Vorlesung WS 2001/02: Nichtklassische Logiken **Bogen 8**

Prof. Dr. Peter Schroeder-Heister
Dr. Kai F. Wehmeier

Definition 1 Es sei $\mathcal{L}$ eine nichtleere Menge (z.B. von Formeln der klassischen Aussagenlogik).

Eine Relation $\vdash \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ heiße Konsequenzrelation, falls gilt:

($\vdash$ 1) $\{A\} \vdash A$

($\vdash$ 2) $X \vdash A \Rightarrow X \cup Y \vdash A$

($\vdash$ 3) $((\forall A \in Y)(X \vdash A)$ und $Y \cup V \vdash B) \Rightarrow X \cup V \vdash B$.

Eine Konsequenzrelation $\vdash$ heiße kompakt, falls gilt:

($\vdash$ 4) $X \vdash A \Rightarrow$ es gibt ein endliches $U \subseteq X$ mit $U \vdash A$.

Eine Relation $\Vdash \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$ heiße verallgemeinerte Konsequenzrelation, falls gilt:

($\Vdash$ 1) $X \Vdash X$

($\Vdash$ 2) $X \Vdash Z \Rightarrow X \cup Y \Vdash Z$

($\Vdash$ 3) $((\forall A \in Y)(X \Vdash \{A\})$ und $Y \cup V \Vdash Z) \Rightarrow X \cup V \Vdash Z$

Eine verallgemeinerte Konsequenzrelation $\Vdash$ heiße kompakt, falls gilt:

($\Vdash$ 4) $X \Vdash Y$ und Y endlich $\Rightarrow$ es gibt ein endliches $U \subseteq X$ mit $U \Vdash Y$.

Eine Funktion $\mathsf{Cn} : \mathcal{P}(\mathcal{L}) \to \mathcal{P}(\mathcal{L})$ heiße Konsequenzoperator, falls gilt:

(Cn1) $X \subseteq \mathsf{Cn}(X)$

(Cn2) $X \subseteq Y \Rightarrow \mathsf{Cn}(X) \subseteq \mathsf{Cn}(Y)$

(Cn3) $\mathsf{Cn}(\mathsf{Cn}(X)) \subseteq \mathsf{Cn}(X)$.

Ein Konsequenzoperator Cn heiße kompakt, falls gilt:

(Cn4) $\mathsf{Cn}(X) \subseteq \bigcup\{\mathsf{Cn}(U) : U$ endlich, $U \subseteq X\}$.

Aufgabe 1
Es sei $\vdash$ eine Konsequenzrelation. Wir definieren:
$X \Vdash_{\vdash} Y :\Leftrightarrow (\forall A \in Y)(X \vdash A)$ und $\mathsf{Cn}_{\vdash}(X) := \{A : X \vdash A\}$. Zeigen Sie:

(a) $\Vdash_{\vdash}$ ist eine verallgemeinerte Konsequenzrelation. (3)

(b) $\mathsf{Cn}_{\vdash}$ ist ein Konsequenzoperator. (4)

Aufgabe 2
Es sei $\Vdash$ eine verallgemeinerte Konsequenzrelation. Wir definieren:
$X \vdash_{\Vdash} A :\Leftrightarrow X \Vdash \{A\}$ und $\mathsf{Cn}_{\Vdash}(X) := \{A : X \Vdash \{A\}\}$. Zeigen Sie:

(a) $\vdash_{\Vdash}$ ist eine Konsequenzrelation. (3)

(b) $\mathsf{Cn}_{\Vdash}$ ist ein Konsequenzoperator. (1)

Aufgabe 3
Es sei Cn ein Konsequenzoperator. Wir definieren:
$X \vdash_{\mathsf{Cn}} A :\Leftrightarrow A \in \mathsf{Cn}(X)$ und $X \Vdash_{\mathsf{Cn}} Y :\Leftrightarrow Y \subseteq \mathsf{Cn}(X)$. Zeigen Sie:

(a) $\vdash_{\mathsf{Cn}}$ ist eine Konsequenzrelation. (5)

(b) $\Vdash_{\mathsf{Cn}}$ ist eine verallgemeinerte Konsequenzrelation. (2)

Aufgabe 4
Zeigen Sie:

(a) Ist $\vdash$ eine kompakte Konsequenzrelation, so sind auch $\Vdash_{\vdash}$ und $\mathsf{Cn}_{\vdash}$ kompakt. (4)

(b) Ist $\Vdash$ eine kompakte verallgemeinerte Konsequenzrelation, so sind auch $\vdash_{\Vdash}$ und $\mathsf{Cn}_{\Vdash}$ kompakt. (4)

(c) Ist Cn ein kompakter Konsequenzoperator, so sind auch $\vdash_{\mathsf{Cn}}$ und $\Vdash_{\mathsf{Cn}}$ kompakt. (4)

Aufgabe 5
Es sei Cn ein Konsequenzoperator. Eine Teilmenge X von $\mathcal{L}$ heiße deduktiv abgeschlossen, falls $X = \mathsf{Cn}(X)$. Seien X und Y deduktiv abgeschlossen.

(a) Zeigen Sie, daß auch $X \cap Y$ deduktiv abgeschlossen ist. (2)

(b) Geben Sie ein deduktiv abgeschlossenes X an, so daß das Komplement von X nicht deduktiv abgeschlossen ist. (2)

(c) Geben Sie deduktiv abgeschlossene X und Y an, so daß $X \cup Y$ nicht deduktiv abgeschlossen ist. (2)

Aufgabe 6
Es sei $\vdash$ eine Konsequenzrelation. Die Relation $\vdash'$ sei definiert durch:

$$X \vdash' A :\Leftrightarrow \forall C[(\forall B \in X)(\{B\} \vdash C) \Rightarrow \{A\} \vdash C].$$

Zeigen Sie, daß auch $\vdash'$ eine Konsequenzrelation ist. (4)