

Kapitel 6

Elektromagnetische Wellen

6.1 Lösung der Maxwellschen Gleichungen in einem Isolator

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Lösung der Maxwell Gleichungen in einem Isolator beschäftigen. Wir betrachten also ein Medium, in dem es keine freien Ladungen gibt (Ladungsdichte $\rho = 0$) und auch keine elektrischen Ströme (Stromdichte $\vec{j} = 0$). Damit nehmen also die Maxwell Gleichungen die Form

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 = \operatorname{div} \vec{E} \quad (6.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 = \operatorname{div} \vec{H} \quad (6.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{d\vec{B}}{dt} = 0 \quad (6.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{d\vec{D}}{dt} = 0 = \operatorname{rot} \vec{H} - \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (6.4)$$

an und werden ergänzt durch die Materialgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (6.5)$$

Die jeweils zweite Gleichung in (6.1), (6.2) und (6.4) ergibt sich weil wir ein homogenes Medium betrachten wollen, in dem die Dielektrizitätskonstante ε und die Permeabilität μ nicht vom Ort abhängen. Multiplizieren wir die Gleichung (6.4) mit $\mu_0 \mu$ und wenden ausserdem den Rotationsoperator an, so erhalten wir

$$\operatorname{rot} \left(\operatorname{rot} \vec{B} \right) - \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{d \operatorname{rot} \vec{E}}{dt} = 0.$$

Benutzen wir dann die Identität

$$\operatorname{rot} \left(\operatorname{rot} \vec{B} \right) = \operatorname{grad} \underbrace{(\operatorname{div} \vec{B})}_{=0 \text{ siehe 6.2}} - \Delta \vec{B}$$

und ersetzen $\operatorname{rot} \vec{E}$ gemäß (6.3), so erhalten wir

$$\Delta \vec{B} - \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} = 0, \quad (6.6)$$

also partielle Differenzialgleichungen zweiter Ordnung in den Ortskoordinaten (x, y, z) sowie in der Zeit t für die drei kartesischen Komponenten der Magnetischen Induktionsdichte \vec{B} . In ganz analoger Weise können wir auch für das elektrische Feld \vec{E} verfahren. Wir wenden den Rotationsoperator auf die Maxwellgleichung (6.3) an und erhalten

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) + \frac{d\operatorname{rot}\vec{B}}{dt} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} + \mu\mu_0 \frac{d\operatorname{rot}\vec{H}}{dt} = 0$$

Wegen (6.1) ist $\operatorname{div}\vec{E} = 0$. Ersetzen wir $\operatorname{rot}\vec{H}$ gemäß (6.4), so erhalten wir

$$\Delta\vec{E} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = 0. \quad (6.7)$$

Diese Differenzialgleichung für das elektrische Feld hat also die gleiche Struktur wie Gleichung (6.6) für das \vec{B} -Feld und wir wollen uns deshalb zunächst mit den mathematischen Eigenschaften der Lösungen der sogenannten *homogenen Wellengleichungen* vom Typ (6.6) und (6.7) beschäftigen.

Um die Eigenschaften der Lösungen der homogenen Wellengleichungen zu verdeutlichen, wollen wir die Gleichungen zunächst in zweifacher Hinsicht vereinfachen:

- An Stelle der vektorwertigen Funktionen \vec{E} und \vec{B} in (6.7) bzw. (6.6) betrachten wir eine skalarwertige Funktion f .
- Außerdem nehmen wir an, dass diese Funktion nicht im 3-dimensionalen Raum, also als Funktion von \vec{r} , definiert ist, sondern nur von einer Raumkoordinate x abhängt: $f(x, t)$.

Damit vereinfacht sich also die Differenzialgleichung vom Typ (6.6) auf die Form

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0. \quad (6.8)$$

Ausserdem haben wir dabei

$$\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \rightarrow \frac{1}{c^2} \quad (6.9)$$

ersetzt. Diese Gleichung entspricht der Wellengleichung, die wir in der Mechanik behandelt haben. Damals haben wir gefunden, dass jede zweimal stetig differenzierbare Funktion f , die nicht von den zwei unabhängigen Variablen x und t sondern nur von den Linearkombination

$$f(x, t) = f(u_{\pm}) \quad \text{mit} \quad u_{\pm}(x, t) = x \pm ct \quad (6.10)$$

eine Lösung liefert. In diesem Fall bezeichnet die Funktion f eine beliebige Struktur, die sich im Lauf der Zeit in Richtung x oder aber in Richtung $-x$ mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Ein Spezialfall dieser Lösungen sind die ebenen Wellen in der Form

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \operatorname{Real}\{A \exp(ik(x - \tilde{c}t))\} \\ &= |A| \cos(kx - k\tilde{c}t + \varphi). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir benutzt, daß man die komplexe Amplitude A durch den Betrag $|A|$ und eine Phase φ ($A = |A|e^{i\varphi}$) darstellen kann. Die ebenen

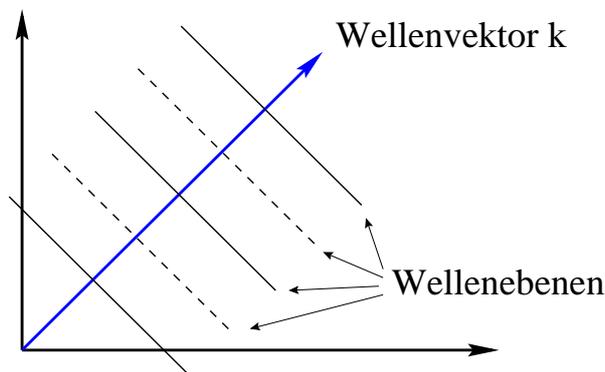


Abbildung 6.1: Darstellung einer ebenen Welle

Wellen sind von besonderem Interesse, da sie ein vollständiges Funktionensystem bilden, so dass man jede beliebige andere Funktion nach diesen ebenen Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen k entwickeln kann.

Die ebenen Wellen in einer Dimension sind charakterisiert durch die **Wellenzahl** k , beziehungsweise die **Wellenlänge** λ . Diese Wellenlänge λ bezeichnet dabei den Abstand zweier Koordinaten x , für die sich die Cosinus Funktion in (6.11) periodisch wiederholt. Es gilt also:

$$k\lambda = 2\pi \quad \text{bzw.} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (6.12)$$

Die Funktion (6.11) ist also bei festgehaltenem Parameter Zeit eine periodische Funktion in x mit der Periodizitätslänge oder **Wellenlänge** λ . Bei festgehaltener Ortskoordinate ist (6.11) aber auch eine periodische Funktion in der Zeit. Für die Periodendauer T oder **Schwingungsdauer** gilt

$$kcT = 2\pi \quad \text{also} \quad T = \frac{2\pi}{kc} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (6.13)$$

mit der **Winkelgeschwindigkeit**

$$\omega = kc. \quad (6.14)$$

Ausserdem ist noch der Begriff **Frequenz** der Schwingung gebräuchlich, wobei die Frequenz durch

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad (6.15)$$

mit der Schwingungsdauer verbunden ist und in Einheiten von Hertz, das entspricht der Zahl der Schwingungen pro Sekunde, angegeben wird.

Als nächstes betrachten wir nun die Lösung der Differentialgleichung vom Typ (6.7) für eine skalare Funktion f , die in 3 Raumdimensionen definiert ist

$$\Delta f(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0. \quad (6.16)$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß auch in diesem Fall die ebenen Wellen

$$f(\vec{r}, t) = \text{Real} \left\{ A \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \right\}, \quad (6.17)$$

spezielle Lösungen sind. Diese Lösungen sind jetzt durch 3 Wellenzahlen, k_x , k_y und k_z , beziehungsweise einen **Wellenvektor** \vec{k} definiert. Die Differentialgleichung wird genau dann gelöst, wenn (6.13) entsprechend der Zusammenhang

$$\omega = \pm c|\vec{k}| \quad (6.18)$$

gewährleistet ist. Als Funktion des Ortsvektors \vec{r} ist die Funktion $f(\vec{r}, t)$ an allen Orten identisch, für die gilt $\vec{r} \cdot \vec{k} = \text{const.}$ Die entsprechenden Gebiete, an denen also $f(\vec{r}, t)$ z.B. einen Maximalwert annimmt sind Flächen senkrecht zu dem Wellenvektor \vec{k} , wie das auch in der Abb. 6.1 dargestellt ist. Als Funktion der Zeit bewegen sich dann diese Ebenen konstanter Funktionswerte in Richtung des Wellenvektors \vec{k} . Deshalb spricht man auch von "ebenen Wellen" mit der Ausbreitungsrichtung \vec{k} .

Nach dieser Vorbereitung kehren wir nun zu der Lösung der Differentialgleichungen (6.6) und (6.7) zurück. Aus dem vorhergehenden Abschnitt ist klar, dass z.B. die Differentialgleichung (6.7) für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ gelöst wird durch ebene Wellen für die 3 kartesischen Komponenten von \vec{E}

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (6.19)$$

wobei wieder (6.18) erfüllt sein muss. Die Differentialgleichung (6.7) hatten wir aus den Maxwellgleichungen für einen Isolator (6.1) - (6.4) hergeleitet. Wir untersuchen nun, ob die Maxwellgleichungen noch weitere Bedingungen an die elektromagnetischen Felder stellen. Dazu wenden wir (6.1) auf den Ansatz (6.19) an

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz} \\ &= (-k_x E_x^0 - k_y E_y^0 - k_z E_z^0) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur dann für alle \vec{r} und Zeiten t erfüllt sein, wenn der Amplitudenvektor \vec{E}^0 und damit auch der Vektor des elektrischen Feldes \vec{E} in (6.19) stets senkrecht zum Ausbreitungsvektor \vec{k} steht: $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$.

In ganz entsprechender Weise können wir auch für die magnetische Induktionsdichte \vec{B} mit (6.2) zeigen, dass auch \vec{B} senkrecht zu dem Wellenvektor \vec{k} stehen muss. Deshalb bezeichnet man die elektromagnetischen Felder in einem Isolator, als **transversal polarisiert**. Im Gegensatz dazu steht der Feldvektor von longitudinal polarisierten Wellenfeldern parallel zum Wellenvektor \vec{k} .

Es gibt aber auch noch eine weitere Bedingung für die Polarisierung der elektromagnetischen Felder. Zur Herleitung dieser Bedingung wenden wir die Maxwellgleichung (6.3)

auf den Ansatz der ebenen Wellen für $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ an

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ ik_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= i\vec{k} \times \vec{E}^0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{d}{dt}\vec{B}^0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= -i\omega\vec{B}^0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= -i\omega\vec{B}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = i\vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t) - i\omega\vec{B}(\vec{r}, t)$$

Mit der Maxwellgleichung (6.3) ergibt sich also

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t)}. \quad (6.20)$$

Also steht \vec{B} immer senkrecht auf \vec{k} und \vec{E} : \vec{k} , \vec{E} und \vec{B} bilden ein rechtshändiges Dreibein.

Mit diesen Beziehungen können wir nun Energie und Impuls der elektromagnetischen Wellenfelder berechnen. Als erstes betrachten wir den Poynting Vektor \vec{S} . Nach (4.38) ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{S} &= (\vec{E} \times \vec{H}) \\ &= \frac{1}{\mu_0\mu} |\vec{E}| |\vec{B}| \hat{e}_k. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeilen wurde ausgenutzt, daß \vec{E} , \vec{B} und \vec{k} ein Dreibein bilden (6.20). Der Poyntingvektor und damit die entsprechende Energieflussdichte weist also in Richtung des Wellen- oder Ausbreitungsvektors \vec{k} . Betrachten wir nun eine linear polarisierte Welle und benutzen ausserdem (6.20) so ergibt sich für den Betrag des Poyntingvektors

$$|\vec{S}| = \frac{|\vec{k}|}{\omega\mu\mu_0} E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Benutzt man nun (6.18) und den Zusammenhang zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit c und den Materialkonstante μ und ε aus (6.9) so ergibt sich

$$|\vec{S}| = c\varepsilon_0\varepsilon E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Hält man also die Position fest und berechnet den zeitlich gemittelten Energiefluß, so ergibt sich

$$\bar{S} = \frac{c}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 \quad (6.22)$$

Zum Vergleich können wir auch die zeitlich gemittelte Energiedichte der elektromagnetischen Felder berechnen. Nach (4.37) ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{1}{2} \left(\bar{\vec{E}} \bar{\vec{D}} + \bar{\vec{H}} \bar{\vec{B}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} E_0^2 + \frac{1}{2\mu_0 \mu} B_0^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Auch hier stehen die Querstriche für die zeitliche Mittelung der entsprechenden Größen. Bei dem Übergang zur letzten Zeile wurde wieder (6.20) benutzt, wodurch sich ergab, dass die Energiedichte durch die Magnetfelder genau so groß ist wie die der elektrischen. Vergleicht man (6.22) und (6.23) so ergibt sich

$$\bar{S} = c \bar{W} ,$$

die gemittelte Energieflußdichte \bar{S} der elektromagnetische Welle entspricht gerade ihrer Energiedichte \bar{W} multipliziert mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c . Die Geschwindigkeit c ist also die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Energiedichte.

An dieser Stelle wollen wir verschiedene Beispiele für elektromagnetische Wellen betrachten. Dazu rufen wir uns in Erinnerung, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im Vakuum oder allgemein in einem Medium mit $\mu = \varepsilon = 1$ den Wert (siehe (6.9))

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (6.24)$$

besitzt. Zusammen mit (6.14) bedeutet dies, dass es einen festen Zusammenhang zwischen der Wellenlänge λ und der Frequenz ν einer elektromagnetischen Welle gibt:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \frac{\lambda}{2\pi} = \nu \lambda = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \quad (6.25)$$

Wir wollen diese Beziehung an verschiedenen Formen der elektromagnetischen Wellen verifizieren.

- Elektromagnetische Wellen im Frequenzbereich zwischen etwa 10^5 Hertz und 10^8 Hertz bezeichnet man als **Radiowellen**. So kennen wir auf einem normalen Radio-Empfänger die sogenannte Mittelwelle mit Frequenzen zwischen 500 kHz und 1.6 MHz. Nach (6.25) entspricht dabei $\nu = 1.5 \cdot 10^6$ Hz = 1.5 MHz einer Wellenlänge von 200 Metern. Höhere Frequenzen im Bereich der Kurzwelle oder im UKW (Ultra-Kurz-Wellen) Bereich ($\nu \approx 100$ MHz) entsprechen kürzeren Wellenlängen (hier also etwa $\lambda \approx 3$ m).

- Den sich hier anschließenden Bereich höherer Frequenzen (etwa $3 \cdot 10^8 \text{ Hz} < \nu < 3 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ also $1 \text{ m} > \lambda > 10^{-4} \text{ m}$) bezeichnet man als den Bereich der Mikrowellen. In diesem Bereich von Frequenzen ist auch von Interesse, dass bei der Taktfrequenz heutiger Computer (etwa 3 GHz als $3 \cdot 10^9 \text{ Hz}$), die Wellenlänge λ 1 Meter beträgt. Bei höheren Frequenzen muss man also darauf achten, dass die Abmessungen der Bauteile so klein gehalten werden, dass über die Ausmaße der Bauteile sich die Feldstärken nicht signifikant ändern.
- Im Frequenzbereich zwischen etwa $3 \cdot 10^{12} \text{ Hz} < \nu < 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ spricht man vom Bereich des infraroten Lichts.
- Das für unser Auge sichtbare Licht umfasst der sehr kleinen Frequenzbereich zwischen $\nu = 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ (rotes Licht, $\lambda = 750 \text{ nm}$) und $\nu = 8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ (blaues Licht, $\lambda = 375 \text{ nm}$).
- Bei höheren Frequenzen ($10^{15} \text{ Hz} < \nu < 10^{18} \text{ Hz}$) findet man das Ultraviolette Licht.
- Den Bereich $10^{16} \text{ Hz} < \nu < 10^{20} \text{ Hz}$ bezeichnet man auch als Röntgenstrahlen.
- Noch höhere Frequenzen ($\nu > 10^{18} \text{ Hz}$) fasst man als γ -Strahlung zusammen. Dabei ist zu beachten, dass die Frequenzbereiche für die verschiedenen Typen von elektromagnetischen Wellen oder Strahlen überlappen.

Abstrahlung von Radiowellen im Experiment

Wir erzeugen durch einen Röhrenverstärker Schwingungen der Frequenz $f = 150 \text{ MHz}$. Der Schwingkreis enthält eine kreisförmige Schleife. Das in der Schleife erzeugte B-Feld koppeln wir in eine stabförmige Antenne ein (s. Abb. 6.2(a)). Der Stab sei parallel zur x -Richtung orientiert.

Die Antenne strahlt elektromagnetische Wellen der Wellenlänge

$$\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 \text{ (m/s)} / 1.5 \cdot 10^8 \text{ Hz} = 2 \text{ m}$$

ab. Wir messen zunächst das elektrische Feld mittels einer stabförmigen Antenne. In die Mitte der Antenne fließt der induzierte Strom über eine Parallelschaltung eines Widerstands und einer Diode¹. Der zeitliche Mittelwert der über dem Widerstand abgegriffenen Spannung ist damit von Null verschieden und kann detektiert werden.

Das detektierte elektrische Feld ist maximal, wenn die Empfangsantenne parallel zur Abstrahlantenne steht (d. h. Orientierung in x -Richtung). Dreht man die Antenne um 90° aus der Abstrahlebene heraus (d. h. Orientierung in z -Richtung) so geht das Signal (fast) auf Null zurück. Ebenso verringert sich das Signal stark, wenn Sende- und Empfangsantenne auf einer Achse liegen (Abb. 6.2(b)).

Die Magnetfeldkomponente der abgestrahlten Welle messen wir mittels einer ringförmigen Antenne. Der den Ring durchsetzende magnetische Fluss induziert Wechselströme, die wir wiederum gleichrichten². Wir finden, dass \vec{B} senkrecht zu \vec{E} steht.

¹Die Diode lässt den Strom im Wesentlichen nur in einer Richtung passieren.

²Es sei hier noch angemerkt, dass die detektierten Spannungen einige mV betragen. Ähnliche Spannungen können durch die zahlreichen Radiosender in der Umgebung in einem "unvorsichtig" aufgebauten Laborexperiment auftreten, falls die Verbindungskabel beispielsweise Schleifen bilden. Der Effekt ist sehr gefürchtet, da er nicht nur Messungen sondern u. U. sogar die zu messende Probe zerstören kann.

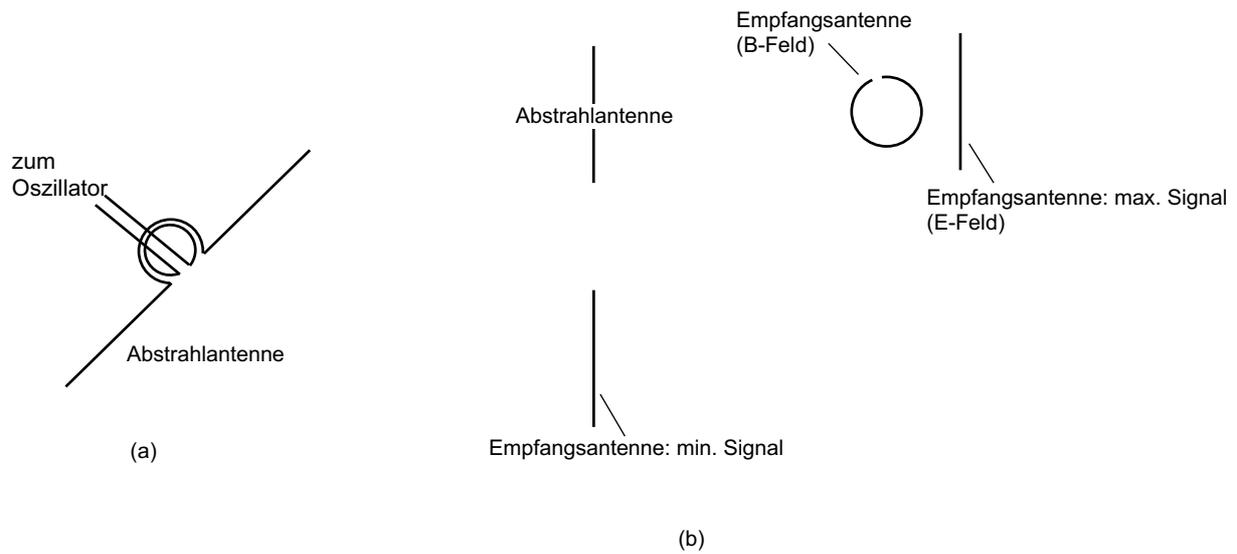


Abbildung 6.2: Abstrahlung von Radiowellen. (a) Ankopplung an Oszillator; (b) Abstrahlcharakteristik

Schließlich variieren wir die Länge der stabförmigen Empfangsantenne und der Abstrahlantenne. In beiden Fällen wird das Signal maximal, wenn die Stablänge $\lambda/2$ (d. h. 1 m) beträgt. Speziell im Fall der Abstrahlantenne finden wir, dass das Signal praktisch auf Null zurückgeht, wenn wir die Antenne entfernen, so dass die Abstrahlung nur noch über die Leiterschleife des Senders erfolgen kann.

6.2 Erzeugung von elektromagnetischen Wellen

In diesem Abschnitt soll die Entstehung und die Emission von elektromagnetischen Wellen beschrieben werden. Die Quelle dieser elektromagnetischen Welle sei eine auf einem kleinen Raum lokalisierte, oszillierende Ladungs- und Stromverteilung

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}', t) &= \rho(\vec{r}') \exp(-i\omega t) \\ \vec{j}(\vec{r}', t) &= \vec{j}(\vec{r}') \exp(-i\omega t)\end{aligned}\quad (6.26)$$

Auch hier wird wieder die komplexe Schreibweise benutzt, damit einzelne Rechenschritte vereinfacht werden. Letztendlich interessiert natürlich nur der Realteil dieser Größen. Natürlich sind auch andere Zeitabhängigkeiten denkbar als die in (6.26) angenommene Oszillation mit einer konstanten Frequenz. Solche komplexeren Oszillationen können aber über die Fourierentwicklung stets als Überlagerung von den harmonischen Oszillationen aus (6.26) dargestellt werden.

Realisierung solcher lokalisierten Quellen sind z.B. Antennen für Radiowellen oder aber auch einzelne Atome und Moleküle, die ja elektromagnetische Wellen in Form von Licht, Röntgenstrahlung oder auch in anderen Frequenzbereichen emittieren können.

Zur Beschreibung der elektromagnetischen Felder, die durch die oszillierenden Ladungs- und Stromverteilungen erzeugt werden, betrachten wir zunächst die elektromagnetischen Potentiale $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und $\Phi(\vec{r}, t)$. Dabei wollen wir diese Potentiale in der Lorentzgleichung betrachten, was bedeutet, dass

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (6.27)$$

erfüllt sein muss und für das Potenzial $\Phi(\vec{r}, t)$ die Differentialgleichung

$$\varepsilon_0 \left(-\Delta \Phi + \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi}{dt} \right) = \rho, \quad (6.28)$$

gilt. Dies ist eine Wellengleichung für das Potenzial Φ allerdings mit einer Inhomogenität ρ . Aus der Diskussion der homogenen Wellengleichung wissen wir, dass beliebige Funktionen eine Lösung dieser Gleichung liefern, die nicht unabhängig vom Ort \vec{r} und der Zeit t abhängen sondern nur von der Linearkombination

$$\Phi(ct - |\vec{r}'|). \quad (6.29)$$

Nun interessiert uns eine lokalisierte Ladungs- und Stromverteilung. Das bedeutet, wenn wir in hinreichendem Abstand von dieser Quelle sind, wird die Ladungsdichte gleich null sein und wir können für diesen Bereich die homogene Form der Wellengleichung (6.28) verbunden mit der Eigenschaft (6.29) annehmen. Bei oszillierenden Ladungsverteilungen können wir ausserdem annehmen, dass nicht die Gesamtladung oszilliert, das würde ja der Ladungserhaltung widersprechen, sondern nur die räumliche Verteilung. Weit weg von der Ladungsverteilung sollte das elektromagnetische Feld durch die zeitlich oszillierende Dipolkomponente der Ladungsverteilung beschrieben sein. Wir betrachten deshalb noch

einmal das Potenzial, das durch eine statische Dipolverteilung am Koordinatenursprung \vec{d} erzeugt wird

$$\begin{aligned}\Phi_{stat}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{d}}{r} \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{N},\end{aligned}\quad (6.30)$$

mit

$$\vec{N} = \frac{1}{4\pi r}\vec{d}.$$

Wir versuchen jetzt dieses Ergebnis für das Potenzial im statischen Fall zu erweitern auf den zeitabhängigen Fall, bei dem wir eine oszillierende Dipolquelle der Form

$$\vec{d}(t) = \vec{d}_0 \exp(-i\omega t) = \vec{d}_0 \exp(-ikct), \quad (6.31)$$

am Koordinatenursprung ansetzen. Unsere Überlegungen zu (6.28) haben uns dazu geführt, im Falle der zeitabhängigen Quellen ein Potenzial der Form (6.29) zu betrachten. Wenn wir diese Überlegung auf das Potenzial übertragen, so liegt es nahe, den statischen Ansatz zu verallgemeinern auf die Form

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{d}(ct' = ct - |\vec{r}|)}{r} \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{N}(\vec{r}, t).\end{aligned}\quad (6.32)$$

Dies bedeutet, dass das Potenzial am Ort \vec{r} zur Zeit t dem Potenzial des Dipols zur Zeit $t' = t - r/c$ entspricht. Dies ist natürlich kein Beweis dafür, dass die Form des Potenzials korrekt ist. Dazu müssen wir dieses Ergebnis in (6.28) einsetzen und diese Gleichung verifizieren, eine Rechnung, die wir uns an dieser Stelle ersparen wollen. Wir sehen aber, dass die Lösung im Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ das richtige Ergebnis des elektrostatischen Dipols liefert.

Ausgehend von diesem Ausdruck für das Potenzial können wir aber auch das Vektorpotenzial bestimmen. Wir betrachten dazu die Gleichung (6.27) der Lorentzgleichung in der Form

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= -\mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi}{dt} \\ &= \mu_0\vec{\nabla}\cdot\frac{d\vec{N}}{dt}\end{aligned}\quad (6.33)$$

wobei wir bei dem Übergang zur zweiten Zeile die Darstellung von Φ aus (6.32) übernommen haben. Aus dieser Gleichung ergibt sich als mögliche Lösung für \vec{A}

$$\vec{A} = \mu_0\frac{d\vec{N}}{dt}. \quad (6.34)$$

Zurück zur Berechnung des Potenzials Φ nach (6.32). Unter Benutzung der Produktregel für die Ableitungen im $\vec{\nabla}$ Operator ergibt sich

$$\Phi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{d}}{r} + \vec{d}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]. \quad (6.35)$$

Zur Berechnung von $\vec{\nabla} \cdot \vec{d}$ benutzen wir die Kettenregel

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{d}_0 \exp(-ik(ct - |\vec{r}|)) = -ik\vec{d}_0 \exp(-ik(ct - |\vec{r}|)) \cdot (-\hat{e}_r) = ik\hat{e}_r \cdot \vec{d}, \quad (6.36)$$

wobei \hat{e}_r wie üblich den Einheitsvektor in Richtung des Beobachtungspunktes \vec{r} bezeichnet. Damit ergibt sich

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-ik\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^2} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^3} \right]. \quad (6.37)$$

Damit und nach einer etwas längeren Rechnung ergibt sich für

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla}\Phi - \frac{d}{dt}\vec{A} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r^3} \left\{ [(kr)^2 + ikr - 1] \vec{d}_0 - [(kr)^2 + 3ikr - 3] (\vec{d}_0 \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r \right\} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Bei unseren Überlegungen spielen drei Längenskalen eine Rolle. Da ist einmal die Ausdehnung der Quelle, die z.B. durch einen Radius der Größe δ charakterisiert sein soll. Die zweite Längenskala ist der Abstand des Beobachtungspunktes von der Quelle. Nehmen wir an, dass die Quelle sich im Koordinatenursprung befindet, so ist dieser Abstand identisch mit dem Betrag des Vektors \vec{r} . Die dritte Längenskala ist die Wellenlänge λ der elektromagnetischen Welle, die mit der Wellenzahl k oder auch der Winkelfrequenz ω verknüpft ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Wir nehmen an, dass die Ausdehnung der Quelle sehr klein ist gegenüber den beiden anderen Längen und unterscheiden dann

$$\begin{aligned} \text{Nahbereich:} & \quad \delta \ll r \ll \lambda \\ \text{Fernbereich:} & \quad \delta \ll \lambda \ll r \end{aligned} \quad (6.39)$$

Wir wollen uns hier das Feld im Fernbereich ansehen für den also gilt

$$1 \ll kr = \frac{2\pi}{\lambda} r$$

so dass man in (6.38) die Terme proportional zu kr und zu 1 gegenüber den quadratischen Termen proportional zu $(kr)^2$ vernachlässigen kann. Damit ergibt sich

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{r} \left\{ \vec{d}_0 - (\vec{d}_0 \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r \right\}. \quad (6.40)$$

Im Folgenden positionieren wir das Koordinatensystem so, dass der Dipolvektor $\vec{d}_0 = d_0 \hat{e}_z$ in z -Richtung orientiert ist und damit der Ortsvektor des Beobachters \vec{r} mit der z -Achse den Winkel θ bildet (Bezeichnung wie bei den Kugelkoordinaten), so dass

$$\vec{d}_0 \cdot \hat{e}_r = \cos \theta$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{k^2 d_0 \exp(i(kr - \omega t))}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \cos\theta \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \frac{k^2 d_0 \exp(i(kr - \omega t))}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ -\sin\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \frac{k^2 d_0 \exp(i(kr - \omega t))}{4\pi\epsilon_0 r} \{-\sin\theta \hat{e}_\theta\}. \tag{6.41}
 \end{aligned}$$

Dieses elektrische Feld, das auch häufig als elektrisches Feld eines **Hertz'schen Dipols** (in der Fernfeldnäherung) bezeichnet wird besitzt also die folgenden Eigenschaften:

- Es handelt sich um eine Kugelwelle, die radial vom Punkt des oszillierenden Dipols im Koordinatenursprung nach aussen läuft. Dies wird durch den Faktor

$$\frac{\exp(i(kr - \omega t))}{r}$$

zum Ausdruck gebracht. Der Wellenzahlvektor am Beobachtungsort \vec{r} zeigt also radial in Richtung \hat{e}_r nach aussen und besitzt den Betrag k .

- Das elektrische Feld ist in Richtung des Einheitsvektors \hat{e}_θ , einem der Basisvektoren der Kugelkoordinaten, polarisiert. Da \hat{e}_θ , senkrecht zur Richtung des Vektors \hat{e}_r und damit senkrecht zum Wellenzahlvektor \vec{k} steht, haben wir es mit einer transversal polarisierten Welle zu tun, was ja auch für elektromagnetische Wellen gegeben sein muss.
- Die Amplitude des elektrischen Feldes ist proportional zu $\sin\theta$ und hängt damit von der Ausbreitungsrichtung ab. Sie ist identisch null in Richtung der z -Achse, also in Richtung des Dipols und damit am Beispiel der Stabantenne in Richtung des Stabes. Die Amplitude ist maximal in der xy -Ebene, also bei Ausbreitung senkrecht zum Dipol.
- Die Amplitude ist proportional zur Wellenzahl zum Quadrat, der Faktor k^2 in (6.41).

Die abgestrahlte Energie wird durch den Pointing-Vektor beschrieben. Dieser zeigt im Fall der elektromagnetischen Wellen in Richtung des Wellenvektors \vec{k} , also in Ausbreitungsrichtung, und ist proportional zum Quadrat der Amplitude des elektrischen Feldes. Damit ergibt sich als Funktion der Richtung die Abstrahlcharakteristik eines Dipolstrahlers, wie sie in Abb. 6.3 dargestellt ist.

Es ist ausserdem interessant festzustellen, dass die abgestrahlte Energie proportional zu $k^4 \propto \omega^4 \propto \lambda^{-4}$ ist. Kurzwelliges Licht wird also mit größerer Intensität abgestrahlt und auch absorbiert, beziehungsweise gestreut. Dieser Mechanismus der sogenannten **Rayleigh Streuung** gilt für Sender, Absorber oder Streuzentren, die klein sind gegenüber der Wellenlänge λ , wie das ja hier angenommen wurde (siehe (6.39)). Dementsprechend ist z.B. die Eindringtiefe von Sonnenlicht in unsere Atmosphäre

$$l \approx 160 \lambda^4$$

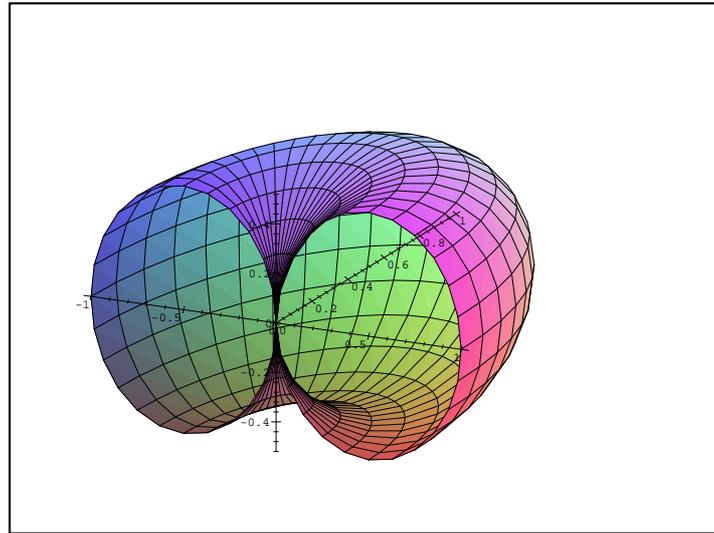


Abbildung 6.3: *Abstrahlung eines elektrischen Dipols. Dargestellt ist ein Ausschnitt aus einer Fläche, auf der die abgestrahlte Energie konstant ist.*

mit λ angegeben in μm und l in Kilometer. Dies bedeutet $l \approx 4$ km für violettes Licht ($\lambda 0.4 \mu\text{m}$) und 65 km für rotes Licht ($\lambda 0.8 \mu\text{m}$). Da die dichte Atmosphäre etwa 8 km hoch ist, wird tagsüber bei steilem Sonnenstand vor allem blaues Licht gestreut, was zu der blauen Farbe des Himmels führt. Bei auf- und untergehender Sonne ist der Weg des Lichtes durch die Atmosphäre entsprechend länger, so dass auch rotes Licht gestreut wird (Abendrot).

6.3 Überlagerung von elektromagnetischen Wellen

Die Maxwellgleichungen im Vakuum oder in einem isolierenden Medium ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) sind Differenzialgleichungen, die sowohl linear sind, d.h. die zu berechnenden elektrischen und magnetischen Felder treten nur linear und nicht quadratisch oder in höherer Potenz auf, und sie sind homogen, was bedeutet, dass es keine Terme gibt, in denen die elektromagnetischen Felder nicht auftreten. Dies bedeutet aber, dass für die Lösungen das **Superpositionsprinzip** gilt. Sind also zwei Lösungen ($\vec{E}_1(\vec{r}, t)$, $\vec{B}_1(\vec{r}, t)$) und ($\vec{E}_2(\vec{r}, t)$, $\vec{B}_2(\vec{r}, t)$) bekannt, so ist auch die Linearkombination dieser beiden Lösungen

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \alpha \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \beta \vec{E}_2(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \alpha \vec{B}_1(\vec{r}, t) + \beta \vec{B}_2(\vec{r}, t)\end{aligned}\quad (6.42)$$

mit beliebigen Koeffizienten, also Zahlen, α und β , Lösungen dieser Maxwellgleichungen im Vakuum. Wir wollen verschiedene Beispiele betrachten und nehmen dazu an, dass die Ausbreitungsrichtung der beiden überlagerten Wellen identisch ist und das Koordinatensystem so orientiert ist, dass die z -Achse in Ausbreitungsrichtung liegt

$$\vec{k}_i = k_i \hat{e}_z. \quad (6.43)$$

Das elektrische Feld hat dann die Form

$$\vec{E}_j(\vec{r}, t) = \hat{e}_j E_{0j} e^{i\varphi_j} e^{i(k_j z - \omega_j t)} \quad \text{mit} \quad \frac{\omega_j}{k_j} = c \quad (6.44)$$

mit einer reellwertigen Amplitude E_{0j} und einer Phase φ_j . Als Basisvektoren für die Polarisation des elektrischen Feldes kommen Vektoren \hat{e}_j senkrecht zur Ausbreitungsrichtung in Frage, also z.B. \hat{e}_x oder \hat{e}_y . Realisiert wird von diesem elektrischen Feld natürlich nur der Realteil also

$$\text{Real } \vec{E}_j(\vec{r}, t) = \hat{e}_j E_{0j} \cos(k_j z - \omega t + \varphi_j)$$

Nun zu verschiedenen Beispielen:

- **Linear polarisierte Welle:**

Nehmen wir den Fall

$$k_1 = k_2, \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \varphi_2.$$

Mit der Superposition (6.42) ergibt sich für den Realteil der Ergebniswelle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (\alpha E_{01} \hat{e}_1 + \beta E_{02} \hat{e}_2) \cos(k_1 z - \omega_1 t + \varphi_1) \quad (6.45)$$

Bei dieser Lösung (6.45) ändert sich die Polarisationsrichtung von \vec{E} nicht als Funktion von Ort und Zeit, lediglich die Amplitude ist variabel. In diesem Fall spricht man von linear polarisierten Wellen. Das zugehörige Magnetfeld ergibt sich aus der Beziehung

$$\vec{k}_1 \times \vec{E} = \omega \vec{B}.$$

- **Zirkular polarisierte Welle**

Es gibt aber auch transversal polarisierte Wellen, die nicht linear polarisiert sind. Dazu betrachten wir die Superposition mit $\alpha = \beta = 1$ und

$$k_1 = k_2 = k, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

In diesem Fall ergibt sich also für das elektrische Feld:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= E_{01} \hat{e}_1 \cos(kz - \omega t) + E_{02} \hat{e}_2 \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ &= E_{01} \hat{e}_1 \cos(kz - \omega t) - E_{02} \hat{e}_2 \sin(kz - \omega t) \end{aligned} \quad (6.46)$$

Betrachtet man nun z.B. den Fall, dass $\hat{e}_1 = \hat{e}_x$ und $\hat{e}_2 = \hat{e}_y$, sowie $E_{01} = E_{02}$ so ist dieses elektrische Feld am Koordinatenursprung ($z = 0$) gegeben durch

$$\vec{E}(0, t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich also um ein elektrisches Feld mit einer Amplitude, die vom Betrag her konstant ist, deren Richtung aber auf einem Kreis in der xy -Ebene zirkuliert. Man spricht deshalb von einer zirkular polarisierten Welle. Die hier betrachtete Welle besitzt **positive Helizität**, da das Feld als Funktion des Ortes eine Rechtsschraube in Ausbreitungsrichtung bildet. Für $\varphi_2 = -\pi/2$ erhält man eine Linksschraube bzw. **negative Helizität**. Sind die Amplituden E_{01} und E_{02} unterschiedlich, so beschreibt der Vektor des elektrischen Feldes als Funktion der Zeit eine Ellipsenbahn. Man spricht deshalb von elliptischer Polarisation.

- **Stehende Welle**

Es soll nun der Fall der Überlagerung von linear polarisierten Wellen betrachtet werden, bei denen der Amplitudenvektor identisch ist, aber die Ausbreitungsrichtung der beiden Wellen gegenläufig ist, also

$$k_2 = -k_1.$$

In diesem Fall ergibt sich für die Superposition der beiden Wellen das Ergebnis

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} + \vec{E}_0 e^{i(-kz - \omega t + \varphi)} \\ &= \vec{E}_0 e^{i(-\omega t + \varphi/2)} (e^{i(kz - \varphi/2)} + e^{-i(kz - \varphi/2)}) \\ &= 2\vec{E}_0 e^{i(-\omega t + \varphi/2)} \cos(kz - \varphi/2). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Es handelt sich also um eine Welle mit einer Amplitude, die sich als Funktion des Ortes wie eine Kosinusfunktion verhält. Diese Amplitude ist dann multipliziert mit einer komplexwertigen Exponentialfunktion, die die zeitliche Schwingung beschreibt. Man spricht von einer stehenden Welle. An den Stellen, an denen $\cos(kz - \varphi/2)$ den Wert null annimmt, ist das elektrische Feld für alle Zeiten identisch null. Dies sind die Knoten der stehenden Welle. An den Stellen, an denen die Kosinusfunktion den Wert 1 oder -1 annimmt, oszilliert das elektrische Feld als Funktion der Zeit mit maximaler Amplitude. Man bezeichnet diese Stellen als Schwingungsbäuche der stehenden Welle.

- Ausserdem sei der Fall betrachtet, bei denen Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen (bei gleicher Ausbreitungsrichtung) überlagert werden. Hier kommt es wie wir bereits im Kurs Physik I diskutiert haben zu Amplitudenmodulationen der Welle, die wir auch unter den Stichworten Fourier-Zerlegung behandelt haben.

Elektromagnetische Stehwellen im Experiment

Wir stellen dem Sender der Abb. 6.2 einen metallischen Reflektor gegenüber, so dass sich eine Stehwelle ausbildet. Wenn wir die Stehwelle mit der Antenne abfahren so finden wir, dass sich die Bäuche bzw. Knoten der Stehwelle im Abstand $\lambda/2 = 1$ m wiederholen. Hieraus finden wir mit der Senderfrequenz von 150 MHz für die c einen Wert von $3 \cdot 10^8$ m/s, was zeigt, dass sich auch diese elektromagnetische Welle mit "Licht"geschwindigkeit ausbreitet.

Wenn wir des Experiment in Wasser wiederholen, finden wir $\lambda/2 \approx 0.15$ m. Mit $c = c_{\text{vak}}/\sqrt{\epsilon\mu}$ und $\mu = 1$ für Wasser bestimmen wir hieraus $\epsilon \approx 45$, was geringer ist als der statisch bestimmte Wert von ϵ ($\epsilon_{\text{statisch}} \approx 81$). Der Grund liegt schlicht darin, dass die permanenten Dipolmomente der H_2O -Moleküle nicht schnell genug dem elektrischen Wechselfeld folgen können. Die bei 150 MHz (oder auch bei höheren Frequenzen) gemessene Dielektrizitätskonstante ist also deutlich kleiner als die statisch gemessene. Schließlich demonstrieren wir Stehwellen noch mit einem bei 9.7 GHz arbeitenden Sender. Wir finden $\lambda/2 \approx 1.6$ cm heraus und wiederum $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

6.4 Wellen in einem leitenden Medium

Unter einem leitenden Medium verstehen wir ein System, in dem wir keine ruhenden Ladungen berücksichtigen, aber Ströme, die nach dem Ohmschen Gesetz durch ein elektrisches Feld verursacht werden. Wir nehmen also an

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &= 0 \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \sigma \vec{E}(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

mit der Leitfähigkeit σ als charakteristische Materialkonstante. Nehmen wir außerdem an, dass die Materialparameter ε und μ Konstanten, also unabhängig von \vec{r} und t , sind, so lassen sich die Maxwellgleichungen auf die Form bringen

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0 & \rightarrow & \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= \mu \mu_0 \operatorname{div} \vec{H} = 0 & \rightarrow & \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\mu_0 \mu \frac{d\vec{H}}{dt} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{d\vec{D}}{dt} + \vec{j} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt} + \sigma \vec{E}\end{aligned}\quad (6.48)$$

Auch zur Lösung dieser Gleichung betrachten wir den Ansatz von Vektorfeldern, die als Funktion der Zeit harmonisch oszillieren

$$\begin{aligned}\text{Ansatz : } \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}(\vec{r}) \exp(-i\omega t)\end{aligned}\quad (6.49)$$

Die Maxwellgleichungen für die Wirbelstärken liefern mit diesem Ansatz

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= i\omega \mu_0 \mu \vec{H} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} + \sigma \vec{E} = -i\omega \eta \vec{E}\end{aligned}\quad (6.50)$$

wobei wir definiert haben

$$\eta = \varepsilon_0 \varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega}\quad (6.51)$$

Die Maxwellgleichungen in einem leitenden Medium sind also fast identisch zu den Maxwellgleichungen in einem Isolator ($\sigma = 0$) mit den Unterschieden

- Die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_0 \varepsilon$ ist zu ersetzen durch die komplexwertige Variable η , definiert in (6.51).
- Diese komplexwertige "Dielektrizitätsfunktion" η hängt ab von der Frequenz der oszillierenden Felder ω .

Im Folgenden werden wir also ω festhalten und erwarten dann auch für die Lösungen der Maxwellgleichungen im leitenden Medium, Lösungen in der Form von ebenen Wellen

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)).\end{aligned}\quad (6.52)$$

Aus den Maxwellgleichungen zur Quellstärke der Felder erhalten wir die Bedingungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} = i\vec{k}\vec{E} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{E} \\ \operatorname{div} \vec{H} = i\vec{k}\vec{H} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{H} \end{aligned} \quad (6.53)$$

Auch in den leitenden Medien sind also die elektromagnetischen Felder senkrecht zum Wellenvektor \vec{k} , sie sind also auch hier transversal polarisiert. Ein Unterschied tritt aber auf bei der Betrachtung der beiden anderen Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{k} \times \vec{H} &= -\omega\eta\vec{E} \\ \frac{1}{i} \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{k} \times \vec{E} &= \omega\mu\mu_0\vec{H} \end{aligned} \quad (6.54)$$

Multipliziert man die erste dieser beiden Gleichungen von links mit $\vec{k} \times$ so ergibt sich unter Einbeziehung der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{H}) &= \underbrace{\vec{k}(\vec{k}\vec{H})}_{=0} - k^2\vec{H} \\ &= \vec{k} \times (-\omega\eta\vec{E}) = -\omega^2\eta\mu\mu_0\vec{H} \end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite der ersten Zeile dieser Gleichung verschwindet wegen der Eigenschaft (6.53), dass \vec{H} transversal polarisiert ist. Damit können wir diese Gleichung zusammenfassen zu

$$k^2\vec{H} = \omega^2\eta\mu\mu_0\vec{H}$$

beziehungsweise mit der Definition von η in (6.51) zu

$$k^2 = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\omega^2 \left(1 + i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} \right) \quad (6.55)$$

Das Quadrat der Wellenzahl, und damit natürlich auch die Wellenzahl k sind komplex, sodass man den Wellenzahlvektor schreiben kann

$$\vec{k} = \hat{e}_k (\alpha + i\beta), \quad (6.56)$$

mit α und β als Bezeichnung für den Real- und Imaginärteil von k , während \hat{e}_k den Einheitsvektor in Richtung \vec{k} bezeichnet. Aus dem Vergleich von

$$k^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + i2\alpha\beta$$

mit (6.55) ergibt sich

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - \beta^2) &= \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\omega^2 \\ 2\alpha\beta &= \mu\mu_0\omega\sigma \end{aligned} \quad (6.57)$$

6.4.1 Der Skineffekt

Mit der komplexen Wellenzahl erhält man z.B. für die Welle des elektrischen Feldes in (6.52)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left(\vec{E}_0 \exp(i(\alpha \hat{e}_k \vec{r} - \omega t)) \right) \exp(-\beta \hat{e}_k \vec{r}) \quad (6.58)$$

und einen entsprechenden Ausdruck für das Magnetfeld \vec{H} . Für positive Werte von β ergibt sich eine Welle, deren Amplitude entlang der Ausbreitungsrichtung \hat{e}_k exponentiell abnimmt. Verfolgt man die Welle über eine Wegstrecke der Länge

$$\tau = \frac{1}{\beta} \quad (6.59)$$

so fällt die Amplitude um den Faktor $1/e$ ab. Man bezeichnet die Größe τ deshalb als Eindringtiefe oder **Skinkonstante**, d.h. die Dicke der Haut ("Skin") des leitenden Mediums, in die elektromagnetische Wellen in das leitende Medium eindringen können.

Wie groß ist diese Skinkonstante und wie stark hängt sie von der Frequenz ab? Dazu die folgende Abschätzung: Im Fall von Materialien mit hoher Leitfähigkeit σ wird der Imaginärteil von k^2 , der ja wie aus (6.57) ersichtlich proportional zu σ ist, sehr viel größer sein als der Realteil. Wir können also annehmen, daß

$$\alpha^2 - \beta^2 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \beta \quad (6.60)$$

Damit ergibt sich also

$$2\alpha\beta \approx 2\beta^2 \approx \mu_0\mu\omega\sigma$$

und für die Skinkonstante (6.59)

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\mu_0\omega}} \quad (6.61)$$

Die Eindringtiefe ist also insbesondere bei Materialien mit sehr hoher Leitfähigkeit und bei hohen Frequenzen ω sehr klein. In diesem Fall wird die Energie der elektromagnetischen Welle sehr rasch auf das leitende Material übertragen und die Welle entsprechend gedämpft.

Wegen dieses Skineffektes sind leitende Materialien weitgehend undurchlässig für elektromagnetische Wellen. Insbesondere lassen sie kein Licht durch (relativ großes ω) und dämpfen auch Wellen im Bereich der Radiofrequenzen sehr stark.

Die komplexwertige Wellenzahl hat aber auch noch eine weitere Konsequenz. Nach (6.54) gilt

$$\frac{1}{\mu\mu_0\omega} k(\hat{e}_k \times \vec{E}) = \vec{H}$$

Für die Amplitude des magnetischen Feldes in (6.52) gilt also damit

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{\mu_0\mu\omega} |k| \exp(i\phi) (\hat{e}_k \times \vec{E}_0)$$

wobei wir die komplexe Zahl k über den Betrag und eine Phase ϕ dargestellt haben. Nach unseren Überlegungen zu (6.60) ist ϕ bei guten Leitern etwa gleich $\pi/4$ oder 45 Grad. Die Welle des Magnetfeldes ist also damit um diesen Winkel phasenverschoben zur Welle des elektrischen Feldes, sie *hinkt entsprechend nach*.

6.4.2 Frequenzabhängige Dielektrizitätskonstante

Bisher wurde der Einfluss des Mediums auf das elektrische Feld dadurch berücksichtigt, dass wir eine Polarisation des Mediums annahmen, $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ und damit z.B. die dielektrische Verschiebung definiert haben als

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

mit der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon = 1 + \chi$. Dabei geht man davon aus, dass sich die Polarisation des Mediums zeitgleich mit dem elektrischen Feld ändert. Das elektrische Feld ändert sich also so langsam, dass die Elektronen im atomaren Bereich, die für die Polarisation verantwortlich sind, jeder Feldänderung instantan folgen können. Dies ist natürlich in der Elektrostatik eine vernünftige Annahme, die auch bei langsam variierenden Feldern noch gültig ist. Wie verhält es sich aber bei Feldern mit hohen Frequenzen ω ?

Zur Untersuchung dieser Frage betrachten wir die Bewegungen der atomaren Ladungen, also der Elektronen, um die Gleichgewichtslage in einem Atom ohne externes Feld. Die makroskopischen Felder bilden nur eine kleine Störung der starken atomaren Felder. Deshalb ist es eine gute Näherung die Auslenkung aus der Ruhelage in der harmonischen Näherung zu behandeln, also mit einer Rückstellkraft die proportional zur Auslenkung \vec{r} mit einer Konstanten K beschrieben wird

$$\text{Rückstellkraft: } \vec{F} = -K\vec{r} = -m\omega_0^2\vec{r}$$

dabei bezeichnet m den Massenparameter der atomaren Ladung und $\omega_0^2 = K/m$ entspricht der Frequenz dieser harmonischen Schwingung, ist also ein Charakteristikum des Materials. Außerdem können wir annehmen, dass es eine Reibungs- oder Dämpfungskraft proportional zur Geschwindigkeit der bewegten Ladung gibt und eben die Kraft durch das externe Feld, $q\vec{E}$, mit q für die Ladung. Die Bewegungsgleichung ergibt sich also als

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2\vec{r} - \gamma m \frac{d\vec{r}}{dt} + q\vec{E} \quad (6.62)$$

Multipliziert man diese Bewegungsgleichung mit q/m und ersetzt $q\vec{r}$ durch das Dipolmoment \vec{d} , so ergibt sich

$$\frac{d^2\vec{d}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{d}}{dt} + \omega_0^2\vec{d} = \frac{q^2}{m} \vec{E} \quad (6.63)$$

Im Fall der Elektrostatik ($d\vec{d}/dt = 0$) erhält man also

$$\vec{d} = \frac{q^2}{\omega_0^2 m} \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = N\vec{d} = \frac{Nq^2}{\omega_0^2 m} \vec{E} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$$

mit N die Dichte der Atome. Damit ergibt sich also für die elektrische Suszeptibilität χ , beziehungsweise für die Dielektrizitätskonstante

$$\chi = \epsilon - 1 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 \omega_0^2 m} \quad (6.64)$$

Im nächsten Schritt nehmen wir an, dass das externe elektrische Feld \vec{E} mit einer Frequenz ω schwingt und auch der Ladungsverteilung beziehungsweise dem Dipolmoment \vec{d} die entsprechende Frequenz aufzwingt (siehe Mechanik von erzwungenen Schwingungen)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t) \quad \text{und} \quad \vec{d} = \vec{d}_0 \exp(-i\omega t)$$

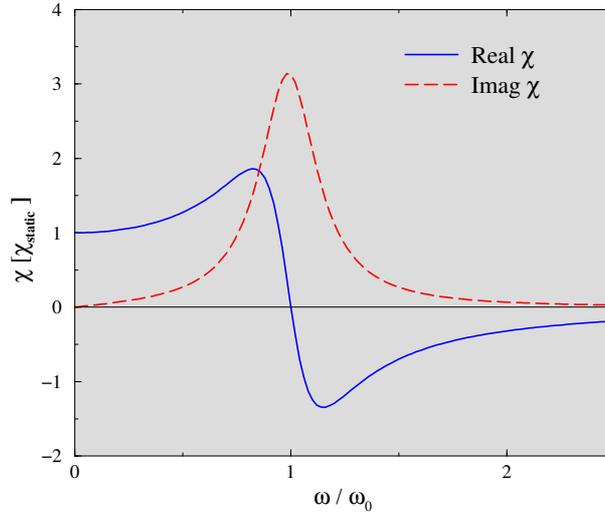


Abbildung 6.4: Real- und Imaginärteil der elektrischen Suszeptibilität nach (6.66).

Geht man mit diesen Ansatz in (6.63)

$$(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2) \vec{d} = \frac{q^2}{m} \vec{E}$$

ergibt sich daraus nach Abspalten des gemeinsamen Faktors $\exp(-i\omega t)$

$$\vec{d}_0 = \frac{q^2}{m \omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \vec{E}_0 = \frac{\chi(\omega)}{N} \vec{E}_0 \quad (6.65)$$

Die elektrische Suszeptibilität χ und damit auch die Dielektrizitätskonstante ε nehmen komplexe Werte an und hängen von der Frequenz des elektrischen Feldes ω ab mit

$$\begin{aligned} \text{Real } \chi &= N \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ \text{Imag } \chi &= N \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (6.66)$$

Diese Abhängigkeit des Real- und Imaginärteiles von χ von der Frequenz ω sind in Abb. 6.4 dargestellt. Im Grenzfall $\omega = 0$ ergibt sich wieder die reelle Suszeptibilität χ der Elektrostatik. Bei der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$ ist der Imaginärteil von χ und damit auch der Imaginärteil von ε maximal. Weiter oben in diesem Abschnitt haben wir gesehen, daß ein komplexer Wert von ε ein Zeichen für die Dämpfung und Absorption der elektromagnetischen Welle ist. Also werden die elektromagnetischen Wellen stets dann in einem Material besonders stark absorbiert werden, wenn die Frequenz in der Nähe einer Resonanzfrequenz ω_0 des Materials ist.

In diesem Bereich $\omega \approx \omega_0$ zeigt auch der Realteil von χ eine ausgeprägte Frequenzabhängigkeit. Für $\omega = \omega_0$ gilt $\chi = 0$. Für Werte von ω , die leicht oberhalb der Resonanzfrequenz liegen wird χ negativ, sodass ε Werte kleiner als 1 annimmt. Dies bedeutet aber daß die Phasengeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit ist. Auf dem ersten

Blick scheint es also die Möglichkeit zu geben, daß Informationen mit Geschwindigkeiten oberhalb der Lichtgeschwindigkeit verbreitet werden können. An dieser Stelle soll zu diesem Thema nur angemerkt werden, daß für die Ausbreitung von Information nicht die Phasengeschwindigkeit, sondern die Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpaketes relevant ist. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass χ nur für solche Werte von ω negativ wird, für die die Absorption, dargestellt durch den Imaginärteil von χ , groß ist.

Aus der Abb. 6.4 können wir weiter entnehmen, dass die Suszeptibilität χ und damit auch die Dielektrizitätskonstante ε und auch der Brechungsindex $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$ über weite Bereiche von ω mit ω und damit auch mit der Wellenzahl k anwächst. Es gilt also $dn/d\omega > 0$. Man spricht in diesem Fall von **normaler Dispersion**. Im Bereich der Resonanzfrequenzen ω_0 gibt es aber auch Bereiche anormaler Dispersion mit $dn/d\omega < 0$.

6.5 Erzeugung, Übertragung, Empfang von Radio- und Mikrowellen

Wir werden uns in diesem Abschnitt mit elektromagnetischen Wellen vom Radio- bis in den Ferninfrarotbereich beschäftigen. Eine Grobeinteilung der Wellenlängenbereiche haben wir bereits in Abschnitt 6.1 gegeben. Etwas genauer aufgeteilt spricht man von

- "Langwellen" für Frequenzen zwischen 30 kHz und 300 kHz (λ von 10 km bis 1 km),
- "Mittelwellen" für Frequenzen zwischen 0.3 MHz und 3 MHz (λ von 100 m bis 1 km),
- "Kurzwellen" für Frequenzen zwischen 3 MHz und 30 MHz (λ von 10 m bis 100 m),
- "Ultrakurzwellen" für Frequenzen zwischen 30 MHz und 300 MHz (λ von 1 m bis 10 m),
- "Dezimeterwellen" für Frequenzen zwischen 300 MHz und 3 GHz (λ von 10 cm bis 1 m),
- "Zentimeterwellen" für Frequenzen zwischen 3 GHz und 30 GHz (λ von 1 cm bis 1 m),
- "Millimeterwellen" für Frequenzen zwischen 30 GHz und 300 GHz (λ von 1 mm bis 1 cm),
- "Ferninfrarot" für Frequenzen zwischen 300 GHz und 30 THz (λ von 10 μ m bis 1 mm).

"Radiowellen" reichen bis 300 MHz; "Mikrowellen"³ erstrecken sich je nachdem, ob "Ferninfrarot" als eigener Bereich ausgewiesen wird oder nicht, von 300 MHz bis 300 GHz bzw. von 300 MHz bis 3 THz.

6.5.1 Erzeugung

Für die Erzeugung von Radiowellen haben wir bereits Schwingkreise mit integrierten Röhrenverstärkern oder Transistoren kennengelernt. Mit Feldeffekttransistoren können Frequenzen von einigen 10 GHz erreicht werden, wenngleich mit relativ geringer Leistungsabgabe.

Für die Erzeugung von Mikrowellen kennt man eine Reihe von Methoden, von denen wir nur eine Auswahl kurz ansprechen wollen.

Anregung von Hohlraumresonatoren durch Elektronenstrahlen

Ein vielfach genutztes Prinzip besteht darin, **Elektronenstrahl-Pakete** durch einen oder mehrere **Hohlraumresonatoren** laufen zu lassen. Im Resonator oszilliert eine elektromagnetische Stehwelle, die einerseits Energie aus den Elektronenstrahlpaketen aufnimmt und andererseits die Elektronenpakete stabilisiert. Bevor wir die entsprechenden Oszillatoren genauer diskutieren, wollen wir zunächst kurz Hohlraumresonatoren ansprechen:

Einschub: Hohlraumresonatoren

Der einfachste Hohlraumresonator ist ein von metallischen Wänden begrenzter **Quader**. Die Länge des Quaders in x -, y - und z -Richtung sei (L_x, L_y, L_z) . Im Quader sei Luft.

³Besonders erwähnenswert ist $f = 2.45$ GHz. Hier arbeiten die haushaltsüblichen Mikrowellenherde.

Elektromagnetische Wellen bilden bzgl. allen Raumrichtungen Stehwellen aus, wobei das elektrische Feld jeweils wie im statischen Fall senkrecht auf den Metalloberflächen stehen muss.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass das \vec{E} -Feld in die y -Richtung zeigt, d. h. $\vec{E} = (0, E_y, 0)$. Für E_y gilt dann:

$$E_y = E_y^0 \cdot \sin\left(n_x \pi \frac{x}{L_x}\right) \sin\left(n_z \pi \frac{z}{L_z}\right) \quad (6.67)$$

Hierbei sind n_x, n_z ganze Zahlen > 0 . E_y bildet in x -Richtung eine Stehwelle mit $L_x = n_x \lambda/2$, d. h. $k_x = n_x \pi/L_x$. Analog ergibt sich $k_z = n_z \pi/L_z$. \vec{E} verschwindet an den 4 vertikalen Quaderwänden und steht senkrecht auf Boden und Deckel. Der kleinstmögliche Zahlenwert für n_x und n_z ist 1. Dies ergibt die "TE101-Mode", wobei "TE" für "transversal⁴ elektrisch" steht (das E -Feld hat keine Komponente in z -Richtung) und die Zahlen die Zahl der Halbwellen in x -, y - und z -Richtung zählen. Die Magnetfeldlinien bilden für diese Moden geschlossene Linien in der (x, z) -Ebene. Im Fall der TE101-Mode ist der Betrag des B -Feldes an den Resonatorwänden maximal und hat eine Nullstelle in der Mitte des Resonators (vgl. Abb. 6.5).

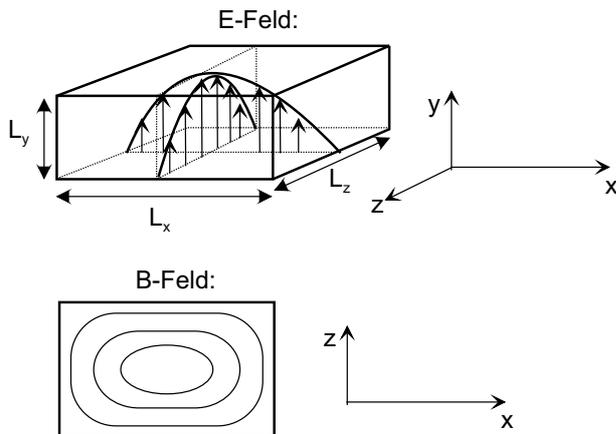


Abbildung 6.5: Elektrisches und magnetisches Feld im quaderförmigen Hohlraumresonator in der TE101-Mode.

Analog definiert man Moden mit n_x, n_y, n_z Halbwellen in (x, y, z) -Richtung). Für $n_y \neq 0$ hat das elektrische Feld ebenfalls eine Komponente in x -Richtung. Im quaderförmigen Hohlraumresonatoren sind ebenfalls Schwingungsmoden erlaubt, bei denen die z -Komponente des \vec{B} -Felds verschwindet und die z -Komponente des \vec{E} -Felds endlich ist ("Transversal-magnetische Moden", "TM-Moden"). Hier ist im wesentlichen gegenüber den TE-Moden \vec{E} und \vec{B} vertauscht; die Maxima der \vec{B} -Felder liegen zudem an den Wänden (d. h. Vertauschung $\sin() \rightarrow \cos()$ in 6.5).

Wir wollen diese Nomenklatur hier nicht weiter vertiefen, Entscheidend ist aber, dass der Resonator analog zu den in Abschnitt 5.2 behandelten Schwingkreisen bei ganz bestimmten⁵ Frequenzen schwingen kann (d. h. elektromagnetische Stehwellen aufbauen kann). Die

⁴Wir werden später Hohlleiter mit rechteckförmigem Querschnitt betrachten, bei denen sich die Welle in z -Richtung ausbreiten kann. "Transversal" bedeutet in diesem Sinne senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des gedachten Rechteckhohlleiters.

⁵Bei Berücksichtigung der Dämpfung der Schwingungen durch Wirbelstromverluste in den Resonatorwänden erhält man eine endliche Frequenzbreite $\Delta\omega$, die sich wie bei Schwingkreisen durch einen

Frequenzen sind gegeben durch:

$$\omega = ck = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = c\sqrt{\left(\frac{\pi n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_z}{L_z}\right)^2}. \quad (6.68)$$

Analog schwingen auch anders geformte Hohlraumresonatoren bei bestimmten Frequenzen.

Klystrons

Beim Klystron lässt man im Prinzip zunächst einen Elektronenstrahl durch einen ersten Resonator laufen, in dem bereits elektromagnetische Wellen angeregt wurden. Das im Resonator oszillierende E -Feld bildet aus dem Elektronenstrahl Pakete (etwa in Analogie zu einer Ampel, die aus dem Fahrzeugstrom Pakete bildet). Die Pakete laufen in einen zweiten (oder weitere) Resonator und geben Energie an das dort oszillierende elektromagnetische Feld ab. Das Prinzip ist in Abb. 6.6 veranschaulicht.

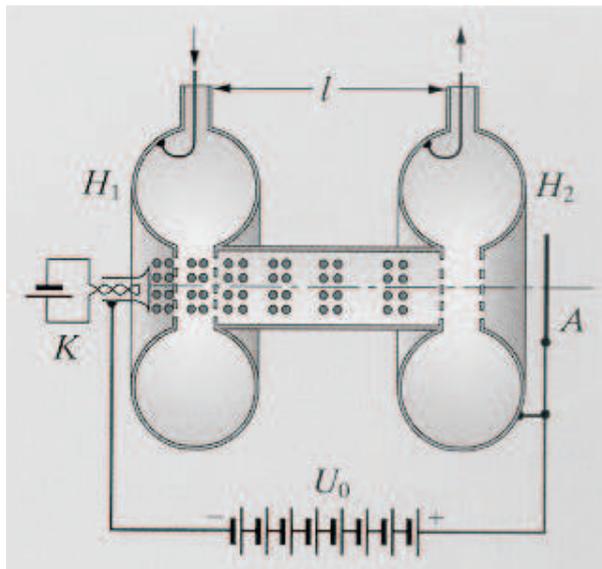


Abbildung 6.6: Prinzip des Klystrons (aus: Gerthsen Physik, Abb. 8.33)

Beim Reflexklystron wird nur ein Hohlraumresonator verwendet, in den die Elektronenpakete zurückreflektiert werden (Abb. 6.7). Die Elektronen werden hierbei zunächst aus der Kathode in den Resonator hinein- bzw. durch ihn hindurchbeschleunigt, durchlaufen dann eine Gegenspannung und passieren wiederum den Resonator.

Analog lassen sich Klystrons mit mehreren Resonatoren (z. B. "Dreikammerklystron") herstellen. Klystrons können Frequenzen im Bereich einiger GHz bis ca. 100 GHz erzeugen. Bei **Wanderfeldröhren** führt ein Elektronenstrahl ebenfalls Energie resonatorähnlichen Strukturen zu. Dabei "wandert" die elektromagnetische Welle entlang der Resonatoren. Beispiele sind der **Rückwärtswellen-Oszillator** (backward wave oscillator, BWO)

Gütefaktor $Q = \omega/(2\Delta\omega)$ beschreiben lässt (die allgemeine Definition des Gütefaktors ist: $Q = 2\pi \cdot (\text{im Resonator gespeicherte Energie})/(\text{Energieverlust pro Schwingungsperiode})$). Je höher der Gütefaktor ist, desto enger ist einerseits das Frequenzintervall, das angeregt werden kann, desto höher wird aber andererseits die Amplitude des elektrischen bzw. magnetischen Felds.

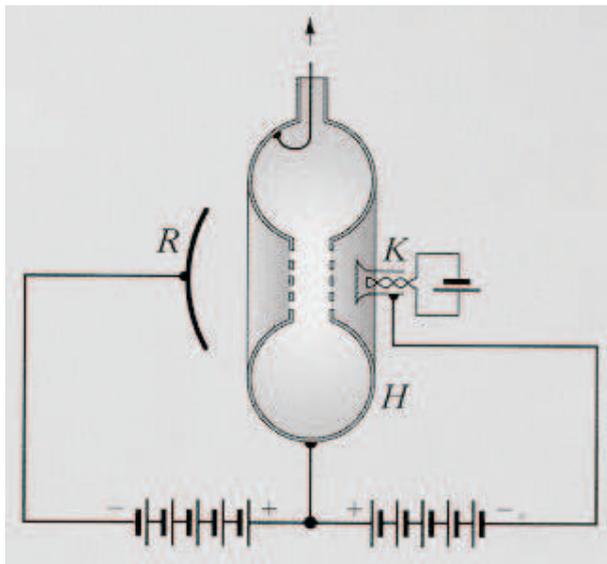


Abbildung 6.7: Prinzip des Reflexklystrons (aus: Gerthsen Physik, Abb. 8.34)

oder das **Magnetron**. Beim BWO durchläuft der Elektronenstrahl eine Kette von resonatorähnlichen Elementen und regt dabei eine Welle an, die beim BWO entgegen der Elektronenstrahlrichtung den Oszillator verlässt (Abb. 6.8)

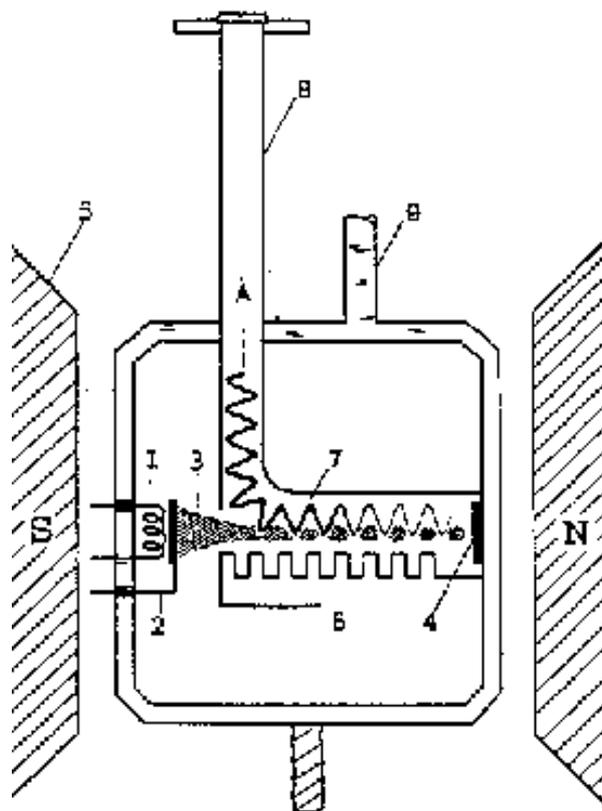


Abbildung 6.8: Rückwärtswellen-Oszillator; Quelle: Arbeitsgruppe M. Dressel, Physikalisches Institut, Univ. Stuttgart, <http://www.pi1.physik.uni-stuttgart.de/indexjs.html>

Mit BWO's können bei hoher Leistung Frequenzen bis ca. 1 THz erzeugt werden.

Beim Magnetron (Abb. 6.9) wird durch ein senkrecht zur Rotationsachse stehendes Magnetfeld der Elektronenstrahl auf eine Kreisbahn gelenkt und gibt dort Energie an eine Serie von Resonatoren ab. Abb. 6.9(a) zeigt die Elektronenbahnen im Magnetron, Abb. 6.9(b) einige Bauformen von Magnetrons. Die rosettenförmige Bahn rotiert um die Achse des Magnetrons und regt in den Resonatoren des Magnetrons eine mit der gleichen Frequenz rotierende Welle an.

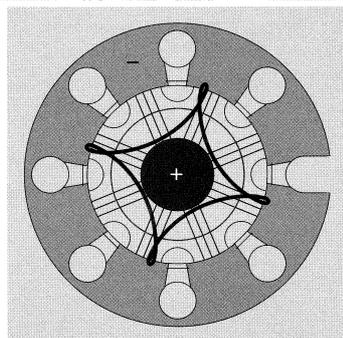
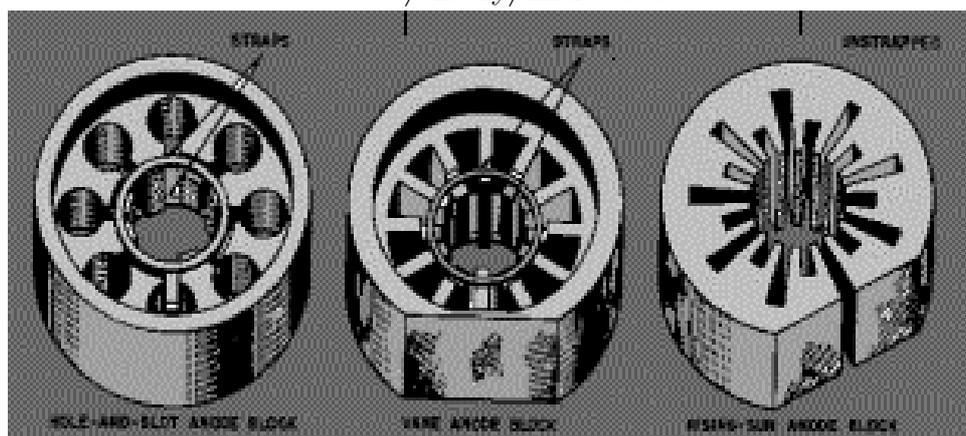


Abbildung 6.9: Magnetrons (links) Elektronenbahn (dicke Linie) im Magnetron; (unten) technische Ausführungen von Magnetrons. Quellen: (links) aus Gerthsen Physik, Abb. 8.36; (unten) aus: <http://www.furf.science.cmu.ac.th/theory/microwave>



Anregung durch Bauelemente mit negativem differentiellen Widerstand

Einige Bauelemente in der Mikroelektronik besitzen Strom-Spannungs-Charakteristiken, bei denen Bereiche negativen differentiellen Widerstands $r = dU/dI < 0$ auftreten. Eine Kennlinie dieser Art ist schematisch in Abb. 6.10 gezeigt. Integriert man ein solches Bauelement in einen Schwingkreis und wählt man eine Vorspannung U_0 so, dass der statische Strom $I_0(U_0)$ sich gerade in einem Bereich $r < 0$ befindet, so "sehen" Stromänderungen ΔI um diesen Wert I_0 diesen negativen Widerstand r , der auf Grund seines Vorzeichens Schwingungen antreibt statt dämpft. Beispiele für Halbleiter-Bauelemente, die solche Strom-Spannungs-Charakteristiken besitzen, sind **Schottky-, Gunn- oder Tunneln**dioden.

Auf die Ursachen für das Auftreten des negativen differentiellen Widerstands können wir hier nicht im Detail eingehen. Für den Fall der Gunn-Diode (Material: GaAs) sei beispielhaft erwähnt, dass hier die Beweglichkeit der Ladungsträger in einem gewissen E -Feld-Bereich stark abnimmt und somit der mit wachsender Spannung U der Strom fällt statt ansteigt. In der Gunn-Diode bilden sich als Resultat domänenartige Zonen abwechselnd hoher und niedriger Elektronendichte aus, die sich durch die Diode bewegen.

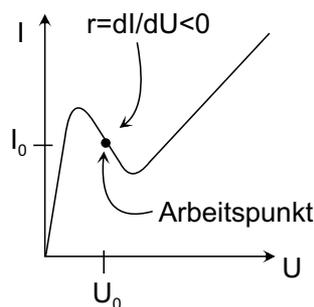


Abbildung 6.10: Kennlinien mit negativem differentiellen Widerstand zur Erzeugung von Hochfrequenzoszillationen.

Parametrische Verstärkung

Das Prinzip der parametrischen Verstärkung hatten wir bereits in Abschnitt 5.2 kennengelernt. Wir besprechen hier ein Beispiel, bei dem die Kapazität eines Schwingkreises mit der Wechselspannung U "pumpt". Man verwendet hierzu **Varaktordioden** (spezielle halbleitende pn-Übergänge). Deren Kapazität hängt von der angelegten Spannung ab, $C = C(U)$, s. Abb. 6.11. Man hat damit ein Bauelement, mit dem sich wiederum ein parametrischer verstärkender Schwingkreis realisieren lässt.

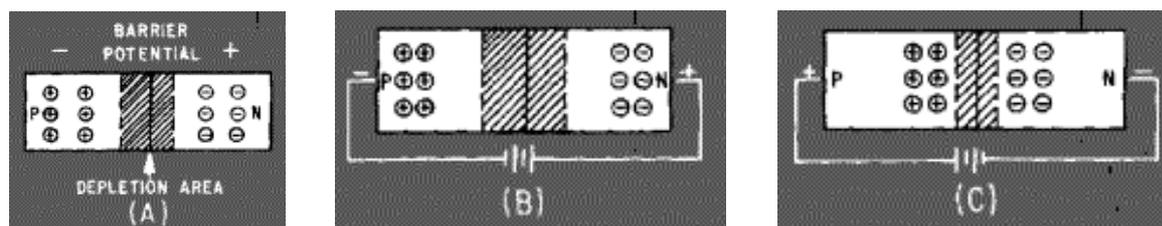


Abbildung 6.11: Varaktordiode;

Abb. aus: <http://www.fnrf.science.cmu.ac.th/theory/microwave/>

6.5.2 Übertragung

Trägerwellen:

Akustische Signale $A_0(t)$ (z. B. ein Musikstück) nehmen einen Frequenzbereich von ca. 1 Hz bis einigen 10 kHz ein. Im Prinzip kann man dieses Signal direkt übertragen (ein Mikrofon arbeitet auf diese Weise). Für die Übertragung auf lange Distanzen über freie elektromagnetische Wellen hat man aber zwei Schwierigkeiten:

- die Wellenlängen sind extrem groß; man würde äußerst hohe Sendemasten benötigen
- sind viele Sender vorhanden, so überlagern sich die Signale dieser Sender

Die Lösung der obigen Probleme besteht darin, das Ausgangssignal $A_0(t)$ zu höheren Frequenzen auf eine "Trägerwelle" zu transformieren. Hierzu existieren zwei Möglichkeiten:

- **Amplitudenmodulation:** Man sendet ein Signal der Form $A(t) = A_0(t) \cdot \cos(\omega_t t)$. Hierbei ist ω_t bzw. $f_t = \omega_t/2\pi$ die Frequenz der Trägerwelle. Ein Fourierspektrum

$A(\omega)$ des Signals $A(t)$ hat eine endliche Intensität um die Trägerfrequenz ω_t herum, wobei die "Bandbreite" $\Delta\omega$ gleich der Bandbreite des Ausgangssignals (einige kHz in unserem Beispiel) ist.

- **Phasenmodulation:** Hier ist das Signal von der Form: $A(t) = \hat{A} \cdot \cos[\omega_t t + \delta(t)]$, wobei die Phase $\delta(t)$ proportional zum Ursprungssignal $A_0(t)$ ist. Auch bei dieser Methode wird das ursprüngliche Signal auf die Trägerfrequenz f_t transformiert.

Abb. 6.12 zeigt das Prinzip mittels der ersten Takte von Beethovens 5. Sinfonie. In Abb. 6.13 ist der Unterschied von Amplituden- und Phasenmodulation dargestellt.

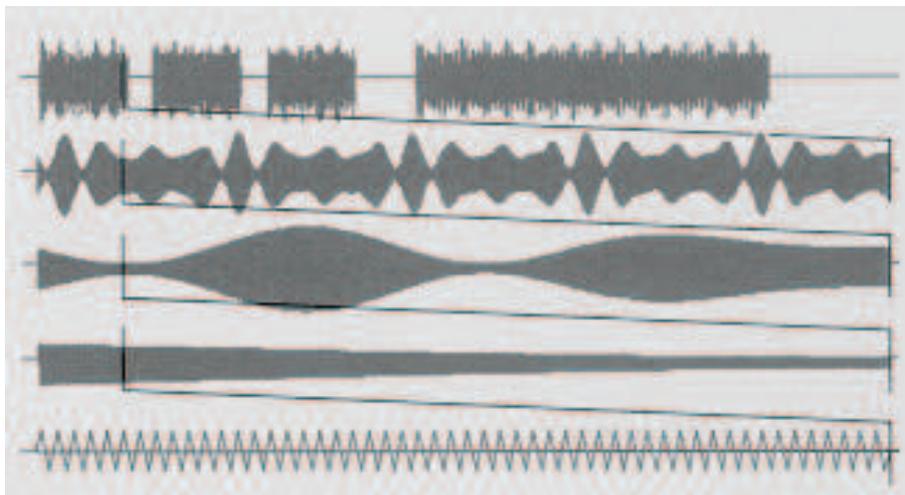


Abbildung 6.12: Übertragung mit Trägerwellen: Signal (elektrische Feldstärke) von Beethovens 5. Sinfonie als Funktion der Zeit. Aus: Gerthsen Physik, Abb. 7.141.

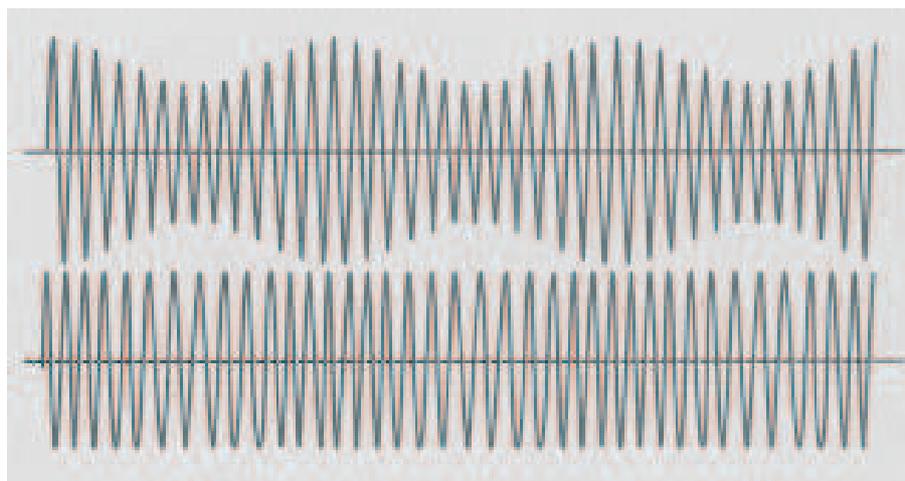


Abbildung 6.13: Trägerwelle mit (oben) Amplituden- bzw. (unten) Phasenmodulation (E -Feld als Funktion der Zeit). Aus: Gerthsen Physik, Abb. 7.143.

Übertragungsmethoden: Als Übertragungsmethoden der elektrischen Signale können frei abgestrahlte Wellen oder **geführte** Wellen gewählt werden.

Freie Abstrahlung:

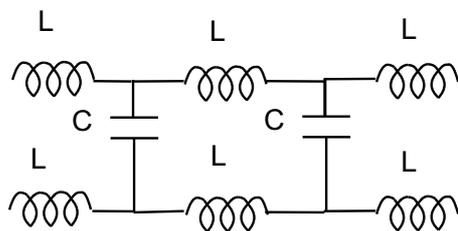
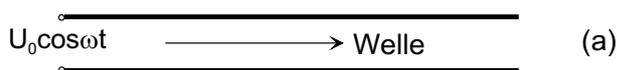
Die freie Abstrahlung (in die Luft oder ins Vakuum) haben wir bereits mehrfach kennengelernt. Hierbei wollen wir noch auf zwei Besonderheiten eingehen:

- mit Langwellen kann man "um die Erde herum" funken. Der Grund besteht darin, dass in den oberen Atmosphärenschichten genügend freie Ladungsträger vorhanden sind, um diese Schichten als metallische "Spiegel" wirken zu lassen. Metalle reflektieren elektromagnetische Wellen bis zu einer gewissen Maximalfrequenz (der "Plasmafrequenz"), die proportional zur Wurzel aus der Dichte der freien Ladungsträger (d. h. Elektronen im Metall) ist. In Metallen liegt die Plasmafrequenz typischerweise im UV-Bereich. In der Ionosphäre liegt die Plasmafrequenz im 100 kHz-Bereich.
- beim Mobilfunk werden die (Handy-)Signale zunächst an eine Basisstation übertragen und von dort über einen oder mehrere Satelliten zurück auf eine irdische Basisstation übertragen.

Geführte Wellen: Doppelleitung (Lecherleitung)

Für die geführte Abstrahlung existieren eine Reihe von Möglichkeiten. Wir stellen einige exemplarisch vor:

Die **Lecherleitung** besteht aus zwei parallel zueinander gespannten Drähten (Abstand $d \ll \lambda$), entlang derer sich die elektromagnetische Welle ausbreitet⁶(Abb. 6.14 (a)). Da $d \ll \lambda$ ist, können wir kurze Segmente dieses Leitungstyps näherungsweise durch zwei Induktivitäten und eine dazwischen geschaltete Kapazität charakterisieren⁷ (s. Abb. 6.14 (b)). Wir wollen dieses Ersatzschaltbild kurz charakterisieren und eine Wellengleichung,



(b) Abbildung 6.14: *Lecherleitung*: (a) *Geometrie*, (b) *näherungsweise Beschreibung durch Induktivitäten und Kapazitäten*.

die sogenannte "**Telegraphengleichung**" aufstellen. In Abb. 6.15(a) sind die im folgenden verwendeten Bezeichnungen eingetragen. Der entlang des oberen Drahtes fließende Strom sei $I_1(x)$, der entlang des unteren Drahtes fließende Strom sei $I_2(x)$. Über die Kapazität am Ort x fließe der Strom $I_K(x)$. Über dieser Kapazität falle die Spannung $U(x)$ ab.

⁶Bei mikroelektronischen Schaltungen verwendet man analog zwei aufgedampfte leitfähige Streifen (Streifenleitung, Mikrostreifenleitung)

⁷In Serie zu den Induktivitäten könnten wir noch einen Widerstand R berücksichtigen, den wir hier aber aus Gründen der Einfachheit ignorieren.

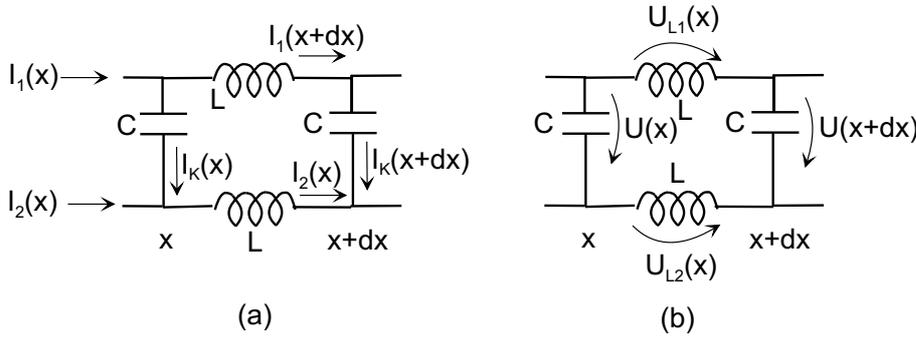


Abbildung 6.15: Zur Herleitung der Telegraphengleichungen

Mit der Kirchhoffschen Knotenregel finden wir:

$$I_1(x) = I_K(x) + I_1(x + dx) = C\dot{U}(x) + I_1(x + dx) \quad (6.69a)$$

$$I_2(x) = -I_K(x) + I_2(x + dx) = -C\dot{U}(x) + I_2(x + dx) \quad (6.69b)$$

Wir definieren $I(x) = [I_1(x) - I_2(x)]/2$. I ergibt gerade den am Ort x in den beiden Leitungen in entgegengesetzte Richtung fließenden Strom. Die Subtraktion der beiden Gleichungen (6.69a) und (6.69b) ergibt:

$$I(x) = C\dot{U}(x) + I(x + dx). \quad (6.70)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{I(x + dx) - I(x)}{dx} \equiv \frac{dI}{dx} = -\frac{C}{dx}\dot{U}(x) = \tilde{C}\dot{U}(x). \quad (6.71)$$

Hierbei haben wir mit \tilde{C} die Kapazität pro Längenintervall dx bezeichnet.

Wir wenden jetzt die Maschenregel an (vgl. Abb. 6.15(b)):

$$U(x) + L\dot{I}_2(x) = U(x + dx) + L\dot{I}_1(x) \quad (6.72)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{U(x + dx) - U(x)}{dx} \equiv \frac{dU}{dx} = -\frac{2L}{dx} \frac{I_1 - I_2}{2} = -\frac{2L}{dx} \cdot I(x) =: -\tilde{L}I(x) \quad (6.73)$$

Hierbei haben wir mit \tilde{L} die Induktivität pro Länge dx bezeichnet.

Wir haben jetzt also:

$$\frac{dI}{dx} = -\tilde{C}\dot{U} \quad (6.74a)$$

$$\frac{dU}{dx} = -\tilde{L}\dot{I}. \quad (6.74b)$$

$$(6.75)$$

Wir leiten (6.74b) nach x ab, setzen (6.74a) ein und finden:

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \tilde{L}\tilde{C} \cdot \ddot{U} = 0. \quad (6.76)$$

Analog finden wir durch Ableiten von (6.74a) nach x und Einsetzen von (6.74b):

$$\frac{d^2 I}{dx^2} - \tilde{L}\tilde{C} \cdot I = 0. \quad (6.77)$$

(6.76) und (6.77) sind die Telegraphengleichungen. Am Anfang der Leitung (er sei bei $x = 0$) müssen sie noch durch Randbedingungen ergänzt werden, z. B. $U(x = 0) = \hat{U}_0 \cos \omega t$; $I(x = 0) = 0$.

Die Lösungen $I(x, t)$ und $U(x, t)$ sind ebene Wellen (d. h. $U = U_0 \exp[i(kx - \omega t)]$; $I = I_0 \exp[i(kx - \omega t)]$) mit einer Wellengeschwindigkeit

$$v_{\text{Welle}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{L}\tilde{C}}}. \quad (6.78)$$

Wir wollen hier darauf verzichten, \tilde{L} und \tilde{C} explizit auszurechnen. Für parallelgespannte Drähte findet man unabhängig von der genauen Form des Drahtes:

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{L}\tilde{C}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}. \quad (6.79)$$

Die Welle breitet sich also entlang des Drahtes mit der gleichen Geschwindigkeit aus wie die freie elektromagnetische Welle im gleichen Medium, d. h. $v_{\text{Welle}} = c_{\text{vak}}/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

In welcher Richtung stehen \vec{E} und \vec{B} ?

Auf Grund des Ersatzschaltbild wird klar, dass das \vec{E} -Feld zwischen den Drähten in der durch die Drähte aufgespannten Ebene verläuft. Der Strom $I(x)$ beschreibt gerade Ringströme zwischen den beiden Drähten. Das \vec{B} -Feld steht also senkrecht zu der von den Drähten aufgespannten Ebene, ist also wie bei der freien elektromagnetischen Welle senkrecht zu \vec{E} und zur Ausbreitungsrichtung. Ferner ist B maximal, wenn E minimal ist und umgekehrt. Die Situation ist in Abb. 6.16 nochmals graphisch skizziert.

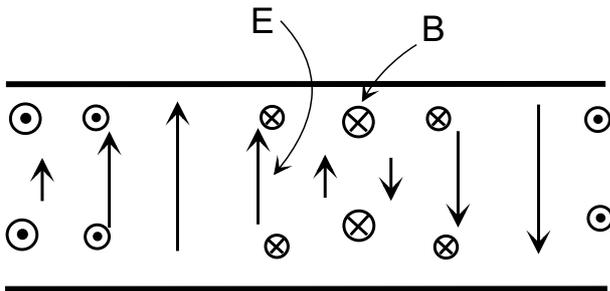


Abbildung 6.16: Elektrisches und magnetisches Feld in der Lecherleitung.

Kommen wir nochmals zurück auf die Ströme $I(x, t)$ bzw. Spannungen $U(x, t)$. Mit dem Ansatz $U = U_0 \exp[i(kx - \omega t)]$, $I = I_0 \exp[i(kx - \omega t)]$ finden wir aus (6.74a) und (6.74b):

$$ikU = i\tilde{L}\omega I \quad (6.80a)$$

$$ikI = i\omega\tilde{C}U \quad (6.80b)$$

Dividieren wir beide Gleichungen, so erhalten wir:

$$\frac{U}{I} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{C}} \cdot \frac{I}{U} \quad (6.81)$$

bzw:

$$\frac{U}{I} = \sqrt{\frac{\tilde{L}}{\tilde{C}}} = Z_W \quad (6.82)$$

Die Größe Z_W hat die Dimension eines Widerstand und wird **Wellenwiderstand** genannt. Da \tilde{L} proportional zu $\mu_0\mu$ und \tilde{C} proportional zu $\varepsilon_0\varepsilon$ ist, können wir auch schreiben:

$$Z_W = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot (\text{Geometriefaktor}). \quad (6.83)$$

Für zwei parallele zylindrische Drähte mit Radius r und Abstand d wird dieser Geometriefaktor gleich $\ln(d/r)/\pi$. Für $r = 0.5$ mm, $d = 9$ cm (diese Geometrie verwenden wir im Experiment, s. unten) beträgt dieser Faktor ca. 1.65.

Die Größe $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = Z_0 = 377 \Omega$ wird auch **Wellenwiderstand des Vakuums** genannt. Sie spielt bei der freien Abstrahlung von Wellen eine große Rolle.

Für die obigen Zahlenwerte für d und r finden wir mit $\mu = \varepsilon = 1$ für unsere Lecherleitung einen Wellenwiderstand von ca. 620 Ω .

Im Experiment betreiben wir eine mehrere Meter lange Lecherleitung mit $d = 9$ cm. Wir regen die Leitung mit dem 150 MHz-Oszillator an. Am anderen Ende stellen wir einen Reflektor auf, der die Drahtenden leitend miteinander verbindet (Kurzschluss). Entlang der Leitung baut sich eine Stehwelle auf. Wir messen wiederum \vec{B} und \vec{E} und finden zwischen den Drähten ein Feldprofil wie in Abb. 6.16. Die Amplituden von \vec{E} und \vec{B} nehmen bereits wenige cm vom Draht entfernt stark ab.

Was wäre passiert, wenn wir anstelle der elektrisch sehr gut leitenden Platte ($R \approx 0$) am Drahtende eine Platte mit Widerstand R angebracht hätten? Wir hätten gesehen, dass für $R = Z_W$ die gesamte Leistung in der Platte absorbiert worden wäre, d. h. keine rückreflektierte Welle entsteht. Dies wird ausgenutzt, um Leitungen "abzuschließen". Den Widerstand R bezeichnet man entsprechend auch als Abschlusswiderstand. Würden wir umgekehrt freie Drahtenden bei variablem d betrachten, so stellten wir fest, dass die Drahtenden maximal abstrahlen, wenn Z_W gleich Z_0 , also dem Wellenwiderstand des Vakuums ist. In diesen beiden Effekten wird der Sinn des Begriffs "Wellenwiderstand" deutlich: "Angepasste" Antennen sollten für eine optimale Abstrahlung den gleichen Wellenwiderstand des sie umgebenden Mediums haben. Kabelenden sollten mit $R = Z_W$ "abgeschlossen" sein. Verbindet man zwei unterschiedliche Leitungen (oder Leitungen und Antennen etc.), so sollten deren Wellenwiderstände identisch sein.

geführte Wellen: Koaxialkabel

Koaxialkabel bestehen aus einem Innenleiter und einem konzentrischen Außenleiter, die voneinander durch eine Isolatorschicht voneinander getrennt sind. Bei Radiofrequenzen verwendet man **BNC-Kabel**, bei Mikrowellenfrequenzen sog. "**Semirigid-Kabel**" (Leiter: Cu; Isolatorschicht: Teflon). Semirigid-Kabel können je nach Ausführung bis ca. 20–40 GHz Signale übertragen. Mathematisch behandelt man Koaxialkabel analog zur Doppelleitung, d. h. man erhält wiederum Telegraphengleichungen, die die Wellenausbreitung beschreiben. Es ist weiterhin zu beachten, dass E -Feld und B -Feld auf den Zwischenraum zwischen den beiden Leitern beschränkt sind, also nicht aus dem Kabel "herauslecken". Der Wellenwiderstand der Kabel ist üblicherweise auf den Wert 50Ω ausgelegt.

Geführte Wellen: Hohlleiter

Hohlleiter werden eingesetzt, um Mikrowellen über relativ kurze Distanzen (cm bis m) zu übertragen. Typische Frequenzen f reichen von wenigen GHz bis zu einigen 100 GHz. Wir diskutieren beispielhaft Reckeckhohlleiter, deren Geometrie in Abb. 6.17 gezeigt ist.

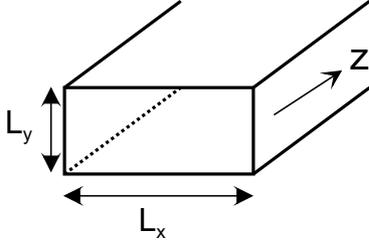


Abbildung 6.17: Rechteckhohlleiter.

Der Hohlleiter sei in y -Richtung ausgedehnt. In x - und y -Richtung bildet sich wie beim quaderförmigen Resonator eine Stehwelle (n_x bzw. n_y Halbwellen auf den Querschnitt L_x bzw. L_y) aus. Wenn das elektrische Feld keine Komponente in der Ausbreitungsrichtung z besitzt, spricht man von TE-Moden (je nach Zahl der Halbwellen in x - und y -Richtung TE₁₀, TE₁₁ usw. -Moden). Falls das Magnetfeld keine z -Komponente besitzt, spricht man von TM-Moden.

Kreisfrequenz und Wellenzahlvektor hängen wiederum über

$$\omega = c|\vec{k}| = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (6.84)$$

zusammen. Hierbei sind k_x und k_y auf diskrete Werte festgelegt: $k_x = n_x\pi/L_x$, $k_y = n_y\pi/L_y$, mit $n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots$

Man erhält also:

$$\omega = c|\vec{k}| = c\sqrt{\left(\frac{\pi n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{L_y}\right)^2 + k_z^2}. \quad (6.85)$$

Aufgelöst nach k_z ergibt dies:

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi n_x}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{\pi n_y}{L_y}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{\text{grenz}}^2}{c^2}. \quad (6.86)$$

Für Frequenzen kleiner als ω_{grenz} ist $k_z^2 < 0$ und damit k_z imaginär. Die Wellen werden exponentiell gedämpft. Eine Ausbreitung entlang des Hohlleiters kann erst für $\omega > \omega_{\text{grenz}}$ stattfinden. Es sei $L_x < L_y$. Die Mode mit der niedrigsten Grenzfrequenz ist dann die TE₀₁-Mode mit einer Grenzfrequenz ω_{grenz} von $c\pi/L_y$. Oberhalb ω_{grenz} existiert ein bestimmtes Frequenzband, in dem sich nur diese eine Mode ausbreiten kann. Entsprechend dieses Bandbereichs klassifiziert man die Hohlleiter, wobei Begriffe wie X-Band (f von 8 bis 12 GHz), K-Band (f von 18 bis 26 GHz) verwendet werden (die Bezeichnungen sind historisch bedingt; einige Bezeichnungen sind in Tab. 6.1 aufgelistet).

Aus der Beziehung

$$\omega = c\sqrt{k_z^2 + \omega_{\text{grenz}}^2/c^2} \quad (6.87)$$

sehen wir weiterhin, dass sich elektromagnetische Wellen im Hohlleiter *nicht* mit c ausbreiten.

Für die **Phasengeschwindigkeit** gilt $v_{\text{ph}} = \omega/k$, für die **Gruppengeschwindigkeit**⁸

⁸Wellenpakete und damit "Information" breiten sich mit v_{gr} aus.

Frequenzband	Frequenzen f [GHz]
L	1-2
S	2-4
C	4-8
X	8-12
Ku	12-18
K	18-26
Ka	26-40
U	40-60

Tabelle 6.1: Einige Mikrowellen-Frequenzbänder und ihre Bezeichnungen

$v_{gr} = d\omega/dk$. Aus (6.87) erhalten wir:

$$\frac{\omega}{k_z} = c \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{\text{grenz}}}{k_z c} \right)^2} > c \quad (6.88a)$$

und

$$\frac{d\omega}{dk_z} = c \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2 + \omega_{\text{grenz}}^2/c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + (\omega_{\text{grenz}}/k_z c)^2}} < c \quad (6.88b)$$

Das Produkt $v_{ph}v_{gr}$ ergibt gerade c^2 (man kann zeigen, dass dies allgemein gilt).

Medien mit $v_{ph} \neq v_{gr}$ heißen **”dispersiv”**.

Neben Hohlleitern und Koaxialkabel existieren eine Vielzahl weiterer Mikrowellenkomponenten wie Abschwächer, Leistungsteiler usw. Einige Beispiele sind in Abb. 6.18 gezeigt.



(a) Ab-
schwächer



(b) Resistiver
Abschluss



(c) Stecker



(d) Koppler



(e) DC Blocker



(f) Kabel



(g) Leistungstei-
ler



(h) Phasen-
schieber



(i) Verbinder
Endstücke



(j) Adapter

Abbildung 6.18: Beispiele für Mikrowellenbauteile.

Nach: <http://ebiz.midwest-microwave.com/cgi-bin/mmb2c/main.html>

6.6 Empfang

6.6.1 Antennen

Zum Empfang von Radio- oder Mikrowellen existieren eine Vielzahl unterschiedlicher Antennenformen. Einige Beispiele (Stabantenne, Ringantenne) hatten wir bereits kennengelernt. Abb. 6.82 zeigt als weiteres Beispiel eine "logarithmisch-periodische Antenne". Dieser Antennentyp kann Mikrowellen über einen weiten Frequenzbereich empfangen. Die im Bild in horizontaler Richtung verlaufenden dreieckförmigen Strukturen bilden eine dipolartige Struktur; die stabförmigen Gebilde stellen Resonatorelemente dar, die Resonanzen bei unterschiedlichen Frequenzen haben.

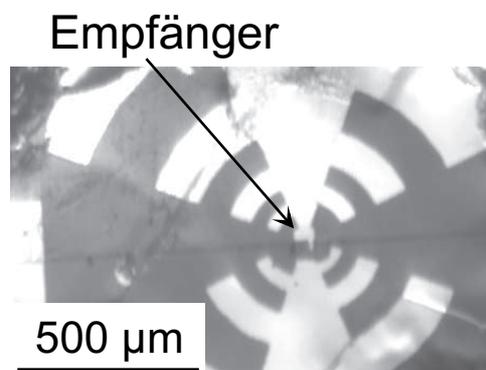


Abbildung 6.19: *Logarithmisch-Periodische Antenne (schwarze Struktur) mit integriertem Empfänger. Die hier gezeigte Anordnung wurde benutzt, um Mikrowellen im Bereich einiger 100 GHz bis zu einigen THz zu detektieren. [“Far Infrared Response of Intrinsic Josephson Junctions”, S. Rother, R. Kleiner, P. Müller, M. Darula, Y. Kasai, and K. Nakajima, Physica C 341, 1565 (2000).]*

Die logarithmisch-periodische Antenne soll beispielhaft zeigen, dass Antennen (bzw. Mikrowellenbauteile im allgemeinen) oft eine relativ nichttriviale Form haben. Man kann derartige Gebilde mit geeigneten numerischen Programmen optimieren. Allerdings müssen Feinabstimmungen nach wie vor manuell durch "ausprobieren" gemacht werden.

6.6.2 Homodyn- und Heterodyn-Empfang

Im einfachsten Fall wird ein Mikrowellensignal bei der Frequenz f_S ("Signalfrequenz") detektiert und elektronisch verarbeitet ("Homodyn-Prinzip"). Dieses Prinzip funktioniert, solange genügend schnelle Schaltkreise zur Verfügung stehen bzw. f_S genügend klein ist. Für Frequenzen f oberhalb einiger GHz verwendet man dagegen das **Heterodynprinzip**. Hier wird das Signal von der Frequenz f_S auf die niedrigere "Zwischenfrequenz" f_{ZF} umgesetzt und weiterverarbeitet. Diese Umsetzung erfordert einen "Mischer". Der Mischer empfängt neben dem Signal eine zweite Frequenz f_{LO} , die von einem "Lokaloszillator" erzeugt wird und erzeugt die Frequenz $f_{ZF} = |f_S - f_{LO}|$. Dieses Prinzip wird beispielsweise beim Satellitenempfang eingesetzt (f_S ca. 10 GHz, f_{ZF} ca. 1 GHz).

Ein Mischer ist ein Bauelement mit einer nichtlinearen Strom-Spannungs-Charakteristik $I(U)$ (z. B. Diode). Zum qualitativen Verständnis betrachten wir eine Taylor-Entwicklung von $I(U)$: $I(U) = I_0 + aU + bU^2 + \dots$

Am Mischer liege die Spannung $U_1 \cos(2\pi f_S t) + U_2 \cos(2\pi f_S t)$ an. Der Strom I erhält über den quadratischen Term der Taylor-Entwicklung einen Anteil

$$\cos(2\pi f_S t) \cos(2\pi f_S t) = \frac{1}{2} \left[\cos [2\pi(f_S + f_{LO})t] + \cos [2\pi(f_S - f_{LO})t] \right].$$

Der zweite Term liefert die gesuchte Differenzfrequenz f_{ZF} . Analog produzieren auch höhere Entwicklungsglieder der Taylorreihe diese Frequenz.

Ein sehr guter Mischer kann Signale mit sehr wenig Verlust oder sogar verstärkend zur Zwischenfrequenz transformieren. Ein sehr einfaches Beispiel besteht aus einem Schalter, an den eine sinusförmige Wechselspannung mit Frequenz f_S angelegt wird. Bei offenem Schalter liegt an diesem die Spannung $U(t)$ an und wird detektiert. Öffnet man den Schalter für eine jeweils sehr kurze Zeit mit der Abtastrate f_{LO} , die etwas kleiner ist als f_S , so durchläuft die abgetastete Spannung allmählich die gesamte Sinusfunktion. Eine Periode ist dabei nach der Zeit $T = 1/(f_S - f_{LO})$ durchlaufen. Der Schalter hat damit das Signal auf die Zwischenfrequenz herabgesetzt, wobei die Amplitude des ZF-Signals gleich der Amplitude des Eingangssignals ist.

Hiermit schließen wir unsere Ausführungen über Mikrowellen bzw. über elektromagnetische Wellen insgesamt ab. Viele weitere Aspekte der Mikrowellentechnik können beispielsweise in [Meinke/Gundlach, "Taschenbuch der Hochfrequenztechnik" (Springer-Verlag)] oder in: [D. M. Pozar, "Microwave Engineering", John Wiley Sons] nachgelesen werden.