweglichkeit sowie weitere Kenngrößen des zweidimensionalen Elektronengases berechnen.

Quanten Hall Effekt

F-Praktikum, Versuchsanleitung

1 Einleitung

Bereits 1879 untersuchte E. H. Hall den Einfluss eines Magnetfelds auf die Ladungsträger in einem Festkörper [3]. Seine damalige Vermutung, dass sich die Ladungsträger durch die Lorentzkraft an einer Seite der Probe verdichten würden, was zu einer Erhöhung des Probenwiderstands führen sollte, wurde experimentell allerdings nicht bestätigt. Dieses für ihn unerwartete Ergebnis versuchte er mit dem Aufbau einer inneren Spannung, die der Lorentzkraft entgegen wirkt, zu erklären. Sie wurde in seinen Messungen als transversale Spannung beobachtet und trägt heutzutage den Namen „Hallspannung“. Die traditionelle Anordnung zur Bestimmung der Hallspannung wird in Abbildung 1 dargestellt.

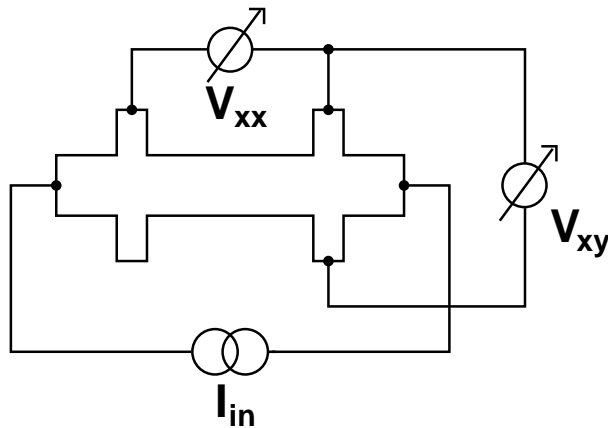


Abbildung 1: Schematische Darstellung der Messanordnung zur Untersuchung des Hall-Effekts.

Ein entlang der x -Richtung angelegtes elektrisches Feld beschleunigt die Ladungsträger in x -Richtung und resultiert in einer Stromdichte j_x . Zusätzlich erfahren die Ladungsträger die Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1)$$

Unter der Annahme eines in z -Richtung angelegten Magnetfelds erfahren die Ladungsträger eine Ablenkung in y -Richtung, der allerdings durch den Aufbau eines in y -Richtung ausgerichteten elektrischen Feldes entgegen gewirkt wird. Im Gleichgewicht gleicht dieses transversale Feld die Lorentzkraft exakt aus.

Das Verhältnis von der elektrischen Feldstärke zur Stromdichte in der x -Richtung wird als Magnetowiderstand definiert:

$$\rho(B) = \frac{E_x}{j_x} \quad (2)$$

Dieser ist im Allgemeinen sehr wohl von der magnetischen Feldstärke abhängig. Der verschwindende Magnetowiderstand bei den Messungen von Hall gilt lediglich für sehr kleine Felder. Die zweite Größe, die von Interesse ist, ist der Hallkoeffizient selbst:

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B}. \quad (3)$$

Da im Gleichgewicht das transversale elektrische Feld die Lorentzkraft ausgleicht, wird ein konstanter Hallkoeffizient erwartet. Das Vorzeichen des Koeffizienten spiegelt die Richtung der Lorentzkraft und somit das Vorzeichen der Ladungsträger wieder. Auch bei den frühen Messungen wurden bei manchen Metallen unerwarteterweise positive Vorzeichen für den Hallkoeffizienten beobachtet, die erst später im Rahmen der Bandstruktur eines Metalls vollständig geklärt werden konnten.

Im Rahmen des Drude-Modells wird angenommen, dass die Ladungsträger durch das elektrische Feld stets beschleunigt werden, aber mit einer charakteristischen Zeit, der sogenannten mittleren Relaxationszeit τ , ihren gewonnenen Impuls verlieren. Daraus folgt, dass die mittlere Stromdichte direkt proportional zum elektrischen Feld ist:

$$\vec{j} = \sigma_o \vec{E} \quad \text{mit} \quad \sigma_o = \frac{ne^2\tau}{m}. \quad (4)$$

Die Proportionalitätskonstante σ_o ist die sogenannte Drude oder Boltzmann Leitfähigkeit, die sowohl von der Ladungsträgerdichte als auch von der Streuzeit abhängt. Um den Einfluss eines magnetischen Felds auf den Magnetowiderstand, sowie auf den Hallkoeffizienten zu berechnen, ist folgende Differentialgleichung zu lösen:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \left(\vec{E} + \frac{\vec{p}}{m} \times \vec{B} \right) - \frac{\vec{p}}{\tau}; \quad (5)$$

Hierbei wurden die elektrischen und magnetischen Kräfte berücksichtigt, und die Wirkung der Streuung durch den Reibungsterm eingebaut. Im Gleichgewicht erwarten wir, dass der Strom zeitunabhängig ist, und dass die Impulskomponenten p_x und p_y folgenden Gleichungen genügen:

$$0 = -eE_x - \omega_c p_y - \frac{p_x}{\tau}, \quad 0 = -eE_y + \omega_c p_x - \frac{p_y}{\tau}. \quad (6)$$

Hier haben wir die sogenannte Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/m$ eingeführt, die eine wesentliche Rolle bei der Betrachtung des Halleffekts einnimmt. Durch Multiplikation mit $-ne\tau/m$ lassen sich die obigen Gleichungen umwandeln:

$$\sigma_o E_x = \omega_c \tau j_y + j_x, \quad \sigma_o E_y = -\omega_c \tau j_x + j_y. \quad (7)$$

Unter der Gleichgewichtsannahme $j_y = 0$ bekommen wir wie zuvor das erwartete „ohmsche“ Verhalten in x -Richtung und für den Hallkoeffizient ergibt sich:

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} = -\frac{1}{ne}. \quad (8)$$

Der Hallkoeffizient hängt damit lediglich mit der Ladungsträgerdichte der Probe zusammen und dürfte somit direkt mit der Dichte, die sich aus der Anzahl der vorhandenen Valenzelektronen ergibt, vergleichbar sein. Experimentell ist diese Vorhersage allerdings nur bei sehr reinen Metallen und bei sehr tiefen Temperaturen annähernd gültig, und eine vollständige Erklärung des „semiklassischen“ Hall-Effekts muss die Bandstruktur des Materials berücksichtigen (Siehe beispielsweise Kapitel 12 & 13 in: Ashcroft & Mermin [4]).

2 Landauquantisierung

In einem starken Magnetfeld sind die Eigenzustände eines freien Elektronengases durch die Bildung von sogenannten Landauzuständen stark modifiziert. Die Wirkung des Magnetfelds wird durch die Einführung eines zusätzlichen Beitrags zum Impulsoperator in der Schrödinger-Gleichung beschrieben:

$$H\Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\vec{\nabla} - \frac{e\vec{A}}{i\hbar} \right)^2 \right] \Psi = \varepsilon\Psi. \quad (9)$$

Das magnetische Vektorpotential \vec{A} muss selbstverständlich so gewählt werden, dass das Magnetfeld der Anordnung durch $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ gegeben ist. Wie zuvor betrachten wir den Fall eines in z -Richtung angelegten externen Magnetfelds, nutzen die Landau Eichung $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ und bekommen somit:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{eBx}{i\hbar} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{eBx}{\hbar} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi = \varepsilon\Psi. \quad (10)$$

In dieser Eichung ist die Bewegung sowohl in z -Richtung als auch in y -Richtung durch die einer ebenen Welle darzustellen. Als Ansatz für die Eigenfunktion setzen wir daher

$$\Psi(x, y, z) = \exp(-ik_y y) \exp(-ik_z z) \psi(x) \quad (11)$$

ein. Unsere Schrödinger-Gleichung lautet nun:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{eBk_y x}{\hbar} - k_y^2 - k_z^2 - \left(\frac{eBx}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = \varepsilon\psi. \quad (12)$$

Wie auch klassisch erwartet, ist die Bewegung in Richtung des Magnetfelds ungestört und die ebene Welle in dieser Richtung stellt lediglich die quadratische Dispersion eines freien Teilchens dar. Die Bewegung in y -Richtung dagegen ist durch das Magnetfeld an die Bewegung in x -Richtung gekoppelt. Durch Einsetzen von $\omega_c = eB/m$ und mit der Substitution $x_o = \hbar k_y / eB$ lässt sich obige Gleichung umformen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m}{2} \omega_c^2 (x - x_o)^2 \psi = \left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right) \psi. \quad (13)$$

Die Lösungen dieser uns bereits bekannten einfachen Gleichung sind die sogenannten Hermite-Polynome, die mit einer harmonischen Bewegung in der x -Richtung zu deuten sind. Somit ergibt sich für die Eigenenergien der Schrödinger-Gleichung:

$$\varepsilon_{n,k_z} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}, \quad (14)$$

und für die dazugehörigen Eigenzustände (nur die x -Abhängigkeit):

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega_c}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-m\omega_c(x-x_o)^2/2\hbar\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}(x-x_o)\right). \quad (15)$$

Die Bedeutung der Landauzustände wird allerdings erst durch die Betrachtung der Entartung des jeweiligen Zustands richtig klar. Die Boltzmann-Leitfähigkeit σ_o lässt sich leicht umschreiben durch die Einführung der Zustandsdichte an der Fermi-Energie eines freien Elektronengases. Unabhängig von der Dimensionalität einer Probe kann man die Ladungsträgerdichte mit dem Fermi-Wellenvektor verknüpfen:

$$n = \frac{k_F^d}{d\pi^{d-1}}, \quad (16)$$

wobei d die Dimensionalität der Probe ist. Die Zustandsdichte gewinnt man anschließend durch Ableiten nach der Energie $N(\varepsilon) = dn/d\varepsilon$, und die Leitfähigkeit kann man nun folgendermaßen schreiben:

$$\sigma_o = N(\varepsilon_F)e^2D \quad \text{mit} \quad D = \frac{v_F^2\tau}{d} \quad (17)$$

wobei D die Einstein-Diffusionskonstante des Systems darstellt. In dieser Schreibweise wird die Bedeutung der Zustände unmittelbar an der Fermi-Energie ersichtlich. Für die Leitfähigkeit sind die Anzahl der vorhandenen Zustände in der Nähe der Fermi-Energie sowie die Fähigkeit der Ladungsträger zu diffundieren die zwei entscheidenden Größen. In diesem Zusammenhang ist die Wirkung eines Magnetfeldes besonders interessant. In Richtung des Magnetfelds kommt es, wie gezeigt, zu keiner Änderung der freien Bewegung. In der Ebene senkrecht zum Magnetfeld sind die quantenmechanischen Zustände lediglich durch die Quantenzahl n und die sogenannte Zentrumsordinate $x_o(k_y)$ definiert. Unter der Annahme periodischer Randbedingungen in y -Richtung sowie einer Zentrumsordinate, die das Hermite-Polynom in der Probe lokalisiert, können wir zeigen, dass die Anzahl der Zustände pro Landauzustand durch:

$$n_L = \frac{eB}{2\pi\hbar} \quad (18)$$

gegeben ist. Anschaulicherweise ist diese Anzahl gleich der Anzahl der Zyklotronbahnen, die in die Probenebene senkrecht zum Magnetfeld hineinpassen. Die elektronischen Zustände werden bis zur Fermi-Energie besetzt; aufgrund der Dispersion in z -Richtung sind daher in dreidimensionalen Proben üblicherweise an der Fermifläche mehrere Landauzustände besetzt. Die eindimensionale Zustandsdichte, die mit dieser Bewegung verknüpft ist, liefert eine $\varepsilon^{-1/2}$ -Energieabhängigkeit, die durch eine Divergenz bei $k_z = 0$ charakterisiert ist. Mit zunehmender Magnetfeldstärke werden die besetzten Landauzustände nacheinander entvölkert. Die $1/B$ -Abhängigkeit der Anzahl der besetzten Landauzustände spiegelt sich in fast jeder messbaren Größe wider. Beispielsweise werden $1/B$ -periodische Oszillationen der Magnetisierung einer Probe (de Haas-van Alphen Oszillationen) sowie die wichtigen $1/B$ -periodischen Widerstandsoszillationen (Shubnikov-de Haas Oszillationen) häufig bei tiefen Temperaturen beobachtet. Selbstverständlich können solche Oszillationen nur dann beobachtet werden, wenn der Abstand zwischen Landauzuständen $\hbar\omega_c$ größer als die thermische Energie $k_B T$ und die Lebensdauererweiterung \hbar/τ ist.

3 Quanten Hall Effekt

Aus Gleichungen 14 und 18 sehen wir, dass sowohl der Abstand zwischen Landauzuständen (für $k_z = 0$) als auch die Entartung jedes Zustandes linear mit der Magnetfeldstärke skaliert. Der Quotient der beiden Größen ist deswegen unabhängig vom Magnetfeld und durch $m/2\pi\hbar^2$ gegeben. Diese konstante, energieunabhängige Zustandsdichte ist charakteristisch für zweidimensionale Systeme (siehe Abbildung 2).

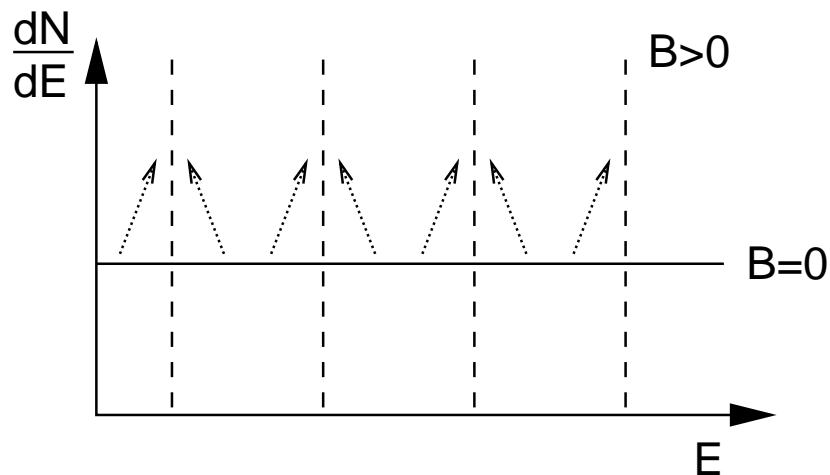


Abbildung 2: Die Zustandsdichte eines 2dim Systems mit und ohne Magnetfeld.

Auch hier werden die Zustände bis zur Fermienergie gefüllt, und die Anzahl der besetzten Zustände, der sogenannte Füllfaktor ν_L ist gegeben durch:

$$\nu_L = \frac{n_{2D}}{n_L}. \quad (19)$$

Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall sind allerdings in zwei Dimensionen lediglich Zustände des höchst besetzten Landauzustands an der Fermifläche vorhanden. Diese Tatsache ist entscheidend für die Beobachtung des Quanten Hall Effekts, welcher nur in zweidimensionalen Systemen vorkommt. Für einen knappen Überblick über die Physik und Eigenschaften solcher zweidimensionaler Systeme sei hier auf den Nobelpreisvortrag von Klaus von Klitzing hingewiesen (siehe Anhang).

Der Quanten Hall Effekt ist gekennzeichnet durch das gleichzeitige Auftreten von Nullstellen in ρ_{xx} und Plateaus in ρ_{xy} . Dabei gilt unabhängig von Materialsystem und Geometrie der Probe:

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{i} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

Eine Nullstelle in ρ_{xx} bedeutet experimentell, dass $\rho_{xx} \sim 10^{-10} \Omega/\square$. Dieser Flächenwiderstand ist um drei Größenordnungen kleiner als bei anderen nicht-supraleitenden Systemen. Da ferner Gleichung 20 mit einer Genauigkeit besser als 10^{-7} erfüllt ist und für die Abweichung zwischen verschiedenen Proben beim selben Plateau N gilt

$$\frac{\Delta\rho_{xy}(\nu = N)}{\rho_{xy}} \leq 5 \cdot 10^{-8}, \quad (21)$$

(siehe z.B. [8]), wurde der Quanten Hall Effekt als Widerstands-Standard eingeführt mit

$$R\left(\frac{h}{e^2}\right) = 25812.807 \Omega. \quad (22)$$

4 Randzustände

Randzustände werden die durch das Einschlusspotential modifizierten Landauzustände am geometrischen Rand der Probe genannt.

Damit können z.B. die Nullstellen in ρ_{xx} erklärt werden. Befindet sich die Fermienergie zwischen zwei Landauniveaus, existiert kein ausgedehnter Landau-Zustand an der Fermi-Energie, also stehen keine freien Energiezustände zur Verfügung, die die beiden Probenränder miteinander verbinden würden. Damit ist quasi rückstreuungsfreier Elektronentransport über die Randzustände möglich, da Zustände, die Ladung in entgegengesetzte Richtungen transportieren, komplett räumlich getrennt sind.

Die Randzustände und der Landauer-Büttiker-Formalismus zur Beschreibung des Quanten Hall Effekts werden im Kapitel 4 von [2] genauer diskutiert, dessen Lektüre als Einführung empfohlen ist.

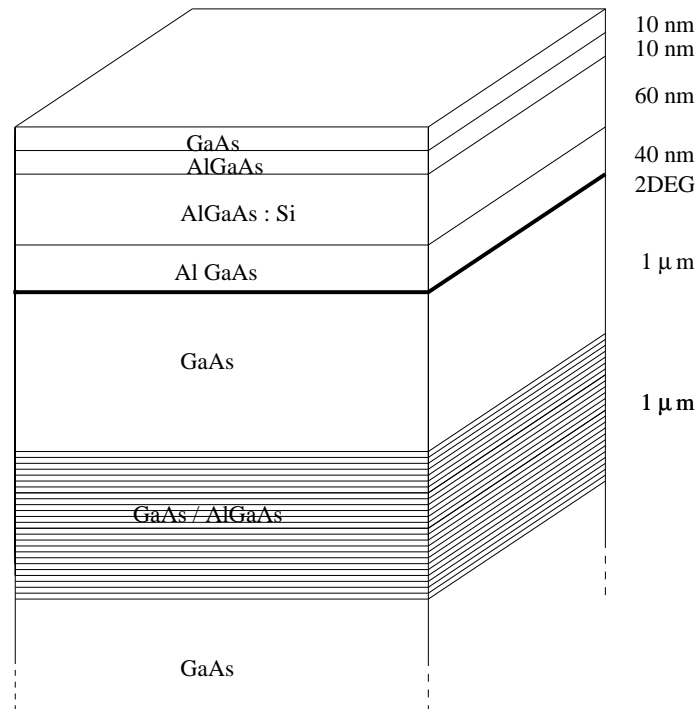
5 Verständnisfragen

- In der obigen vereinfachten Herleitung des klassischen Hall-Effekts wurde stets mit mikroskopischen Variablen, i.e. Stromdichte, Feldstärke usw. argumentiert. In einer typischen Messung werden makroskopische Spannungen angelegt und abgegriffen. Wie sind diese Größen miteinander verknüpft, und welche Rolle spielen die Abmessungen der zu untersuchenden Probe?
- Die Zyklotronfrequenz ω_c spielt offensichtlich eine wichtige Rolle für die Magnetfeldeigenschaften der Materialien. Überlegen Sie sich, welche Bedeutung die dimensionslose Größe $\omega_c \tau$ hat.
- In der obigen Herleitung der Landauquantisierung wurde als Eichung die Landau-eichung gewählt. Die daraus resultierenden Eigenzustände zeigen die Bildung der sogenannten Landauzustände im Energieraum auf einfache Weise. Was ist allerdings mit den Wellenfunktionen der Einelektronzustände? Was haben sie mit der semiklassischen Bewegung eines geladenen Teilchens im Ortsraum gemein?
- Aus der quantenmechanischen Lösung der Schrödinger-Gleichung im Magnetfeld ergibt sich eine natürliche Längenskala, gegeben durch $\sqrt{(\hbar/eB)}$. Welche Bedeutung hat sie für die Eigenlösungen?
- Überzeugen Sie sich selbst, dass die Umwandlung der Boltzmann-Leitfähigkeit (siehe Gleichung 17) korrekt ist. Warum erscheint die Dimensionalität im Nenner der Einstein-Diffusionskonstante?
- Leiten Sie das Ergebnis aus Gleichung 18 her. Siehe hierzu beispielsweise [5, 6]. Welche Einheiten hat diese „Zustandsdichte“, und was ist mit der Spin-Entartung der Ladungsträger passiert?

Probenherstellung aus GaAs/AlGaAs-Substrat

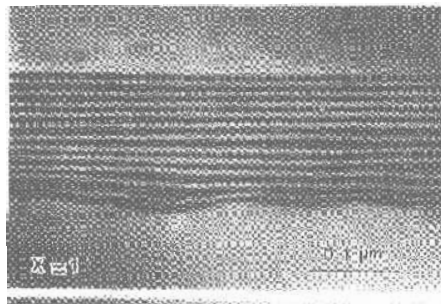
Ausgangsmaterial (Substrat) für die Probe: GaAs/AlGaAs-Heterostruktur

Herstellungsmethode: Molecular Beam Epitaxie (MBE) = Molekularstrahlepitaxie



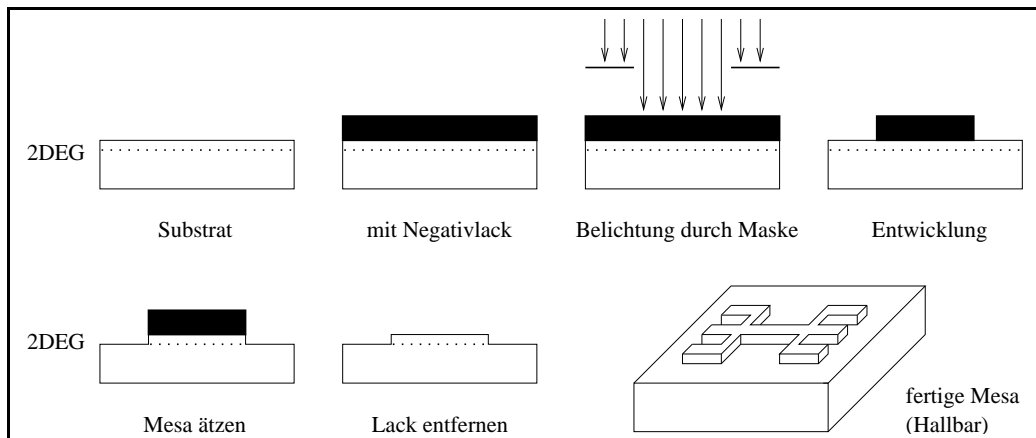
Schichtenfolge der GaAs/AlGaAs-Heterostruktur, von unten:

- GaAs-Substrat als Ausgangsmaterial
- GaAs/AlGaAs-Superlatticebuffer: Dünne Schichten im Wechsel ebenen die Oberfläche
- GaAs mit nahezu atomar ebener Oberfläche
- An der Grenzschicht zwischen GaAs und AlGaAs: zweidimensionales Elektronengas
- AlGaAs als Abstandhalter zum dotierten Material minimiert Elektronenstreuung
- Si-dotiertes AlGaAs als Elektronenspender
- Deckschicht AlGaAs
- Deckschicht aus GaAs vermeidet Oxidation

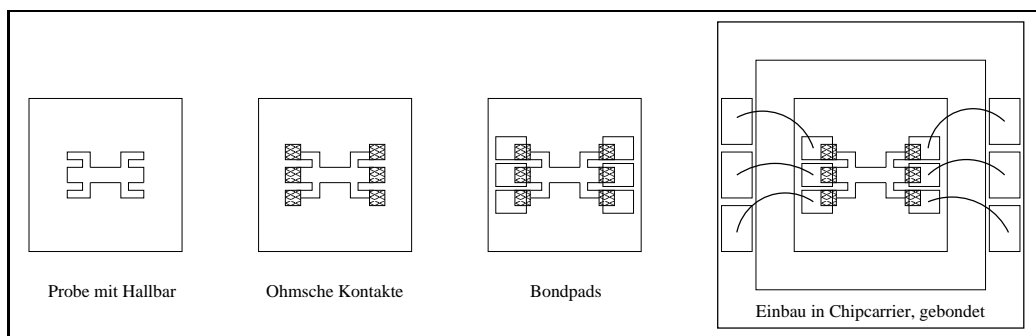


GaAs/AlGaAs-Superlattice: Ebnung der Oberfläche [7]

Zur Messung der longitudinalen und der Hall-Spannung wird aus diesem Substrat eine Hallbar (Mesa) herausgeätzt. Dies geschieht mittels optischer Lithographie. Die Oberfläche des Substrats wird belackt. Beim Belichten wird die Mesastruktur durch eine Maske in den Lack übertragen. Nach dem Entwickeln ist nur noch das gewünschte Muster mit Lack bedeckt, die restliche Oberfläche liegt frei. Jetzt wird die Probe in eine Ätzlösung getaucht, in der das Substratmaterial bis etwa in die Tiefe des 2dim Elektronengases weggeätzt wird. In diesem Bereich sind keine freien Ladungsträger mehr unter der Oberfläche vorhanden. Die lackgeschützte Mesa bleibt stehen. In ihr ist das 2dim Elektronengas unverändert erhalten, in ca. 100 nm Tiefe, parallel zur Oberfläche. Zuletzt wird der Restlack mit einem Lösungsmittel entfernt. Das Elektronengas, das auf die Hallbar eingeschränkt ist, fungiert als 2dim Leiterbahnen für die freien Elektronen.



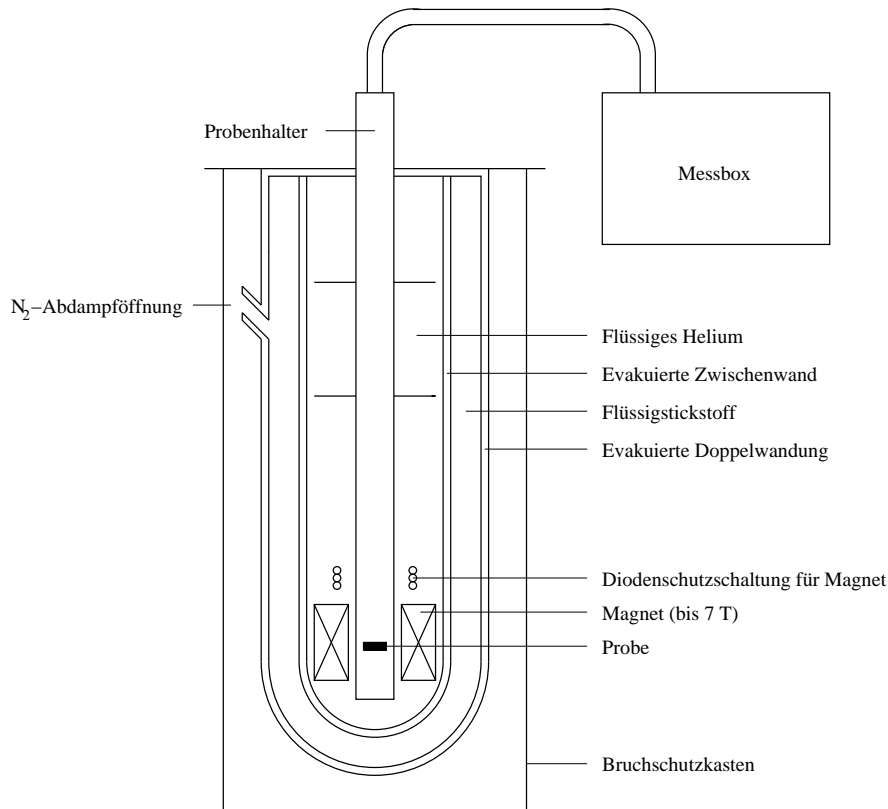
Zur Kontaktierung des 2dim Elektronengases werden in optischer Lithographie metallische Kontaktflächen aufgebracht. Da diese sich ca. 100 nm über den freien Elektronen befinden, besteht eine Schottky-Barriere an der Oberfläche. Dies vermeidet man durch Einlegieren. Man erhitzt die Probe auf über 400 °C, wodurch Metallatome in das Substrat eindiffundieren und Kontakte mit ohmscher Kennlinie entstehen.



Auf den Kontaktflächen werden nun weitere größere metallische Rechtecke aufgebracht, sogenannte Bondpads. Diese dienen der Kontaktierung von außen. Man befestigt die fertige Probe in einem Chipcarrier und verbindet mit einem Bonddraht die Kontakte des Carriers mit den zugehörigen Bondpads der Probe. Der Chipcarrier wird in den Sockel eines Probenstabes eingesetzt und seinerseits mit einer Messbox verkabelt. So können von der Messbox aus über den Chipcarrier definierte Ströme und Spannungen an die Hallbar angelegt und an der Probe gemessen werden.

Glaskryostat

Probe und Chipcarrier werden in den Carriersockel am Ende eines Probenhalters eingebaut. Dieser wird in den Kryostat eingeführt und auf die Temperatur von flüssigem Helium abgekühlt. Dadurch wird die thermische Verbreiterung der Energieniveaus reduziert und Quantisierungseffekte werden sichtbar.



Der Glaskryostat ist in einem Kasten mit Bruchschutzgitter aufgehängt. Seine äußerste Schicht besteht aus einer doppelwandigen evakuierten Glaskammer. Es folgt das Flüssigstickstoff-Bad, das durch eine weitere evakuierte Kammer (Strahlungsschild) von der Kammer für das flüssige Helium getrennt ist. Am Boden des Heliumbehälters befindet sich ein supraleitender Magnet mit Feldstärken bis 7 T, dann eine Diodenschutzschaltung für den Magneten. Der Probenhalter wird in die Heliumkammer eingeführt, bis sich die Probe im Zentrum des Magneten befindet. Sie ist mit einer externen Messbox verdrahtet. Die Drähte werden im Inneren des Probenhalters geführt, der evakuiert und anschließend zur Kühlung mit ca. 5 cm³ gasförmigem ⁴He gefüllt wird. Das Stickstoffbad muss eine Abdampf-Öffnung besitzen, damit sich im Kryostat kein Überdruck aufbauen kann. Das Heliumbad ist mit einer offenen Rückleitung verbunden, über die das Heliumgas zur Verflüssigungsanlage zurückgeführt wird.

Temperatur von Flüssigstickstoff: **77 K**
 Temperatur von flüssigem ⁴He: **4,2 K**

1 l LN₂ verdampft zu 700 l N₂-Gas!
 1 l LHe verdampft zu 750 l He-Gas!

Vorsicht beim Arbeiten mit Kryoflüssigkeiten:

- Kryoflüssigkeiten können verbrennungsartige Verletzungen hervorrufen, daher Augen schützen, Flüssigkeitsspritzer und Gasströme vermeiden. Vorsicht, dass keine Flüssigkeit in Handschuh- oder Schuhöffnungen gelangen kann!
- Kalte Oberflächen nur mit Handschuhen berühren: Gefahr von Anfrieren bzw. Erfrierungen!
- Bei Verdampfen der Kryoflüssigkeiten bildet sich das 700–750fache ihres Volumens an Gas. Es besteht Erstickungsgefahr, da der Luftsauerstoff schnell verdrängt wird!
- Bewahrt man Kryoflüssigkeiten in abgeschlossenen Behältern auf, baut sich schnell ein Überdruck auf: Stets einen offenen Kanal bereitstellen, sonst Explosionsgefahr!

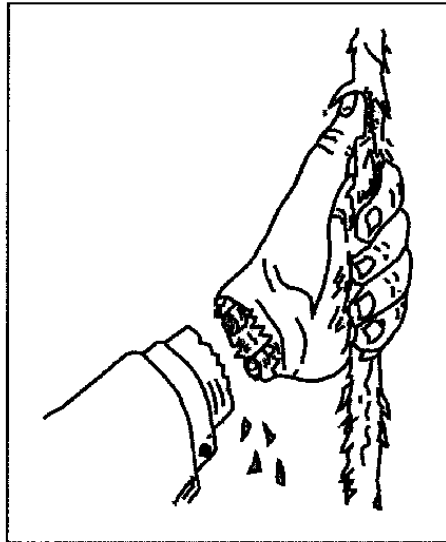
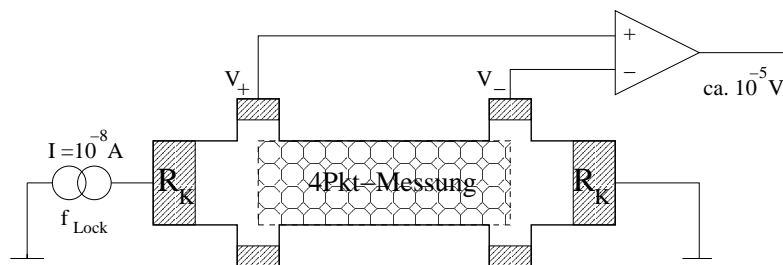


Figure 3 Flesh may freeze and stick to cold surfaces

Messtechnik: Lock-in Verfahren, Vierpunkt-Messungen

Es sollen elektrische Transportmessungen bei tiefen Temperaturen durchgeführt werden. Um den Probenwiderstand zu bestimmen, legt man einen Strom an und misst den Spannungsabfall über die Probe in Vierpunktanordnung. Legt man zu große Ströme an, heizt die Probe sich auf und das Messergebnis wird negativ beeinflusst. Daher sollte mit sehr kleinen Strömen gearbeitet werden. Dadurch sind auch die gemessenen Spannungen klein (typischerweise nA bzw. μV), das Messsignal ist nicht mehr groß gegen die Rauschamplitude und geht, auch bei Verstärkung, im Rauschen unter. Dies vermeidet man mit Hilfe des Lock-in-Verfahrens.

Vierpunktmessung



Es wird ein Strom angelegt und die zugehörige Spannung gemessen. In Zweipunkt-Anordnung würde man die Spannung an den Stromzuführungen abgreifen, wobei Kontaktwiderstände auftreten, die das Messergebnis verfälschen. Bei der Vierpunkt-Anordnung werden Strom- und Spannungsabgriffe voneinander getrennt. Dadurch sind die Spannungsabgriffe nahezu stromfrei und man misst keinen Kontaktwiderstand, sondern lediglich den Widerstand der Probe zwischen den Abgriffen.

Rauschen

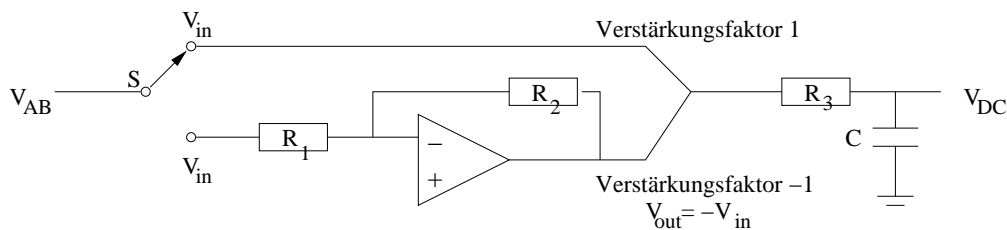
„Weißes Rauschen“: Dieses Rauschen entsteht durch die Bewegung der Ladungsträger. Es hat bei jeder Frequenz i.a. den gleichen Rauschpegel. Beispiele für weißes Rauschen sind Schrotrauschen (z.B. beim Übergang von gut leitendem in schlecht leitendes Material) oder thermisches Rauschen (*Johnson-Nyquist-Noise*). Die Amplitude des thermischen Rauschens berechnet sich zu $V_{\text{rms}} = \sqrt{4k_B T R B}$, wobei T die Temperatur, R der Widerstand und B die Bandbreite der Messung ist. B ist der Messzeit umgekehrt proportional, also sind langsame Messungen günstig, um Bandbreite und Rauschen gering zu halten.

1/f-Rauschen: Die Amplitude des $1/f$ -Rauschens (z.B. Stromrauschen) ist proportional zu $\frac{1}{f^\alpha}$, mit $\alpha \simeq 1$ bis 2. Die Rauschamplitude wächst bei niedrigen Frequenzen und führt insbesondere bei DC-Messungen zu stark verrauschten Ergebnissen.

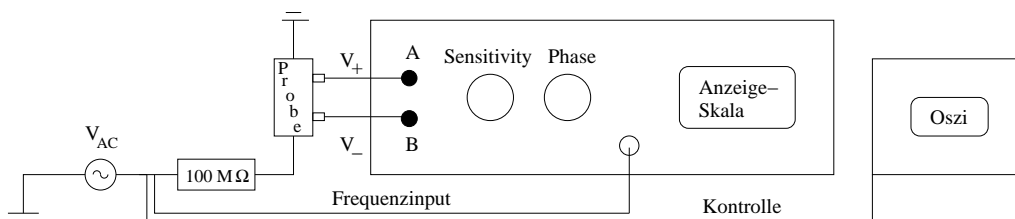
⇒ Langsam Messen (hohe Zeitkonstante) bei endlicher Frequenz (*Lock-in-Verfahren*).

Phase Lock-in Verfahren

Ein Wechselstrom wird an die Probe angelegt. Seine Frequenz gibt man dem Lock-in-Verstärker als Referenzfrequenz vor. Das zu messende Spannungssignal hat die gleiche Frequenz, so dass in der verrauschten Messung nun nach dem Anteil mit genau dieser Frequenz gesucht wird. Er wird herausgefiltert, indem der Verstärker mit doppelter Referenzfrequenz zwischen den Verstärkungsfaktoren +1 und -1 hin- und herschaltet. Dadurch wird das Messsignal gleichgerichtet und alles Rauschen bei anderen Frequenzen über einen längeren Messzeitraum hinweg herausgemittelt. So wird das Signal vom Rauschhintergrund separiert und über einen Tiefpass in eine Gleichspannung umgewandelt. Die Gleichspannung wird anschließend um einen extern einstellbaren Faktor verstärkt und als Ausgabewert angezeigt.



Lock-in Verstärker

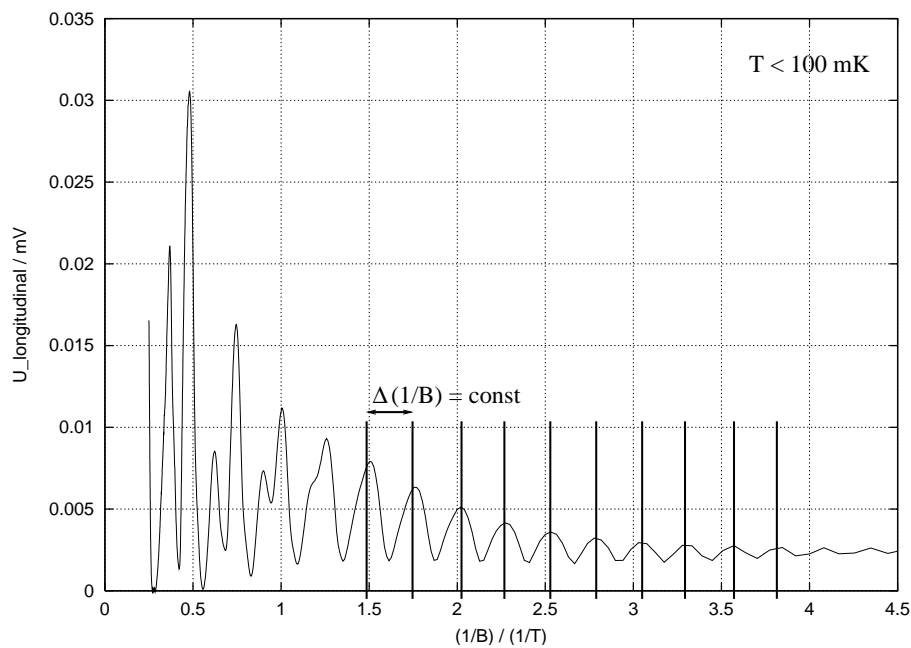
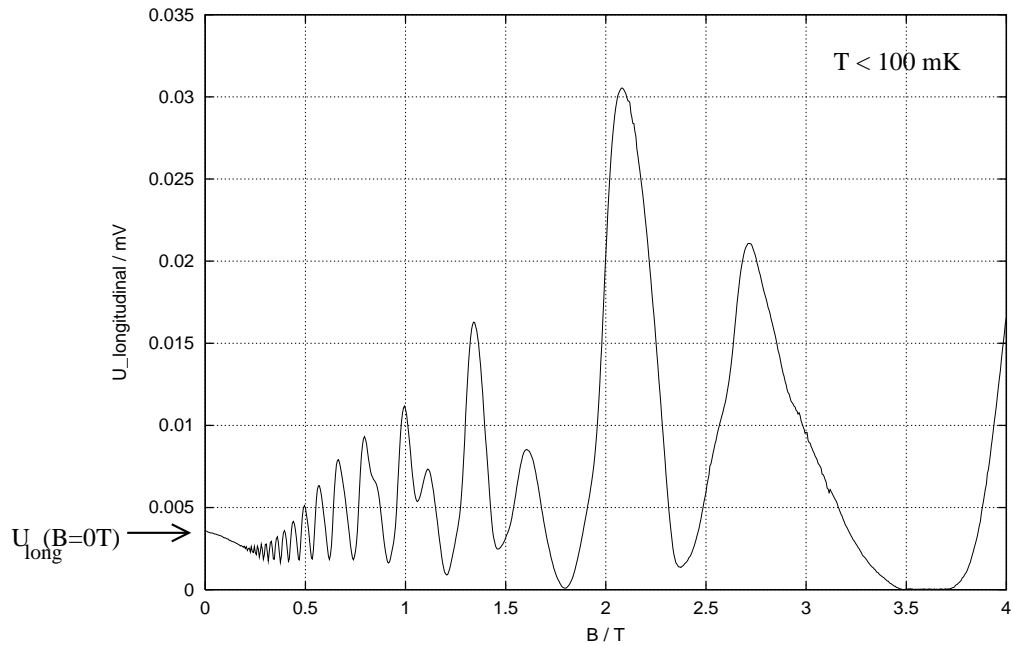


Sensitivity: Verstärkungsfaktor, Größenordnung des maximalen Signals wählen
 Reference: Extern vorgegebene Referenzfrequenz, periodische Signalform
 Phase: Phasenabgleich zur Signalmaximierung
 Skala: Anzeige der rms-Auslenkung des Signals, also gemessenes DC-Signal

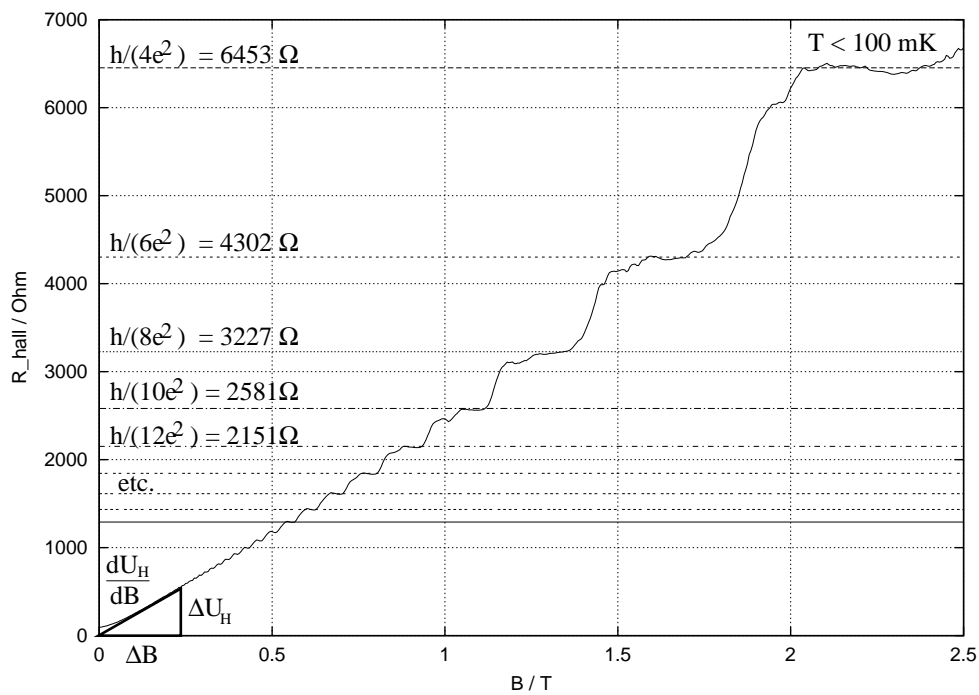
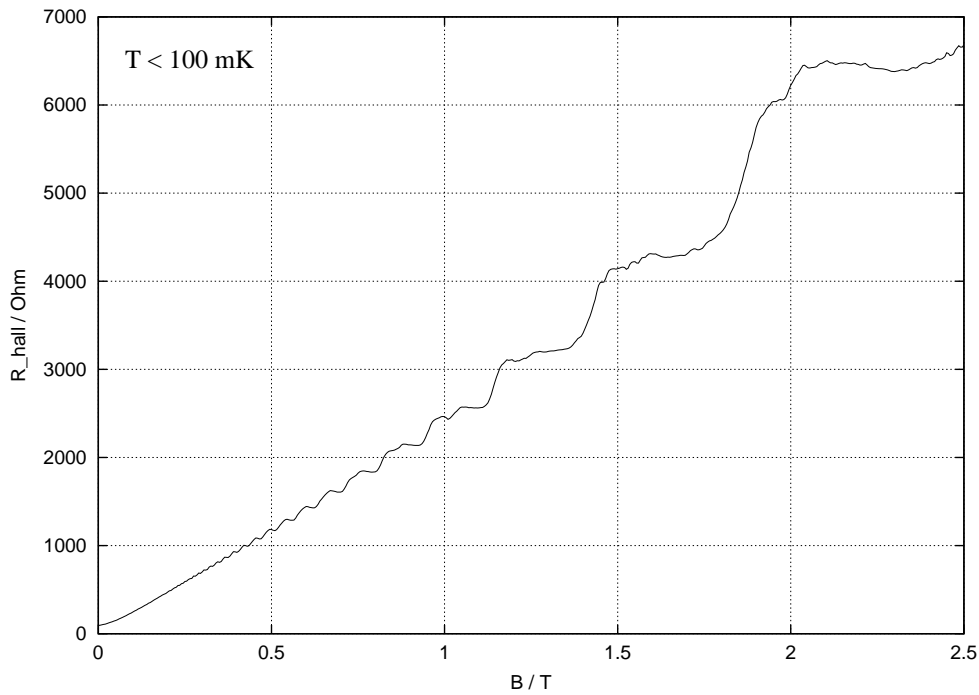
Phasenkohärenz

Ein Problem tritt auf, wenn das Probensignal gegenüber der Referenzwelle phasenverschoben ist, z.B. weil reaktive Komponenten durchlaufen werden (Kabel stellen Kapazitäten dar u.ä.). Dadurch wird das Signal abgeschwächt bzw. im Extremfall (90° -Verschiebung) zerstört. Daher muss vor Beginn der Messungen die Phase korrigiert werden. Dies geschieht, indem man das Signal bei Phasenverschiebung $\Phi = 90^\circ$ auf 0 V minimiert und anschließend die Messung bei $\Phi = 0^\circ$ durchführt. Die Phase kann sich im Verlauf der Messung ändern. Moderne Lock-in-Verstärker besitzen eine automatische Phasenkompensation und können bei jedem Messwert das Maximalsignal anzeigen.

Messbeispiele: $U_{long}(B)$, $U_{long}(\frac{1}{B})$ und $U_H(B)$



Wichtige Merkmale der Längsspannung sind der Startwert $U_{long}(B = 0T)$ sowie die Periodizität $\Delta(\frac{1}{B}) = \text{const}$ der Oszillationen nach Invertierung der Magnetfeldachse. Daraus lassen sich unmittelbar die Elektronendichte und der Flächenwiderstand des 2dim Elektronengases, Elektronenbeweglichkeit, mittlere freie Weglänge und weitere damit verbundene Kenngrößen der freien Elektronen bestimmen.



Zur Auswertung der Hallspannungskurve betrachtet man die Anfangssteigung der Hallspannung, $\frac{dU_H}{dB}$. Aus dieser lässt sich die freie Elektronendichte des Substrats bestimmen, welche idealerweise mit der Elektronendichte im 2DEG übereinstimmt. Zudem werden die Höhen der sichtbaren Plateaus, bzw. deren Widerstandswerte, analysiert und mit den theoretisch erwarteten Werten $R_z = \frac{h}{2ze^2}$ (ohne Spinaufspaltung) bzw. $\frac{h}{ze^2}$ (mit Spinaufspaltung) verglichen ($z \in \mathbb{N}$).

Durchführung & Auswertung

Durchführung

Die Probe befindet sich am Praktikumsnachmittag bereits im Probenhalter, welcher evakuiert, mit Austauschgas befüllt und in den vorgekühlten Glaskryostat eingeführt ist. Im Praktikum wird das äußere Schild mit Flüssigstickstoff und das Kältebad mit flüssigem Helium aufgefüllt. Als nächstes müssen die Messgeräte zum gewünschten Messaufbau verbunden und voreingestellt werden.

An die Probe wird ein Wechselstrom von $I = 10 \text{ nA}$ angelegt. Mit einem Lock-in-Verstärker mit Wechselspannungsquelle und Phasenabgleich wird die erste Messreihe durchgeführt. Die Daten werden über einen Messrechner ausgegeben. Die Probe wurde mit einer IR-Diode beleuchtet, wodurch die Elektronen im 2dim Elektronengas angeregt werden und sich somit die elektronischen Eigenschaften der Probe verbessern. Es werden nacheinander folgende Messungen aufgenommen:

- * ein Satz Strom-Spannungs-Kennlinien in Zweipunktanordnung
- * eine Messung der longitudinalen Spannung in Abhängigkeit von der angelegten Magnetfeldstärke in Vierpunktanordnung
- * eine Messung der Hallspannung über denselben Magnetfeldbereich

Auswertung

Aus den Messdaten lassen sich nun Kontaktwiderstände sowie wesentliche Eigenschaften und Kenngrößen des 2dim Elektronengases bestimmen.

- Aus $U_{long}(B)$ erhält man die Periodizität $\Delta(\frac{1}{B})$ der Maxima oder Minima sowie die Anfangsspannung $U_{long}(B=0T)$ (in Vierpunktmessung). Daraus lassen sich berechnen (mit $m_{eff}(GaAs) \simeq 0,067m_e$):

- Elektronendichte im 2DEG $n_s = \frac{2e}{h} \frac{1}{\Delta(\frac{1}{B})}$

- Fermigeschwindigkeit $v_f = \frac{\hbar\sqrt{2\pi n_s}}{m_{eff}}$

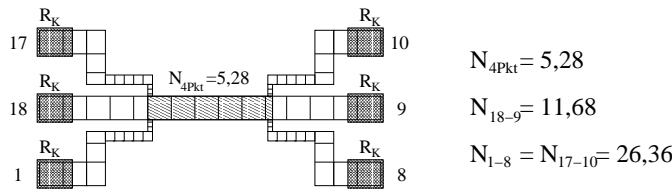
- Fermiwellenzahl $k_f = \frac{m_{eff}v_f}{\hbar}$ und Fermiwellenlänge $\lambda_f = \sqrt{\frac{2\pi}{n_s}} = \frac{2\pi}{k_f}$

- Vierpunktwidestand $R_{xx} = \frac{U_{long}(B=0T)}{I}$

- Im weiteren benötigt man den Flächenwiderstand ρ_{xx} des Elektronengases aus der Vierpunktmessung. Diesen erhält man, indem man den Leiter in Quadrate unterteilt und den Widerstand R_{xx} durch die Anzahl N der Quadrate zwischen den Abgriffen teilt (was einem geometrischen Faktor Breite/Länge entspricht). Hieraus folgt: $\rho_{xx} = \frac{R_{xx}}{N_{4Pkt}}$. Damit erhält man

- Beweglichkeit $\mu = \frac{1}{en_s\rho_{xx}}$

– Mittlere freie Weglänge $l_m = v_f \tau_m = \frac{\hbar}{e} \mu \sqrt{2\pi n_s}$ und Streuzeit $\tau_m = \frac{l_m}{v_f}$



- Aus den Zweipunktmessungen lassen sich die Kontaktwiderstände R_K abschätzen. Der Zweipunktwiderstand setzt sich zusammen aus zwei Kontaktwiderständen sowie dem Widerstand des Elektronengases zwischen den Kontakten. Dieser entspricht dem Produkt aus dem Flächenwiderstand ρ_{xx} und der Anzahl der Quadrate, über die die Zweipunktmessung stattgefunden hat: $R_{2\text{Pkt}} = R_{K1} + R_{2\text{DEG}} + R_{K2} = R_{K1} + N_{K1,K2} \cdot \rho_{xx} + R_{K2}$. Stelle mit Hilfe dieser Gleichung ein lineares Gleichungssystem für die sechs Kontaktwiderstände R_K auf ($R_{2\text{Pkt}}$ aus den Messungen, $R_{2\text{DEG}}$ berechnet aus $N_{K1,K2}$ und ρ_{xx}) und berechne daraus $R_1, R_8, R_9, R_{10}, R_{17}$ und R_{18} .
- Aus der Steigung der Hallspannung bei niedrigen Magnetfeldstärken kann man die Dichte der freien Elektronen in der Hallbar zu $n = \frac{I/e}{dV_H/dB}$ berechnen. Idealerweise befinden sich nur im 2dim Elektronengas freie Elektronen. Vergleiche n_s mit n . Bei starken Abweichungen existiert eine „parallele Leitfähigkeit“, d.h. Stromfluss findet nicht wie gewünscht nur durch das Elektronengas statt. Werte die Höhe der Plateaus in der Hallspannungsmessung aus. Vergleiche die Widerstandswerte mit den theoretisch erwarteten Werten von $R_z = h/(2ze^2)$ bei Spinentartung bzw. $R_z = h/(ze^2)$ ohne Spinentartung.

Protokoll

Das Protokoll sollte (mindestens) folgende Dinge enthalten:

- Eine Übersicht über die Theorie mit Bearbeitung der Verständnisfragen von S. 7
- Eine Übersicht über den Praktikumsnachmittag
- Eine Skizze des Messaufbaus mit Erklärung
- Auswertungstabellen der Minima von U_{long} sowie der Plateaus von U_{hall}
- Eine ausführliche Auswertung der Messungen nach obigem Schema
- Die Messkurven
- Mitschriebe vom Praktikumsnachmittag (Geräte-Einstellungen, Ablesewerte, etc.)

Literatur

- [1] K. v. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494-497 (1980).
- [2] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*, Cambridge University Press (1997).
- [3] E.H. Hall, *Am. J. Math.* **2**, 287 (1879).
- [4] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders College Publishing (1976).
- [5] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, John Wiley & Sons (1995).
- [6] H. Kroemer, *Quantum Mechanics*, Prentice Hall (1994).
- [7] M.J. Kelly, *Low-dimensional Semiconductors - Materials, Physics, Technology, Devices*, Oxford Science Publications (1995).
- [8] B. Jeckelmann and B. Jeanneret, *The quantum Hall effect as an electrical resistance standard*, Rep. Prog. Phys. 64 (2001) 1603-1655.

[1] und Teile von [2] sind Pflichtlektüre (siehe Praktikumsmappe), [3] bis [8] weiterführend.

Im Anhang der Praktikumsmappe als Kopie zu finden:

Quelle 1: Originalpaper von K. von Klitzing zum Quanten Hall Effekt, Phys. Rev. Letters 45, pp. 494–497, (1980)

<http://www.aps.org>, → journals, Phys. Rev. Letters, Search for: Volume 45, p. 494; oder direkt: http://cornell.mirror.aps.org/pdf/PRL/v45/i6/p494_1

Quelle 2: S. Datta, Electronic Transport in Mesoscopic Systems, Kapitel 1.1, 1.4 und 1.5 (S. 7-8, 23-29) mit Zusammenfassung (S. 44) und Teile von Kapitel 4.1 (S. 175-188)

Quelle 3: Vortrag von K. von Klitzing anlässlich der Nobelpreisverleihung 1985, <http://www.nobel.se/physics/laureates/1985/klitzing-lecture.html>

Quelle 3 ist als Zusatzlektüre gedacht. In Kap. 1-3 werden wichtige Grundlagen des QHE und der zugrundeliegenden Materialsysteme wiederholt. Kap. 4 geht stark ins Detail. In Kap. 5 (S. 338-340) sind die wichtigen Anwendungsmöglichkeiten des QHE für die Metrologie aufgeführt.