

Kapitel 4

Rotationen

4.1 Drehung eines Koordinatensystems

In diesem Kapitel soll untersucht werden, welchen Einfluss ein rotierendes Koordinatensystem auf die Beschreibung von Bewegungen hat. Jedes Koordinatensystem, das z.B. im Bezug zur Erde fixiert ist, unterliegt einer solchen Rotation, da sich ja die Erde mit einer Geschwindigkeit von ω gleich 2π pro Tag um ihre Rotationsachse dreht. In einem ersten Schritt wird in diesem Abschnitt behandelt, wie man mathematisch die Rotation eines Vektors beschreiben kann. Dazu betrachten wir einen Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3,$$

den wir in einem kartesischen Koordinatensystem (\hat{e}_1 bezeichnet dabei den Einheitsvektor in x Richtung, \hat{e}_2 in y und \hat{e}_3 in z -Richtung) mit den Koordinaten a , b und c eindeutig festlegen. Wir wollen uns nun ansehen, wie der gleiche Vektor \vec{r} in einem Koordinatensystem beschrieben wird, das den gleichen Koordinatenursprung besitzt aber relativ zum ursprünglichen Koordinatensystem gedreht ist.

Als erstes Beispiel betrachten wir den Fall, dass das gedrehte Koordinatensystem durch eine Drehung um die z -Achse um einen Winkel α aus dem ursprünglichen Koordinatensystem hervorgeht. Zur Definition einer solchen Drehung benutzen wir die sogenannte "rechte-Hand-Regel". Diese besagt: Positioniere deine rechte Hand so, dass der ausgestreckte Daumen parallel zur Drehachse steht (also in unserem Beispiel parallel zur z -Achse). Die leicht gekrümmten Finger dieser Hand zeigen dann an, in welche Richtung die x - und y -Achse gedreht werden. Bei einer solchen Drehung um die z -Achse behält also die z -Achse ihre Richtung. Die Richtungen der x - und y -Achse wird bei einer Drehung um den Winkel α so gedreht, wie das in Abb. 4.1 dargestellt ist.

Als erstes sehen wir uns an, wie der Vektor $a\hat{e}_1$ in der neuen Basis dargestellt wird. Aus der Abbildung 4.1 wird deutlich, dass die Projektion von $a\hat{e}_1$ auf die "neue" x -Achse eine Koordinate $a \cos \alpha$ ergibt, während die Projektion auf die neue y -Achse, in der Abbildung mit y' bezeichnet den Wert $-a \sin \alpha$ liefert. In dem gedrehten Koordinatensystem wird

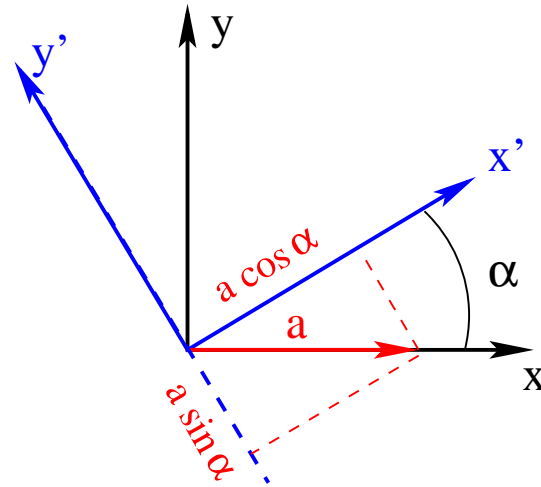


Abbildung 4.1: Drehung des Koordinatensystems um die z -Achse um einen Winkel α . Die z -Achse steht senkrecht zur Darstellungsebene und zwar so, dass sie aus der Ebene in Richtung des Betrachters zeigt.

also

$$a\hat{e}_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Drehung}} a\hat{e}'_1 = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ -a \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Drehung}} \hat{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bei dem Vektor \hat{e}'_1 handelt es sich also um die Darstellung des Vektors \hat{e}_1 im gedrehten Koordinatensystem. Ganz entsprechend gilt für den Einheitsvektor \hat{e}_2 in Richtung der y -Achse des ursprünglichen Koordinatensystems

$$\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Drehung}} \hat{e}'_2 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

während die Darstellung von \hat{e}_3 unverändert bleibt

$$\hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Drehung}} \hat{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{e}_3.$$

Mit diesen drei Beziehungen (4.1) - (4.1) und der Darstellung unseres Vektor \vec{r} aus (4.1) können wir jetzt die Darstellung des Vektors \vec{r} im gedrehten Koordinatensystem berech-

nen:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}' &= a\hat{e}'_1 + b\hat{e}'_2 + c\hat{e}'_3 \\
 &= a \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a \cos \alpha & +b \sin \alpha & +0 \\ -a \sin \alpha & +b \cos \alpha & +0 \\ 0 & +0 & +c \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

In der letzten Zeile dieser Gleichung haben wir eine neue Schreibweise eingeführt, der Spaltenvektor \vec{r}' wird hier multipliziert mit einer Matrix aus 3 Zeilen und 3 Spalten, die wir für diesen Fall der Drehung um die z -Achse um einen Winkel α mit $R^z(\alpha)$ bezeichnen wollen. Damit lautet die Gleichung (4.1) in kompakter Form

$$\vec{r}' = R^z(\alpha)\vec{r},$$

mit

$$R^z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allgemein hat eine Matrix A mit drei Zeilen und drei Spalten, eine 3×3 Matrix, also 9 Einträge:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

mit Matrixelementen A_{ij} in der Zeile i und der Spalte j . So ist also das Matrixelement der zweiten Zeile und ersten Spalte von $R^z(\alpha)$ in (4.1) gegeben durch

$$R_{21}^z(\alpha) = -\sin(\alpha).$$

Bezeichnen wir mit r'_i und r_j die Elemente der Spalten Vektoren \vec{r}' (beziehungsweise \vec{r}) in der i -ten (beziehungsweise j -ten Zeile, so ist die Matrixmultiplikation aus (4.1) definiert durch

$$r'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}^z(\alpha)r_j.$$

Dies bedeutet also z.B. für die erste Zeile unseres Beispiels aus (4.1)

$$r'_1 = R_{11}^z(\alpha)a + R_{12}^z(\alpha)b + R_{13}^z(\alpha)c = a \cos \alpha + b \sin \alpha + c0.$$

Im nächsten Schritt sollen 2 Drehungen hintereinander ausgeführt werden. Beschränken wir uns zunächst wiederum auf Drehungen um die z -Achse, eine erste Drehung um den Winkel α führt nach (4.1) zur Darstellung \vec{r}' . Eine zweite Drehung um den Winkel β erzeugt dann hieraus

$$\vec{r}'' = R^z(\beta)\vec{r}' = R^z(\beta)[R^z(\alpha)\vec{r}].$$

Führen wir dies Matrixoperationen explizit in der Indexschreibweise der (4.1) aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 r''_k &= \sum_i R^z(\beta)_{ki} r'_i \\
 &= \sum_{i,j} R^z(\beta)_{ki} (R^z(\alpha)_{ij} r_j) \\
 &= \sum_j \left[\sum_i R^z(\beta)_{ki} R^z(\alpha)_{ij} \right] r_j \\
 &= \sum_j X_{kj} r_j. \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Komponenten r''_k direkt aus den Komponenten des Ausgangsvektors r_j durch Anwendung der Matrix

$$X_{kj} = \sum_i R^z(\beta)_{ki} R^z(\alpha)_{ij}.$$

Wir definieren entsprechend das Produkt von 2 Matrizen A und B als $C = AB$ mit der Rechenvorschrift

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}.$$

Das Hintereinanderausführen von 2 Drehungen wird dann dargestellt durch das Produkt der beiden zugehörigen Rotationsmatrizen, wobei die Matrix der ersten Drehung rechts von der zweiten geschrieben wird.

Als Beispiel rechnen wir das Matrixelement in der ersten Zeile und ersten Spalte von X gemäß (4.1) aus zu

$$\begin{aligned}
 X_{11} &= R^z(\beta)_{11} R^z(\alpha)_{11} + R^z(\beta)_{12} R^z(\alpha)_{12} + R^z(\beta)_{13} R^z(\alpha)_{31} \\
 &= \cos(\beta) \cos(\alpha) + \sin(\beta)(-\sin(\alpha)) + 0 \\
 &= \cos(\alpha + \beta). \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Bei dem Übergang zur letzten Zeile haben wir eine der trigonometrischen Beziehungen ausgenutzt. Entsprechend berechnen sich die anderen Matrixelemente von X , so dass wir insgesamt für (4.1) erhalten

$$X = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die resultierende Matrix

$$X = R^z(\alpha + \beta)$$

ist also gerade die Matrix für eine Drehung um die z -Achse mit dem Gesamtwinkel $\alpha + \beta$, wie ja zu erwarten war. An der Darstellung in (4.1) kann man sich auch eine geometrische Veranschaulichung der Matrixmultiplikation verdeutlichen: Das Matrixelement X_{ij} , das ist das Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Ergebnismatrix, ergibt sich durch die Multiplikation der i -ten Zeile von $R^z(\beta)$ mit der j -ten Spalte von $R^z(\alpha)$. Dieses Produkt

einer Zeile mit einer Spalte bedeutet, das das erste Element der Zeile mit dem ersten Element der Spalte multipliziert wird und dazuaddiert wird das Produkt des zweiten Elementes der Zeile mit dem zweiten Element der Spalte plus dem Produkt aus drittem Element der Zeile mit dem dritten Element der Spalte.

Ein Spezialfall dieser Hintereinanderausführung von 2 Drehungen ist der Fall $\beta = -\alpha$ in (4.1). In diesem Fall ergibt sich

$$R^z(\alpha - \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R^z(-\alpha)R^z(\alpha) = 1.$$

Die Ergebnismatrix mit den Diagonalelementen 1 und nichtdiagonalen Elementen 0 nennt man die "Eins" der Matrixmultiplikation. Wendet man nämlich diese "Eins" Matrix auf einen beliebigen Vektor an, so ergibt sich genau wieder dieser Vektor. Dies entspricht ja genau unserer Vorstellung von den Drehungen: Dreht man das Koordinatensystem um α um es dann in einem zweiten Schritt um genau diesen Winkel wieder zurückzudrehen, so ist das genau so als hätte man gar nicht gedreht.

Die Matrix $R^z(-\alpha)$ nennt man auch die zur Matrix $R^z(\alpha)$ inverse Matrix und schreibt

$$R^z(-\alpha) = (R^z(\alpha))^{-1}$$

Allgemein ist die zu A inverse Matrix A^{-1} definiert durch

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1.$$

Ausserdem definieren wir die zu A transponierte Matrix A^t durch die Beziehung zwischen den Matrixelementen

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}.$$

Die transponierte Matrix A^t entsteht also aus der Matrix A dadurch, dass Zeilen- und Spaltenindices vertauscht sind. Für Matrizen, R , die Rotationen darstellen gilt

$$R^{-1} = R^t,$$

was man am Beispiel $R = R^z(\alpha)$ leicht verifizieren kann. Aber Achtung diese Beziehung (4.1) gilt nur für die sogenannten orthogonalen Transformationen, also für die Matrizen, die Rotationen darstellen.

Bisher haben wir uns auf Drehungen um die z -Achse beschränkt und dabei war es gleichgültig, ob wir erst um den Winkel α und dann um den Winkel β gedreht haben, oder umgekehrt. Die Ergebnismatrix ist in beiden Fällen gleich

$$R^z(\alpha + \beta) = R^z(\beta)R^z(\alpha) = R^z(\alpha)R^z(\beta).$$

Im allgemeinen gilt aber für die Multiplikation zweier Matrizen

$$AB \neq BA,$$

das Kommutativgesetz gilt nicht für die Matrixmultiplikation. Als Beispiel betrachten wir eine Drehung um die z -Achse um den Winkel $\pi/2$

$$R^z(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und eine Drehung um die x -Achse, ebenfalls um den Winkel $\pi/2$, die durch

$$R^x(\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ 0 & -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Drehen wir unser Koordinatensystem zunächst um die x -Achse und dann um die z -Achse ergibt sich

$$R^z(\pi/2)R^x(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies können wir experimentell überprüfen, indem wir ein Koordinatensystem genau diesen Drehungen unterziehen (beachte rechte Hand Regel für die Drehungen). Die Darstellung des ursprünglichen Basisvektors \hat{e}^1 (x -Richtung im ungedrehten System) im Koordinatensystem nach den Drehungen wird durch die Koordinaten gegeben, die in der ersten Spalte der Matrix von (4.1) zu finden ist. Dieser Basisvektor \hat{e}_1 ist also antiparallel zur y -Achse des gedrehten Koordinatensystems. Entsprechend zeigt die 2. Spalte der Matrix in (4.1) das der ursprüngliche Basisvektor \hat{e}_2 antiparallel zur z -Koordinate des gedrehten Systems liegt.

Betrachten wir nun die Drehung des Koordinatensystems, wenn zunächst um die z -Achse und dann um die x -Achse gedreht wird, so ergibt sich

$$R^x(\pi/2)R^z(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

eine ganz andere Matrix aber auch ein ganz anders orientiertes Koordinatensystem. Auch hier können wir die Rechnung durch das "Experiment" überprüfen. Insgesamt sieht man also aus dem Vergleich (4.1) und (4.1), dass das Ergebnis von 2 Drehungen im Allgemeinen von der Reihenfolge abhängt, was in der Matrizenrechnung dadurch zum Ausdruck kommt, dass auch das Ergebnis einer Multiplikation von 2 Matrizen von der Reihenfolge abhängt, dass also (4.1) gilt.

Neben der Multiplikation zweier Matrizen (4.1) können wir auch die Addition von 2 Matrizen $C = A + B$ definieren durch

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

sowie die Multiplikation mit einer Zahl λ : $C = \lambda A$:

$$C_{ij} = \lambda A_{ij}.$$

Es gilt das Distributivgesetz für Matrizen

$$A(B + C) = AB + AC,$$

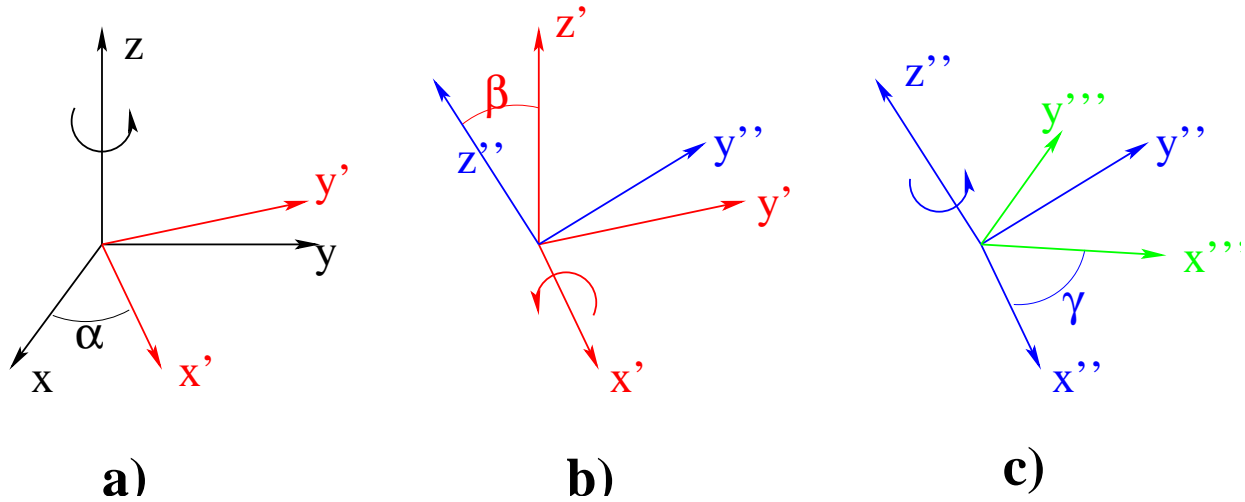


Abbildung 4.2: 3 Schritte zu Drehungen des Koordinatensystems in eine beliebige Orientierung zur Definition der Euler Winkel. Siehe Diskussion im Text.

wie wir leicht durch die folgende Rechnung beweisen können:

$$\begin{aligned}
 (A(B + C))_{ij} &= \sum_k A_{ik}(B + C)_{kj} \\
 &= \sum_k A_{ik}(B_{kj} + C_{kj}) \\
 &= \left(\sum_k A_{ik}B_{kj} \right) + \left(\sum_k A_{ik}C_{kj} \right) \\
 &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB + AC)_{ij}
 \end{aligned}$$

Kehren wir nun von allgemeinen Rechenregeln für die Matrizenrechnung wieder zu den Rotationen. Wir werden uns nun davon überzeugen, dass eine beliebige Rotation durch 3 Winkel eindeutig charakterisiert werden kann. Dazu wollen wir hier die sogenannten **Euler Winkel** heranziehen. Die 3 Rotationen und zugehörigen Winkel, die vom Ausgangssystem zum gewünschten Endsystem führen, sind in den 3 Teilbildern von Abb. 4.2 dargestellt.

In einem ersten Schritt soll die z -Achse des Koordinatensystems in ihre endgültige Position gekippt werden. Dazu benötigen wir die Drehung um 2 Winkel: Zunächst eine Drehung um die z -Achse um einen Winkel α aus dem Intervall $[0, 2\pi]$. Dann eine Drehung um die x -Achse mit einem Winkel β aus dem Intervall $[0, \pi]$. Diese beiden Drehungen sind in den Teilbildern a und b von Abb. 4.2 dargestellt.

Es folgt dann noch eine Drehung um die resultierende z -Achse (siehe Teilbild c von Abb. 4.2) mit einem Winkel γ aus dem Intervall $[0, 2\pi]$. Die Rotationsmatrix, die zu der gesamten Drehung gehört berechnet sich also zu

$$R^{\text{Euler}}(\alpha, \beta, \gamma) = R^z(\gamma)R^x(\beta)R^z(\alpha)$$

Das Ergebnis dieser Matrizenmultiplikationen ist:

$$\begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \cos \beta \sin \alpha & \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta \\ -\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha & -\sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha & \cos \gamma \sin \beta \\ \sin \beta \sin \alpha & -\sin \beta \cos \alpha & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

4.2 Zeitableitung eines Vektors im rotierenden Koordinatensystem

Bisher haben wir uns in unseren Überlegungen auf Koordinatensysteme beschränkt, die wir uns als fest im Raum fixiert vorgestellt haben. Genau genommen gilt dies aber zum Beispiel auch für ein Koordinatensystem, das fest mit der Erde verbunden ist (also eins was wir an die Wandtafel zeichnen), nicht. Ein solches erdfestes Koordinatensystem rotiert mit der Eigenrotation der Erde, so dass die Koordinatenachsen ständig ihre Richtungen ändern, bis auf solch eine, die zufällig parallel zur Drehachse der Erde steht. Beschreibt man die Position eines Teilchens in einem solchen Koordinatensystem durch eine Vektorfunktion $\vec{r}(t)$, so erhält man bei der Berechnung der Geschwindigkeit als Ableitung dieser Vektorfunktion $\vec{r}(t)$ ein anderes Ergebnis, als wenn man die Bewegung und die zugehörige Geschwindigkeit in einem nicht-rotierenden Koordinatensystem beschrieben hätte.

Zur Illustration dieses Unterschiedes betrachten wir zwei Koordinatensysteme mit identischem Koordinatenursprung, die zum Zeitpunkt $t = 0$ auch ihre kartesischen Achsen parallel orientiert haben. Das eine, das Laborsystem soll ruhen, das zweite, das wir das rotierende Koordinatensystem nennen wollen, rotiert mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse, die ja in beiden Systemen die gleiche ist. Zu einem Zeitpunkt t ist also das rotierende System relativ zum Laborsystem um einen Winkel

$$\varphi = \omega t,$$

gedreht. Betrachten wir nun eine Fliege, die sich auf der x -Achse des rotierenden Systems befindet in einem Abstand a vom Koordinatenursprung. Aus der Sicht des rotierenden Systems, also aus der Sicht eines Beobachters, der sich mit dem Koordinatensystem mitbewegt, hat die Fliege zu jeder Zeit den Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Fliege ändert ihre Position nicht und daher ist die Geschwindigkeit der Fliege aus der Sicht des rotierenden Koordinatensystem

$$\left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{RK}} = \vec{0}.$$

(Der Index RK bei dieser Zeitableitung steht nicht für Reinhold Kleiner, sondern für Rotierendes Koordinatensystem). Aus der Sicht eines Beobachters, der sich nicht mit dem Koordinatensystem dreht, also aus der Sicht des Laborsystems hat die Fliege aber natürlich eine von Null verschiedene Geschwindigkeit. Wir wollen im folgenden zeigen, dass diese Geschwindigkeit, gemessen aus der Sicht des Laborsystems, sich nach

$$\left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{Lab}} = \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{RK}} + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

berechnet. Dabei steht der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ für den Vektor mit dem Betrag entsprechend der Winkelgeschwindigkeit ω des rotierenden Systems mit der Rich-

tung parallel zur Drehachse. In unserem Beispiel ist also

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix},$$

parallel zur z -Achse. Zm Beweis der Gleichung (4.2) für unser Beispiel führen wir uns zunächst vor Augen, dass der Ortsvektor der Fliege im Laborsystem zur Zeit t gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\text{Lab}}(t) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ a \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ a \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

In der ersten Zeile dieser Gleichung haben wir den Ortsvektor der Fliege, der zum Zeitpunkt t im rotierenden Koordinatensystem durch (4.2) Anwenden der Rotationsmatrix $R^z(-\varphi)$ ins Laborsystem transformiert. Dabei haben wir berücksichtigt, dass das Laborsystem relativ zum rotierenden System um den Winkel $(-\varphi)$ gedreht ist. In der zweiten Zeile wird die Zeitabhängigkeit des Ortsvektors im Laborsystem dadurch explizit zum Ausdruck gebracht, dass wir $\varphi = \omega t$ aus (4.2) einsetzen. Wenn wir diesen Ortsvektor nach der Zeit ableiten, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{Lab}} = \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{Lab}} &= \begin{pmatrix} -\omega a \sin(\omega t) \\ \omega a \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ a \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

In der letzten Zeile haben wir die Darstellung des Vektors der Winkelgeschwindigkeit ω aus (4.2) und des Ortsvektors der Fliege \vec{r} aus (4.4) identifiziert. Die Vektoren sind also als Spaltenvektoren so dargestellt, dass die erste Zeile der x -Komponente des Laborsystems entspricht. Da in dem gewählten Beispiel die Geschwindigkeit der Fliege im rotierenden System identisch Null ist (siehe (4.2)) ganz gleich in welchem Koordinatensystem wir diese $\vec{0}$ darstellen, ist also mit (4.5) die Beziehung (4.2) für das Beispiel der Fliege verifiziert.

Ganz ähnlich wollen wir die Beziehung (4.2) aber nun auch für den allgemeinen Fall beweisen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Koordinatensysteme wie gehabt zum Zeitpunkt $t = 0$ identisch sind und das rotierende System mit einer Geschwindigkeit ω um die z -Achse rotiert. Eine beliebige Bewegung eines Massenpunktes werde im rotierenden Koordinatensystem durch den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix},$$

beschrieben. Daraus ergibt sich eine Geschwindigkeit im rotierenden System

$$\left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{RK}} = \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix},$$

wobei der Punkt in $\dot{a}(t)$ wie üblich die Ableitung der Funktion a nach der Zeit bezeichnet. Diesen Vektor können wir natürlich auch in der Basis des Laborsystems beschreiben durch Anwenden der Transformation $R^z(-\varphi)$:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{RK}} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{a} \cos \varphi - \dot{b} \sin \varphi \\ \dot{a} \sin \varphi + \dot{b} \cos \varphi \\ \dot{c} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Andererseits betrachten wir den Ortsvektor aus (4.2) und transformieren ihn ins Laborsystem

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t) \\ a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Wenn wir diesen Ortsvektor im Laborsystem nach der Zeit ableiten, so müssen wir sowohl die Zeitabhängigkeit berücksichtigen, die in den Koordinaten a , b und c steckt als auch die explizit sichtbare Abhängigkeit vom Typ ωt . Durch Anwenden der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{Lab}} &= \begin{pmatrix} \dot{a} \cos(\omega t) - \dot{b} \sin(\omega t) - a\omega \sin(\omega t) - b\omega \cos(\omega t) \\ \dot{a} \sin(\omega t) + \dot{b} \cos(\omega t) + \omega a \cos(\omega t) - \omega b \sin(\omega t) \\ \dot{c} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{a} \cos(\omega t) - \dot{b} \sin(\omega t) \\ \dot{a} \sin(\omega t) + \dot{b} \cos(\omega t) \\ \dot{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\omega \sin(\omega t) - b\omega \cos(\omega t) \\ \omega a \cos(\omega t) - \omega b \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{RK}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t) \\ a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{RK}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Natürlich können wir diesen Beweis nicht nur für die Zeitableitung eines Ortsvektors \vec{r} benutzen. Er gilt genau so für jede andere Vektorfunktion, wie z.B. die Geschwindigkeit,

Beschleunigung oder auch Kraft. Es gilt also allgemein für jede beliebige zeitabhängige Vektorfunktion \vec{f}

$$\left\{ \frac{d\vec{f}}{dt} \right\}_{\text{Lab}} = \left\{ \frac{d\vec{f}}{dt} \right\}_{\text{RK}} + \vec{\omega} \times \vec{f}.$$

Häufig schreibt man diese Beziehung auch einfach als eine **Operatorrelation**

$$\left\{ \frac{d}{dt} \right\}_{\text{Lab}} = \left\{ \frac{d}{dt} \right\}_{\text{RK}} + \vec{\omega} \times$$

die auf einen Vektor von Funktionen angewendet werden kann.

4.3 Bewegungsgleichungen im rotierenden Koordinatensystem

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen gelten in einem Inertialsystem. Wenn nun auf einen Körper keine Kraft wirkt, so ruht er (d.h. sein Ortsvektor \vec{r} ist konstant) oder er bewegt sich auf einer geraden Linie. Nehmen wir einmal an, dass der Körper in dem Inertialsystem ruht, also z.B. die Koordinaten $x = a$, $y = z = 0$ besitzt. Wenn wir nun ein Koordinatensystem K' betrachten, das den gleichen Koordinatenursprung besitzt, aber mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse rotiert, so ist die Bahnkurve des Körpers in diesem rotierenden Koordinatensystem gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= R_z(\varphi = \omega t)\vec{r} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ -a \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Für einen Beobachter in diesem rotierenden Koordinatensystem bewegt sich der Körper also auf einer Kreisbahn in der xy -Ebene mit dem Radius a . Wenn dieser Beobachter in dem rotierenden Koordinatensystem davon ausgeht, dass sein Koordinatensystem ein Inertialsystem ist, so kommt er zu dem Schluss, dass auf diesen Körper eine Kraft wirkt, denn er bewegt sich ja nicht auf einer geradlinigen Bahn. Diese scheinbare Kraft ist aber lediglich die Konsequenz der Rotation des Koordinatensystems und heisst deshalb **Scheinkraft**.

In diesem Abschnitt wollen wir die Scheinkräfte untersuchen, die wir z.B. auf unserer Erde deshalb registrieren, weil sich die Erde täglich einmal um ihre Achse dreht. Dabei wollen wir nicht berücksichtigen, dass sie sich ausserdem natürlich auch noch einmal im Jahr um die Sonne bewegt, die Sonne sich relativ zur Milchstraße bewegt usw.

Wir unterscheiden dazu drei verschiedene Koordinatensysteme (siehe auch Abb. 4.3):

1. **Laborsystem:** Ein nichtrotierendes Koordinatensystem mit dem Ursprung im Zentrum der Erde. Die z -Achse zeigt in Richtung des Nordpols ist also parallel zur Drehachse. Die x -Achse zeigt z.B. stets zur Sonne. Wir betrachten dieses Koordinatensystem als Inertialsystem, vernachlässigen also wie bereits diskutiert die Bewegung der Erde um die Sonne etc. Dieses System nennen wir im folgenden Laborsystem.
2. **Mitrotierendes System K1:** Dieses Koordinatensystem hat ebenfalls seinen Koordinatenursprung im Zentrum der Erde und die z -Achse in Richtung des Nordpols orientiert. Im Gegensatz zum Laborsystem rotiert es aber mit der Erde. Seine x -Achse weist also fest auf einen Punkt der Erdoberfläche, am Äquator also z.B. die Stadt Recife am Amazonas.
3. **Mitrotierendes System K2:** Auch dieses System ist fest mit der Erde verbunden. Es hat aber seinen Koordinatenursprung hier im Hörsaal in Tübingen.

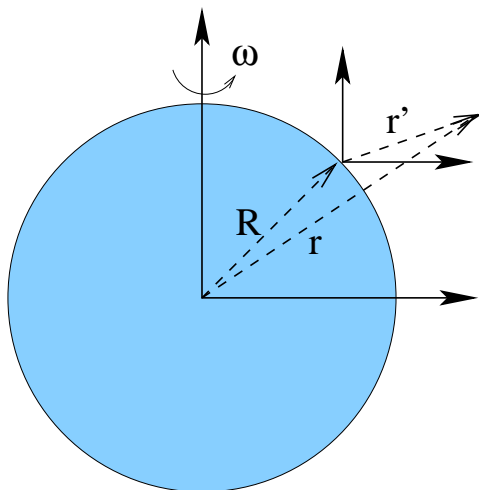


Abbildung 4.3: Koordinatensysteme auf der rotierenden Erde (siehe Diskussion im Text)

Bezeichnen \vec{R} (\vec{r}) die Ortsvektoren des Koordinatenursprungs von K2 (eines Massenpunktes) aus der Sicht von K1 und \vec{r}' den Ortsvektor des Massenpunktes aus der Sicht von K2, so gilt

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

wobei \vec{R} ein konstanter Vektor ist. Die Winkelgeschwindigkeit ω ist in allen drei Koordinatensystemen ein konstanter Vektor parallel zur z -Achse mit dem Betrag

$$\omega = \frac{2\pi}{24\text{ h}} = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

Wir betrachten zunächst einmal die Geschwindigkeiten eines Massenpunktes aus der Sicht des Laborsystems, beziehungsweise des Koordinatensystems K1: Nach den Regeln zu Zeitableitungen in rotierenden Systemen gilt:

$$\vec{v}_{\text{Lab}} = \left\{ \frac{d\vec{r}'}{dt} \right\}_{\text{Lab}} = \left\{ \frac{d\vec{r}'}{dt} \right\}_{\text{K1}} + \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

Analog gilt für die Beschleunigung aus der Sicht des Laborsystems

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\text{Lab}} &= \left\{ \frac{d\vec{v}_{\text{Lab}}}{dt} \right\}_{\text{Lab}} \\ &= \left\{ \frac{d\vec{v}_{\text{Lab}}}{dt} \right\}_{\text{K1}} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{Lab}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Setzt man in diese Gleichung \vec{v}_{Lab} aus (4.3) ein, so ergibt sich, wobei nun alle Ableitungen nach der Zeit im Koordinatensystem K1 vorzunehmen sind:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\text{Lab}} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right] + \vec{\omega} \times \left[\frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right] \\ &= \vec{a}_{\text{K1}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit der Masse m des beschriebenen Körpers und ersetzen

$$m\vec{a}_{\text{Lab}} = \vec{F}$$

durch die real existierende Kraft \vec{F} , die im Inertialsystem beobachtet wird und stellen (4.11) um, so ergibt sich

$$m\vec{a}_{\text{K1}} = \vec{F} - \underbrace{m\vec{\omega} \times \vec{r}}_{(a)} - \underbrace{2m\omega \times \vec{v}}_{(b)} - \underbrace{m\omega \times (\omega \times \vec{r})}_{(c)} .$$

Das Produkt Masse m mal in K1 beobachtete Beschleunigung, also die Kraft, die ein Beobachter in K1 aus der Bewegung des Teilchens extrahieren würde, enthält neben der real existierenden Kraft \vec{F} noch 3 Scheinkräfte, die wir im folgenden diskutieren wollen:

- (a): **Lineare Beschleunigungskraft** (Term (a) in (4.3)): Die Winkelgeschwindigkeit mit der die Erde um ihre Achse rotiert ist praktisch konstant, also $\dot{\omega} = 0$. Dieser Beitrag ist also vernachlässigbar.
- (b): **Corioliskraft** (Term (b) in (4.3)): Diese Kraft wird immer dann beobachtet, wenn sich das Teilchen bewegt ($\vec{v} \neq 0$) und die Geschwindigkeit eine Komponente hat, die senkrecht zur Rotationsachse der Erde steht. Für die Berechnung der Corioliskraft ist es irrelevant, ob wir die Geschwindigkeit \vec{v} bezogen auf das Koordinatensystem K1 angeben, oder bezogen auf K2. Da die Ortsvektoren in diesen beiden rotierenden Koordinatensystemen sich nach (4.3) nur um einen konstanten Vektor \vec{R} unterscheiden, ist die Geschwindigkeit in K1 und K2 identisch.
- (c): **Zentrifugalkraft** (Term (c) in (4.3)) Wegen der Eigenschaften des Vektorproduktes steht die Zentrifugalkraft senkrecht zu $\vec{\omega}$ und senkrecht zu dem Flächenvektor der aus $\vec{\omega}$ und \vec{r} aufgespannten Fläche. Diese Scheinkraft zeigt für einen Punkt auf der Erdoberfläche senkrecht zur z -Achse nach aussen. Sie ist maximal für einen Punkt auf dem Äquator, da hier \vec{r} und $\vec{\omega}$ einen rechten Winkel bilden:

$$\left| \vec{F}_{(c)} \right| = m\omega^2 r .$$

Setzt man den Betrag für ω aus (4.3) und für r den Radius der Erde ein, so ergibt sich ein Zentrifugalbeschleunigung von etwa 0.032 m s^{-2} . Dies entspricht einer Reduktion der Erdanziehung um 0.3 Prozent.

4.4 Versuche zu Scheinkräften

Im diesem Abschnitt stellen wir einige Experimente vor, die die verschiedenen Scheinkräfte im rotierenden Bezugssystemen vorstellen. Am Schluss des Abschnitts werden wir kurz auf die Scheinkräfte eingehen, die entstehen, wenn ein Bezugssystem gegen das andere linear beschleunigt wird.

4.4.1 Scheinkräfte im rotierenden Bezugssystem

Im Theorieteil hatten Sie die allgemeine Formel:

$$\vec{F}_{RK} = m\vec{a}_{RK} = \vec{F} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{RK} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{RK} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{RK}) \quad (4.12)$$

kennengelernt. Hierbei bezeichnet der Index RK Größen in dem mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierenden Koordinatensystem (Kräfte, Beschleunigungen und Geschwindigkeiten). Die Größen ohne Index beziehen sich auf das ruhende Koordinatensystem.

Der erste Term $\vec{F}_W = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ auf der zweiten Seite von 4.12 tritt bei **nicht-konstanter Winkelgeschwindigkeit** auf. Der zweite Term ist die **”Corioliskraft”** $\vec{F}_C = 2m\vec{\omega} \times \vec{v}$, der dritte die **”Zentrifugalkraft”** $\vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

Entsprechend erhalten wir Coriolis- und Zentrifugalbeschleunigung via $\vec{a}_C = \vec{F}_C/m = -2\vec{\omega} \times \vec{v}_{RK}$ und $\vec{a}_Z = \vec{F}_Z/m = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

Wir besprechen nun diese Kräfte für spezielle Geometrien. Zunächst betrachten wir Experimente, in denen vor allem die

Zentrifugalkraft

wesentlich ist. Hierzu betrachten wir rotierende Systeme, in denen die interessierenden Körper in Ruhe sind. Die Corioliskraft verschwindet dann.

Wenn wir ein Experiment aus dem ruhenden Zustand heraus ”anfahen” lassen, wird zunächst der Term $\vec{F}_W = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ eine Rolle spielen. Er verschwindet aber, sobald die endgültige Winkelgeschwindigkeit erreicht ist.

- (a) Wir beobachten einen **rotierenden Balken**, auf dem eine Masse m radial reibungsfrei gleiten kann und gegen eine Feder drückt (Abb. 4.4).

Beim ”Anfahren” des Experiments wirkt zunächst die Kraft \vec{F}_W . Unser Balken rotiert gegen den Uhrzeigersinn. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zeigt in Richtung $+z$ aus der Papierebene heraus. Die Kraft \vec{F}_W ist dann senkrecht zu $\vec{\omega}$ gerichtet und ”drückt” die Masse m in der Stellung der Abb. 4.4 nach links (Der Vektor \vec{r} zeigt in der Abb. von Drehzentrum nach unten). Dies ist ein sinnvolles Ergebnis; auf Grund seiner Trägheit versucht die Masse m , in Ruhe zu bleiben; würde sie nicht durch den Balken ”mitgezogen”, würde sich m relativ zum unteren Balkenende nach links entfernen.

Betrachten wir den weiteren Vorgang zunächst vom ruhenden System (Hörsaal) aus. Während des Anlaufens der Anordnung wird die Masse m etwas zunächst nach außen

laufen und gegen die Feder schwingen. Nach einiger Zeit kommt m aber in Ruhe. Die Masse m erfährt dann ständig eine nach außen gerichtete Radialbeschleunigung $a_r = -\omega^2 r$, die von der Feder kompensiert wird. Die Feder "misst" die Zentripetalkraft $m\omega^2 r$.

Im bewegten Bezugssystem ist die Masse m nach einiger Zeit in Ruhe. Die Feder misst dennoch die Kraft $m\omega^2 r$, die der Beobachter im bewegten System als die radial nach außen gerichtete Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z = m\omega^2 r \cdot e_r$ interpretiert.

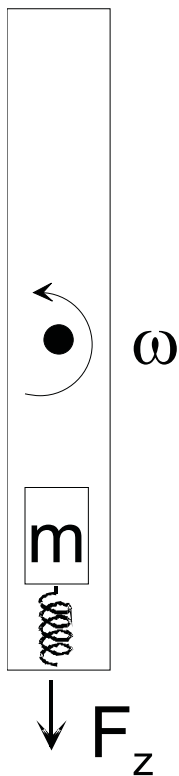


Abbildung 4.4: Mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \cdot e_z$ rotierender Balken. Auf dem Balken kann eine Masse m radial gleiten und gegen eine Feder drücken.

- (b) Wichtig ist die **Zentrifugalkraft** bei Zentrifugen (oder auch Kettenkarussellen), deren Prinzip wir als nächstes erklären wollen. Der prinzipielle Aufbau ist in Abb. 4.5 gezeigt.

Betrachten wir die Zentrifuge im ruhenden Koordinatensystem, so wirkt auf diese die Schwerkraft $-mg$ in $-z$ -Richtung. Das Reagenzglas erfährt eine Beschleunigung $\omega^2 \rho$ in radialer Richtung. Die Gesamtkraft auf die Zentrifuge ist:

$$\vec{F}_{ges} = \begin{pmatrix} f_\varphi \\ F_\rho \\ F_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m\omega^2 \rho \\ -mg \end{pmatrix} = |F_{ges}| \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

mit $F_{ges} = m\sqrt{g^2 + (\omega^2 \rho)^2}$.

Wir erhalten: $\sin \alpha = \frac{\omega^2 \rho}{\sqrt{g^2 + (\omega^2 \rho)^2}}$ bzw. $\tan \alpha = \frac{\omega^2 \rho}{g}$.

Mit $\rho = \rho_0 + l \cdot \sin \alpha$ (l : Länge der Aufhängung zwischen der Drehachse und dem Schwerpunkt des Reagenzglases; ρ_0 : Abstand der Drehachse zur Aufhängung)

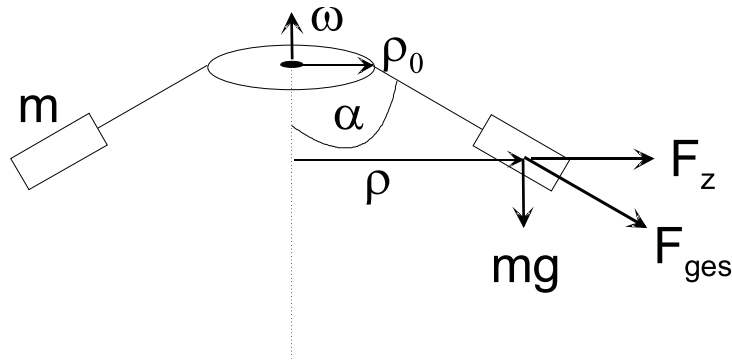


Abbildung 4.5: Prinzip der Zentrifuge oder des Kettenkarussells

können wir weiter schreiben:

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2}{g} \cdot (\rho_0 + l \cdot \sin \alpha) = \frac{\omega^2 l}{g} \left(\frac{\rho_0}{l} + \sin \alpha \right). \quad (4.14)$$

Für kleine Drehgeschwindigkeiten ist die rechte Seite dieser transzendenten Gleichung 4.14 klein und damit auch $\tan \alpha$. Wir nähern: $\tan \alpha \approx \alpha$ und $\sin \alpha \approx \alpha$. Damit erhalten wir: $\alpha \approx \frac{\omega^2 \rho_0 / g}{1 - \omega^2 l / g}$. Für $\omega \rightarrow 0$ geht α gegen null.

Umgekehrt geht für $\omega \rightarrow \infty$ die rechte Seite von Gleichung 4.14 gegen unendlich. Der Winkel α geht dann gegen 90° .

Im Spezialfall $\rho_0 = 0$ reduziert sich Gleichung 4.14 zu: $\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$. Diese Gleichung hat erst eine Lösung $\alpha > 0$ für $\omega^2 l \geq g$. Für hohe Drehgeschwindigkeiten geht α auch hier gegen 90° .

Auf ein Teilchen (Masse m_1) im Reagenzglas wirkt die Beschleunigung $\frac{F_{ges}}{m}$ in Richtung des Reagenzglasbodens. Auf das Teilchen wirkt also die Kraft $\vec{F}_{ges} \cdot \frac{m_1}{m}$. Schwimmt das Teilchen in einer leichteren Flüssigkeit, so wird es unter dem Einfluss dieser Kraft deutlich schneller auf den Boden sinken als auf Grund der Gewichtskraft $m_1 g$ allein. Hierin liegt der Vorteil und die Anwendung von Zentrifugen, die bei hohen Drehgeschwindigkeiten sehr effektiv Stofftrennungen durchführen können.

- (c) Als nächstes betrachten wir ein mit **Wasser gefülltes zylindrisches Gefäß, das um seine Längsachse rotiert.**

Nach einer gewissen Anlaufphase wird das Wasser mit der Winkelgeschwindigkeit des Gefäßes rotieren. Die Wasseroberfläche ist dann gekrümmt wie in der Abb. 4.6 dargestellt.

Wir interessieren uns nun für die Form der Wasseroberfläche.

Unter dem Einfluss der Zentrifugalkraft werden sich die Wassermoleküle so lange verschieben, bis die Gesamtkraft \vec{F}_{ges} senkrecht auf der Wasseroberfläche steht. Dies ist in Abb. 4.6 angedeutet. Es sei α der Winkel zwischen der Gewichtskraft mg und F_{ges} . Es gilt dann: $\tan \alpha = \frac{\omega^2 \rho}{g}$. Nun zeichnen wir für diesen Wert von ρ die Tangente an die Wasseroberfläche. Sie schneidet die ρ -Achse ebenfalls unter dem Winkel α . Aus der Steigung dieser Tangente erhalten wir: $\tan \alpha = \frac{dz}{d\rho}$ und damit: $\frac{dz}{d\rho} = \frac{\omega^2 \rho}{g}$.

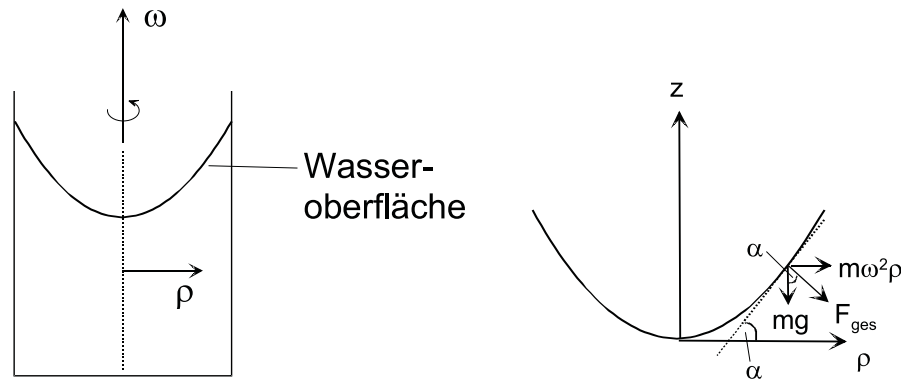


Abbildung 4.6: Mit Wasser gefülltes zylindrisches Gefäß, das um seine Längsachse rotiert. Links: schematische Darstellung; rechts: Kräftegediagramm an einem Punkt der Wasseroberfläche.

Diese Gleichung können wir integrieren und erhalten: $z(\rho) = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} \rho^2$.

Die Wasseroberfläche ist also proportional zu ρ^2 gekrümmt. Man bezeichnet dies auch als **”Rotationsparaboloid”**.

- (d) Abplattung der Erde Auf eine rotierende Kugel wirken (von einem Beobachter auf der Kugel aus gesehen) Zentrifugalkräfte wie in Abb. 4.7 dargestellt.

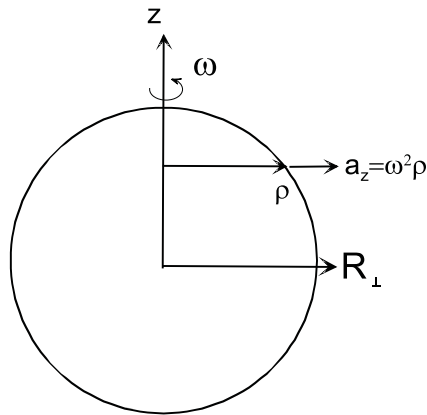


Abbildung 4.7: Mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ rotierende Kugel (Radius R). Auf einen Punkt mit Abstand ρ von der Drehachse wirkt die Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a}_z = \omega^2 \rho \cdot \vec{e}_r$, die zur Abplattung der Kugel führen können.

Wenn sich die Kugel verformen kann, wird diese abgeplattet werden (d. h. in eine elliptische Form übergehen). Der Radius (die kleine Halbachse) in Richtung der Drehachse (d. h. in Richtung der Pole) betrage R_{\parallel} , der Radius in Richtung des Äquators sei R_{\perp} . Im Fall der Erde ist $\frac{R_{\perp} - R_{\parallel}}{R_{\parallel}} \approx \frac{1}{300}$, d. h. $R_{\perp} - R_{\parallel} \approx 21$ km. Als Konsequenz der Erdrotation und der Abplattung ist die Schwerebeschleunigung am Äquator geringer als die am Pol.

Man misst: $g_{Aeq} = 9.78$ m/s², $g_{Pol} = 9.83$ m/s², also einen Unterschied von ca. 0.5%.

Am Äquator selbst wirkt zum einen die Zentrifugalkraft ”nach oben” und vermindert g um den Betrag $\omega^2 R_{\perp} = (2\pi/T)^2 \cdot R_{\perp}$. Für $T = 24$ h ergibt dies einen Beitrag von

etwa $g_{Pol}/300$. Die restliche Differenz von etwa 0.2% wird durch die etwas geringere Gravitationskraft am Äquator verursacht.

Coriolis- und Zentrifugalkräfte

Wir diskutieren nun Anordnungen, bei denen sich ein Körper im rotierenden System bewegt. Die Winkelgeschwindigkeit ω sei konstant. Wir haben dann eine von null verschiedene Corioliskraft, die wir neben der Zentrifugalkraft berücksichtigen müssen.

- (a) Im ersten Experiment setzen wir einen im Laborsystem **ruhenden Stift auf eine rotierende Scheibe** auf. Die Scheibe rotiere gegen den Uhrzeigersinn um die z-Achse. Der Abstand des Stifts von der Drehachse sei R . Der Stift "schreibt" dann natürlich einen Kreis mit Radius R um die Drehachse. Aus Übungsgründen wollen wir dies nochmals an Hand der Rotationsmatrix verifizieren. Der Vektor $\vec{r}_{RK} =$

$\begin{pmatrix} x_{RK} \\ y_{RK} \\ z_{RK} \end{pmatrix}$ ist für unsere Geometrie mit der Rotationsmatrix $R^z(\varphi = \omega t)$ mit dem Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ des festen Koordinatensystems verknüpft:

$$\begin{pmatrix} x_{RK} \\ y_{RK} \\ z_{RK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Ausgeschrieben bedeutet dies:

$$x_{RK} = x \cdot \cos \omega t + y \cdot \sin \omega t \quad (4.16)$$

$$y_{RK} = -x \cdot \sin \omega t + y \cdot \cos \omega t \quad (4.17)$$

$$z_{RK} = z \quad (4.18)$$

Der Stift ruhe bei $x = -R$, $y = 0$, $z = 0$.

Dies ergibt:

$x_{RK} = -R \cdot \cos \omega t$, $y_{RK} = -R \cdot \sin \omega t$ und $z_{RK} = 0$, was genau einer "rechtsdrehenden" Kreisbahn für den Beobachter im rotierenden System entspricht. Die Winkelgeschwindigkeit des Stifts ist dabei $\vec{\omega} = -\omega \vec{e}_z$.

Der Stift erfährt offensichtlich für den Beobachter auf der Scheibe eine Beschleunigung $\vec{a}_{RK} = \omega^2 R \vec{e}_\rho$. Diese muss durch eine Zentripetalbeschleunigung der Form $\vec{a}_{ZP} = -\omega^2 R \vec{e}_\rho$ kompensiert worden sein, da der Stift auf seiner Bahn bleibt.

Diese Zentripetalbeschleunigung muss sich nun aus der Summe von Zentrifugal- und Coriolisbeschleunigung ergeben:

Im rotierenden System erfährt der Stift auf seiner Kreisbahn die radial nach außen gerichtete Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a}_z = \omega^2 \cdot R(t) \cdot \vec{e}_r$. Die Corioliskraft ist gemäß der allgemeinen Formel 4.12 $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{RK}$, die Coriolisbeschleunigung gleich

$\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v}_{RK}$. Der Stift rotiert für den Beobachter auf der Scheibe im Uhrzeigersinn auf einer Kreisbahn mit Radius R . Seine Relativgeschwindigkeit bzgl. der Scheibe hat den Betrag $v_{RK} = \omega R$ und ist in azimuthaler Richtung im Uhrzeigersinn gerichtet. Die Winkelgeschwindigkeit ω zeigt in Richtung $+z$, so dass die Coriolisbeschleunigung $\vec{a}_c = -2\omega^2 \cdot R(t) \cdot \vec{e}_r$ beträgt, d. h. radial zur Drehachse hin zeigt. Die Summe aus Zentrifugal- und Coriolisbeschleunigung ergibt

$$\vec{a}_c + \vec{a}_z = [-2\omega^2 \cdot R(t) + \omega^2 \cdot R(t)] \cdot \vec{e}_r = -\omega^2 \cdot R(t) \cdot \vec{e}_r, \quad (4.19)$$

also genau die Zentripetalkraft, die nötig ist, um den Stift auf seiner Bahn zu halten.

- (b) Wir **bewegen** nun den **Stift mit konstanter Geschwindigkeit** $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ wie in Abb. 4.8 gezeichnet.

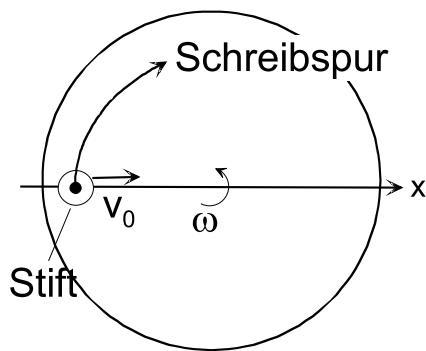


Abbildung 4.8: Ein Stift bewegt sich mit Geschwindigkeit v_0 über eine rotierende Scheibe.

Anwendung der Rotationsmatrix ergibt zunächst mit $x(t) = -R + v_0 t$, $y(t) = z(t) = 0$:

$$x_{RK}(t) = (-R + v_0 t) \cdot \cos(\omega t), \quad y_{RK}(t) = -(-R + v_0 t) \cdot \sin(\omega t). \quad (4.20)$$

Wir wollen die Bewegung des Stiftes nun aus der Sicht des rotierenden Beobachters beschreiben. Zunächst zerlegen wir die Geschwindigkeit des Stiftes in einen Anteil \vec{v}_{\parallel} parallel zu \vec{r}_{RK} und einen Anteil \vec{v}_{\perp} senkrecht zu \vec{r}_{RK} . Damit haben wir für die Coriolisbeschleunigung:

$$\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v} = -2\vec{\omega} \times (\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) = \vec{a}_{c1} + \vec{a}_{c2} \quad (4.21)$$

Bei **langsamer Bewegung des Stifts** ist $\vec{v} \approx \vec{v}_{\perp}$ und der Term \vec{a}_{c2} klein. Der erste Term liefert wie im Beispiel 1 $\vec{a}_{c1} = -2\omega^2 \cdot r(t) \cdot \vec{e}_r$. Die Zentrifugalbeschleunigung beträgt $\vec{a}_z = \omega^2 \cdot r(t) \cdot \vec{e}_r$, die Summe aus beiden Termen ist $\omega^2 \cdot r(t) \cdot \vec{e}_r$. Solange sich der Stift auf das Drehzentrum zubewegt, nimmt $r(t)$ und damit die Zentrifugalkraft linear mit der Zeit ab. Der Stift beschreibt eine auf das Drehzentrum zugerichtete Spirale, deren Endpunkt (d. h. die Position des Stiftes) sich im Uhrzeigersinn bewegt. Nach passieren des Drehzentrum nimmt die Zentrifugalkraft mit der Zeit zu; der Stift schreibt eine nach außen gerichtete Spirale, deren Endpunkt sich gegen den Uhrzeigersinn bewegt. Die mittels der Rotationsmatrix berechnete Bahnkurve ist in den Abb. 4.9 und 4.10 illustriert.

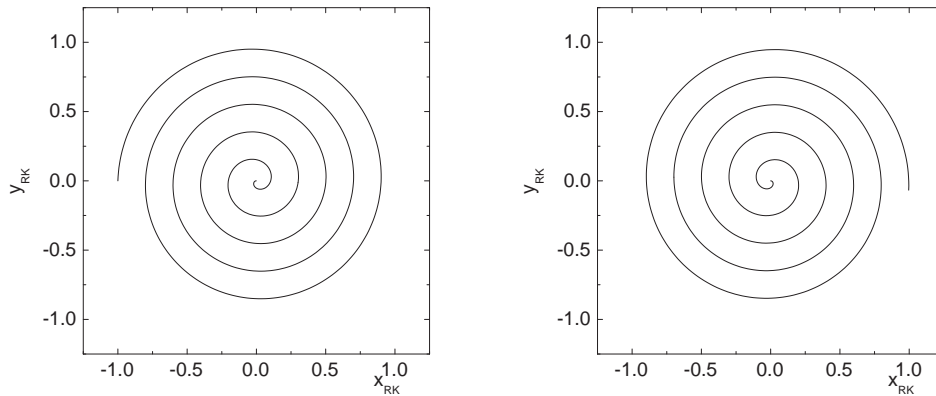


Abbildung 4.9: *Schreibspur für den sich langsam bewegenden Stift. links: Stift bewegt sich zum Drehzentrum; rechts: Stift bewegt sich vom Drehzentrum. Verwendete Funktion: links: $x_{RK}(t) = (-1 + 0.1t) \cdot \cos(\pi t)$, $y_{RK}(t) = -(-1 + 0.1t) \cdot \sin(\pi t)$; rechts: $x_{RK}(t) = (0.1t) \cdot \cos(\pi t)$, $y_{RK}(t) = -(-0.1t) \cdot \sin(\pi t)$; t von 0 bis 10*

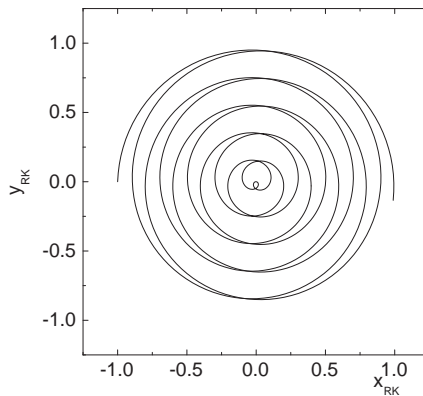


Abbildung 4.10: *Gesamte Bahnkurve des Stifts beim Überqueren der rotierenden Scheibe. Verwendete Funktion: $x_{RK}(t) = (-1 + 0.2t) \cdot \cos(2\pi t)$, $y_{RK}(t) = -(-1 + 0.2t) \cdot \sin(2\pi t)$; t von 0 bis 10*

- (c) Was passiert nun, wenn sich der **Stift sehr schnell bewegt**?

Natürlich können wir weiterhin die Beziehung

$$x_{RK}(t) = (-R + v_0 t) \cdot \cos(\omega t), \quad y_{RK}(t) = -(-R + v_0 t) \cdot \sin(\omega t). \quad (4.22)$$

verwenden und die Bahnkurve auftragen.

Gehen wir aber einen Schritt zurück und betrachten die Kräfte im rotierenden System etwas genauer.

Die dominante Kraft auf den Stift ist jetzt die Komponente $m\vec{a}_{c2}$. Die x_{RK} -Komponente der Geschwindigkeit des Stifts beim Start bei $x = x_{RK} = -R$ ist nahezu $v_{x,RK} = v_0$ und parallel zur Bahn des Stifts gerichtet. Die Coriolisbeschleunigung ist dann in -y-Richtung gerichtet und hat den Betrag $2\omega v_0$. Die Bahnkurve ist ungefähr eine Wurfparabel mit der Startgeschwindigkeit¹ $v_0\vec{e}_x$; der Stift wird

¹Wir könnten hier noch die kleine Komponente ωR in +y-Richtung hinzunehmen.

dabei in Richtung $-y$ abgelenkt, siehe Abb. 4.11 (links). Wäre der Stift dagegen von links nach rechts gewandert, wäre er in Richtung $+y$ abgelenkt worden, siehe Abb. 4.11 (rechts).

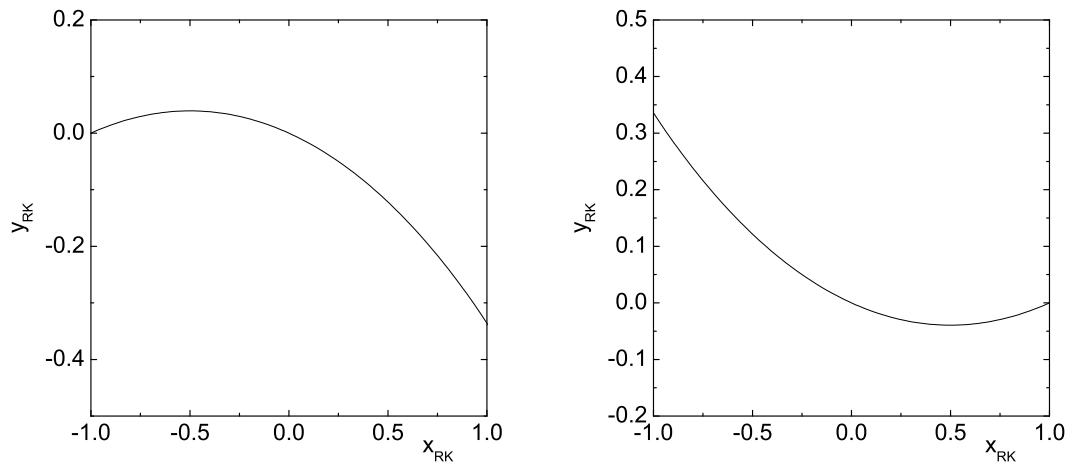


Abbildung 4.11: Bahnkurve eines mit im ruhenden System mit hoher Geschwindigkeit $v_o \vec{e}_x$ über den Drehteller bewegten Stiftes; (links): Bewegung von links nach rechts; (rechts): Bewegung von rechts nach links. Verwendete Funktionen: (links): $x_{RK}(t) = (-1 + 5t) \cdot \cos(0.2\pi t)$, $y_{RK}(t) = -(-1 + 5t) \cdot \sin(0.2\pi t)$; (rechts): $x_{RK}(t) = (1 - 5t) \cdot \cos(0.2\pi t)$, $y_{RK}(t) = -(1 - 5t) \cdot \sin(0.2\pi t)$; t von 0 bis 2

- (d) Was passiert, wenn ein Gegenstand von der Oberfläche einer rotierenden Scheibe losgelöst wird (s. Abb. 4.12(links))?

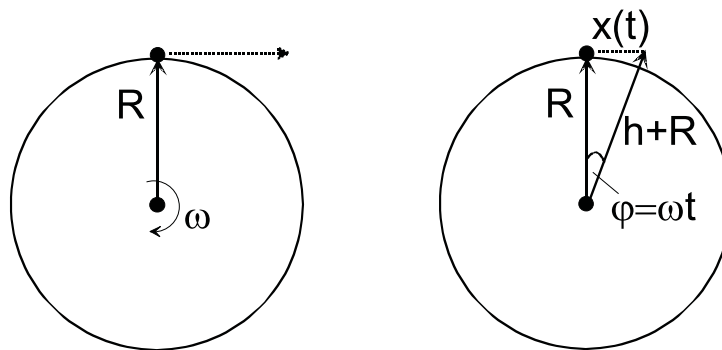


Abbildung 4.12: Ein Körper (schwarzer Punkt) wird von einer mit Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe (Radius R) losgelassen; (links) Schemazeichnung; (rechts) Zusammenhang zwischen der Höhe h des Körpers über der Scheibe und seinem Abstand $x(t)$ vom "Startpunkt".

Von der Warte eines Beobachters im rotierenden System hatte zunächst eine Zentripetalkraft $\vec{F}_{ZP} = -m\omega^2 R \cdot \vec{e}_r$ den Gegenstand (Masse m) am Rand der Scheibe (Radius R) festgehalten, um die Zentrifugalkraft $\vec{F}_z = +m\omega^2 R \cdot \vec{e}_r$ zu kompensieren. Man hatte: $0 = \vec{a}_{RK} = \vec{F}_{ZP} + \vec{F}_z$. Wird der Gegenstand losgelassen, ist $\vec{F}_{ZP} = 0$ und

wir erhalten²: $\vec{a}_{RK} = \vec{F}_z$. In den ersten Momenten ist diese Kraft ungefähr konstant und der Gegenstand wird sich gemäß:

$$h(t) \approx \frac{1}{2}\omega^2 R \cdot t^2 \quad (4.23)$$

in radialer Richtung um einen Abstand h vom Radius der Scheibe entfernen.

Wie sehen nun diese ersten Momente von der Warte des nicht-rotierenden Beobachters aus?

Vor dem Loslassen wirkte auf die Masse die radiale Beschleunigung $-m\omega^2 R \cdot \vec{e}_r$, die wiederum von einer Zentripetalkraft $m\omega^2 R \cdot \vec{e}_r$ kompensiert wurde. Im Moment des "Loslassens" sei die Masse in +y-Richtung orientiert. Ihre "Anfangsgeschwindigkeit" ist $\vec{v}_0 = \omega R \cdot \vec{e}_x$. Nach dem Loslassen entfernt sich die Masse mit dieser Anfangsgeschwindigkeit kräftefrei³ von der Scheibe, d. h. wir haben: $x(t) = v(t) \cdot t$.

Nun sollte aber die Messgröße $h(t)$ für beide Beobachter die selbe sein. Dies trifft tatsächlich zu, wie wir Abb. 4.12 (rechts) entnehmen können: Wenn sich die Masse um die Strecke $x(t)$ entfernt hat, ist der Startpunkt $(x, y) = (0, R)$ ebenfalls ein Stück weiterrotiert. Es gilt: $(h + R) \cdot \cos \varphi = R$, was für kleine Winkel mit $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ ergibt:

$$h + R - \frac{h\varphi^2}{2} - \frac{R\varphi^2}{2} = R. \quad (4.24)$$

Wir interessieren uns nur für die ersten Momente der Bewegung, so dass sowohl h als auch φ klein sind. Wir können damit den Term $\frac{h\varphi^2}{2}$ gegenüber den anderen Termen vernachlässigen und erhalten: $h = \frac{R\varphi^2}{2}$.

Nun ist $\varphi(t) = \omega t$ und damit $h(t) \approx \frac{1}{2}\omega^2 R t^2$, was sich mit dem Ergebnis des rotierenden Beobachters deckt.

Der weitere Verlauf der Bewegung des Massenpunkts ist für den ruhenden Beobachter eine Wurfparabel; für den rotierenden Beobachter krümmt sich die Bahn des Teilchens zunächst durch den Einfluss der Corioliskraft "nach links" weg und beschreibt schließlich eine gegen den Uhrzeigersinn verlaufende Spirale. Wir können dies mittels der allgemeinen Koordinatentransformation schreiben als:

$$x_{RK} = (\omega R t) \cdot \cos(\omega t) + (R - g t^2 / 2) \cdot \sin(-\omega t) \quad (4.25)$$

$$y_{RK} = -(\omega R t) \cdot \sin(-\omega t) + (R - g t^2 / 2) \cdot \cos \omega t. \quad (4.26)$$

Hierbei haben wir berücksichtigt, dass sich im hier dargestellten Beispiel Fall die Scheibe im Uhrzeigersinn dreht (deshalb der Vorzeichenwechsel der sin-Funktionen). Wir haben ausserdem $x(t) = v_0 t = \omega R t$, $y(t) = R - g t^2 / 2$ benutzt. Eine entsprechend dieser Transformation berechnete Bahnkurve zeigt Abb. 4.13.

²Sobald sich der Körper bewegt, wirkt zusätzlich die Corioliskraft. Sie war null, solange der Gegenstand im rotierenden System ruhte; nach dem "Loslassen" wird die Corioliskraft von null auf einen endlichen Wert anwachsen. Solange wir nur die ersten Momente der Bewegung der Masse verfolgen, können wir F_c aber vernachlässigen.

³Wir unterschlagen hier den Einfluss der Schwerkraft; Beziehen wir diese mit ein, beschreibt die losgelassene Masse eine Wurfparabel.

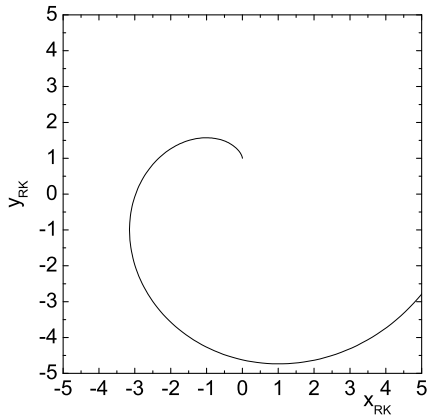


Abbildung 4.13: Bahnkurve eines von einer mit der Kreisfrequenz ω rotierenden Scheibe wegfliegenden Gegenstands. Startgeschwindigkeit ωR . Verwendete Funktionen: $x_{RK} = (\pi t) \cdot \cos(\pi t) - (R - 0.2t^2) \cdot \sin(\pi t)$; $y_{RK} = (\pi t) \cdot \sin(\pi t) + (1 - 0.2t^2) \cdot \cos \pi t$.

- (e) Wir lassen nun ein **Pendel über** einer sich mit Frequenz ω **gegen den Uhrzeigersinn drehenden Scheibe** schwingen. Im ruhenden System sei die Bahnkurve $x(t) = x_0 \cos \omega t$, $y = z = 0$. Im sich drehenden System beschreibt das Pendel eine Rosettenbahn ("Hypozykloide"), wie in Abb. 4.14 dargestellt.

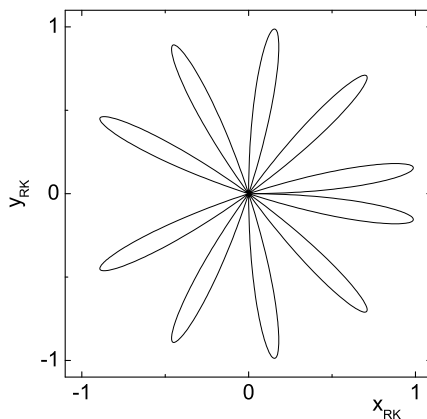


Abbildung 4.14: Rosettenbahn eines im Ruhesystem mit $x(t) = x_0 \cos \omega t$ schwingenden Pendels, das seine Bahn auf eine mit ω gegen den Uhrzeigersinn drehende Scheibe schreibt. Verwendete Funktionen: $x_{RK} = (\sin \pi t) \cdot \cos(0.1\pi t)$; $y_{RK} = -(\sin \pi t) \cdot \sin(0.1\pi t)$; t von 0 bis 10.

Ist die Frequenz des Pendels sehr hoch gegen die Drehfrequenz der Scheibe, so können wir sagen, die Ebene, in der das Pendel schwingt, dreht sich allmählich. Die Drehrichtung der Schwingungsebene ist der Drehrichtung der Scheibe entgegengesetzt. Im rotierenden System entsteht der Effekt durch die Corioliskraft. Wie im Fall 3 ist die Geschwindigkeit des Pendels relativ zur Scheibe nahezu parallel zu \vec{r}_{RK} . Damit haben wir für die Coriolisbeschleunigung:

$$\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v} = -2\vec{\omega} \times (\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) \approx -2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\parallel} \quad (4.27)$$

Die Indizes \parallel und \perp beziehen sich auf den Anteil der Relativgeschwindigkeit parallel und senkrecht zur Bahnkurve.

- (f) Das Foucault'sche Pendel

Der Effekt der Drehung der Schwingungsebene eines Pendels im rotierenden System wurde von Foucault 1851 benutzt, um die **Drehung der Erde** nachzuweisen. Foucault führte das Experiment in Paris durch.

Um das Prinzip nochmals genauer zu sehen, nehmen wir zunächst an, das Experiment werde am **Nordpol** durchgeführt. Dies entspricht genau der Situation des in 5 beschriebenen Drehtellers. Die Erde dreht sich für einen am Nordpol stehenden Beobachter **gegen den Uhrzeigersinn**, die Schwingungsebene des Pendels - die für den ruhenden Beobachter konstant bleibt - dreht sich im Uhrzeigersinn. In **24 Stunden** beträgt die Drehung **360°**. Wird das Experiment am **Südpol** durchgeführt, so dreht sich die Schwingungsebene im Uhrzeigersinn. Auch hier beträgt die Drehung **360° in 24 Stunden**. Der Grund für diese Umkehr der Drehrichtung liegt daran, dass der Südpol-Experimentator und dessen Koordinatensystem bzgl. seinem Kollegen am Nordpol auf dem Kopf steht. Für ihn dreht sich die Erde rechts herum.

An einem beliebigen Ort auf der Erde müssen wir das Kreuzprodukt in der Coriolisbeschleunigung $\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v}$ etwas genauer betrachten. Rein formal erhalten wir eine Beschleunigung $a_c = |2\omega \cdot v \cdot \sin \varphi| \approx |2\omega \cdot v_{\parallel} \cdot \sin \varphi|$, wobei φ der Winkel zwischen $\vec{\omega}$ und \vec{v} ist. Im Fall des Foucault-Pendels ist φ gerade der Breitengrad des Orts, in dem das Experiment durchgeführt wird. Wir können dies an Hand der Abb. 4.15 veranschaulichen. Wir betrachten das Pendel an einem Ort der geographischen Breite φ . Um die Situation auf die am Nord- bzw. am Südpol zurückzuführen, müssen wir die Drehachse $\vec{\omega}_E$ der Erde auf die z-Achse des Pendels projizieren. Diese Achse ist um φ gegen $\vec{\omega}$ geneigt, die Projektion ist $\vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \sin \varphi$. Man beachte, dass am Äquator $\sin \varphi = 0$ ist und dort keine Drehung der Pendelebene auftritt.

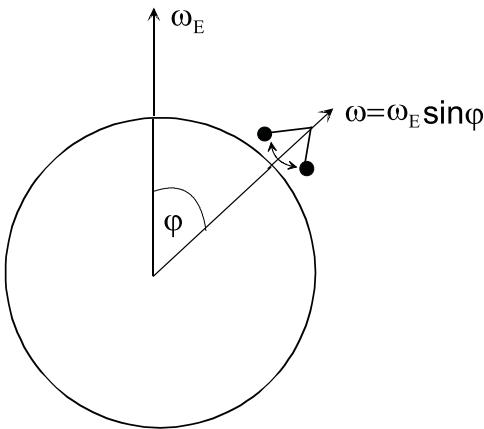


Abbildung 4.15: *Foucault-Pendel an einem Ort des Breitengrads φ .*

In **Tübingen** ist $\varphi = 48.5^\circ$ nördlicher Breite. Wir erhalten $\omega = \omega_E \cdot \sin \varphi = 360^\circ / (32h)$. Die Pendelachse dreht sich **in 32 Stunden um 360°**, was $11.25^\circ / \text{Std.}$ entspricht. Die Drehrichtung ist wie am Pol gegen den Uhrzeigersinn. Diese Drehung können wir an einem im Hörsaal schwingenden Foucault-Pendel beobachten. Das Pendel schwingt dabei in einem Glasgefäß (Aquarium), um nicht durch Luftzug gestört zu werden. Hier sei noch kurz angemerkt, dass im allgemeinen auch auf die Aufhängung des Pendels Scheinkräfte wirken, die sich dem Pendel mitteilen; auf die Diskussion dieser Effekte wird hier aber verzichtet.

(g) Corioliskraft und Wetter

Man hat bislang eventuell den Eindruck bekommen können, dass Scheinkräfte im rotierenden Bezugssystem Erde eher gering sind und sich nur in subtilen Effekten wie der Drehung von Schwingungsebenen von Foucault-Pendeln äußern. Tatsächlich sind typische Coriolisbeschleunigungen sehr klein. Betrachten wir den Betrag von $a_c = | -2\vec{\omega} \times \vec{v}_{RK} |$. Wenn wir $\vec{v}_{RK} \perp \vec{\omega}$ annehmen, erhalten wir $a_c = 2\omega v = 2\frac{2\pi}{T}v$. Setzen wir hier $T = 24$ h ein, so erhalten wir $a_c \approx 1.5 \cdot 10^{-4} v/(ls)$, was selbst für $v = 300$ m/s, also einem Wert in der Nähe der Schallgeschwindigkeit, nur etwa $a_c \approx 0.044$ m/s² liefert, also etwa 0.5% von g . Allerdings wirkt die Corioliskraft im allgemeinen in eine andere Richtung als g ; damit sind grundsätzlich neue Effekte zu erwarten, auch wenn a_c klein ist. Speziell ist die Corioliskraft für die Dynamik unserer Erdatmosphäre -das Wetter - extrem wichtig. Betrachten wir hierzu zunächst die Wetterkarte der Abb. 4.16. Hier ist ein über Europa liegendes Hochdruck- und Tiefdruckgebiet gezeichnet. Man erkennt Wolkenbänder, die sich gegen den Uhrzeigersinn in das Tiefdruckgebiet spiralisieren.

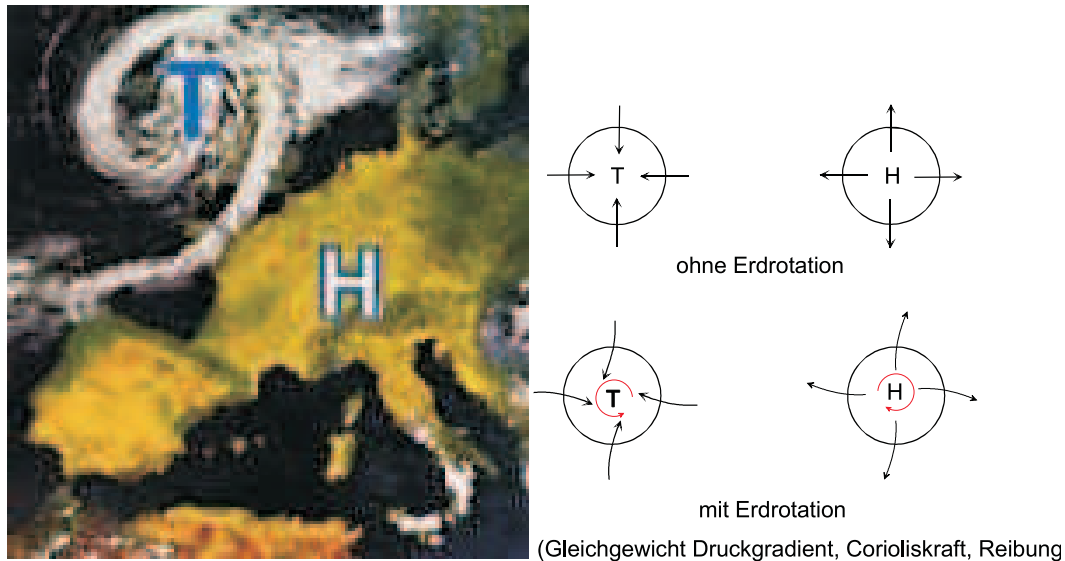


Abbildung 4.16: links: Hoch- und Tiefdruckgebiet über Europa; rechts: Luftbewegung in der Nähe von Hoch und Tief.

Bewegungen der Atmosphäre entstehen zunächst dadurch, dass am Äquator die Erde wesentlich stärker erwärmt wird als an den Polen. Am Äquator steigt warme Luft auf und sinkt an den Polen wieder ab. Würde die Erde nicht rotieren, so würde daraus ein stabiles Konvektionssystem entstehen, bei der Luftmassen vom Äquator zu den Polen und zurück transportiert würden. Im Fall des in Abb. 4.16 über Europa liegenden Hochs und Tiefs würde Luft in radialer Richtung aus dem Hochdruckgebiet heraus- bzw. in radialer Richtung in das Tiefdruckgebiet hineinströmen⁴. Die treibende Kraft ist hierbei der Gradient des Luftdrucks. Nun müssen wir die Corioliskraft berücksichtigen. Sie führt auf der Nordhalbkugel dazu, dass wie in Abb. 4.16 angedeutet die in das Tief hineinströmenden Luftmassen nach rechts

⁴Hoch und Tief hätten sich in dieser Form ohne Erdrotation allerdings erst gar nicht gebildet.

abgelenkt werden, so dass sich insgesamt ein gegen den Uhrzeigersinn drehender Wirbel ausbildet. Analog rotieren die aus dem Hoch ausströmenden Luftmassen im Uhrzeigersinn.

Man beachte wiederum, dass die Drehrichtungen auf der Südhalbkugel gerade umgekehrt sind. Hier drehen Tiefdruckgebiete im Uhrzeigersinn, Hochdruckgebiete entgegen dem Uhrzeigersinn.

Dieser Effekt wird in den Abb. 4.17 und 4.18 veranschaulicht. Abb. 4.17 zeigt Wirbelstürme und Hurricanes auf der Nordhalbkugel, Abb. 4.18 die entsprechenden Wirbel auf der Südhalbkugel. Spätestens hier sollte klar sein, dass die Corioliskraft einen sehr großen Einfluss haben kann.

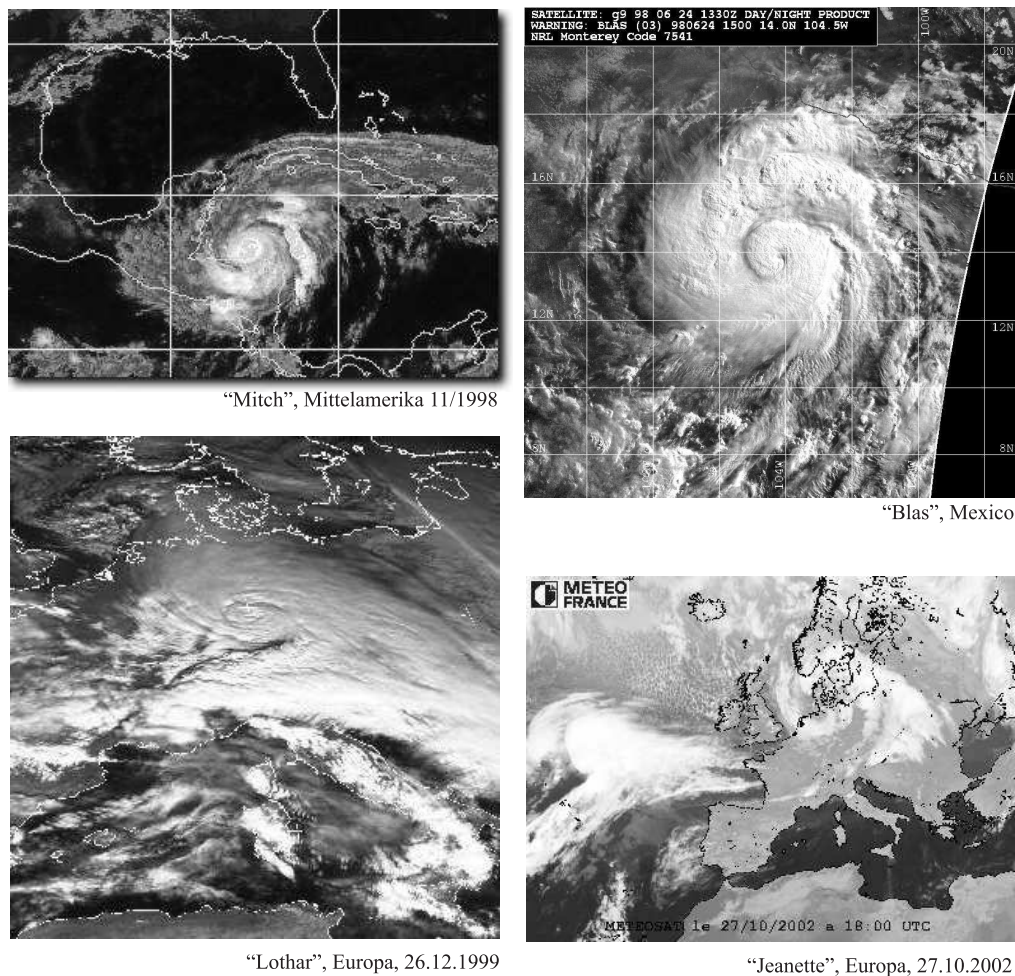
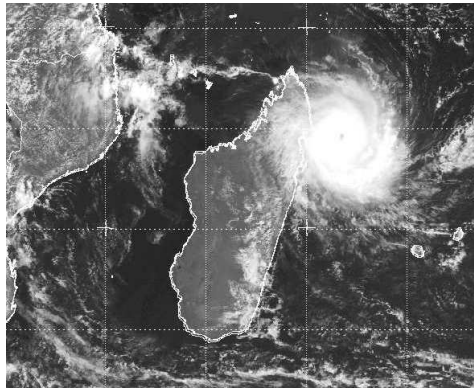


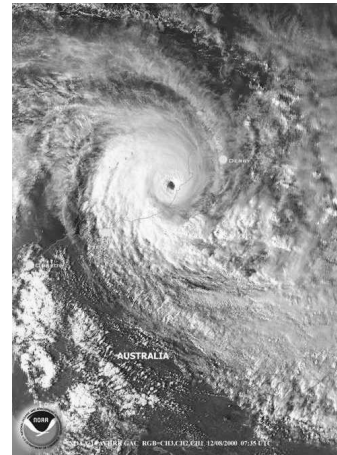
Abbildung 4.17: *Wirbelstürme und Hurricanes auf der Nordhalbkugel. Quellen: "Mitch": rhein-zeitung.de/on/98/10/28/topnews/mitch.html, andere: <http://www-imk.physik.uni-karlsruhe.de/~muehr/Sat/satsp.htm>*

4.4.2 Scheinkräfte im linear beschleunigten Bezugssystem

Zum Abschluss dieses Kapitels möchten wir noch kurz darauf hinweisen, dass nicht nur in rotierenden Systemen Scheinkräfte auftreten. Ein einfaches Beispiel für ein weiteres

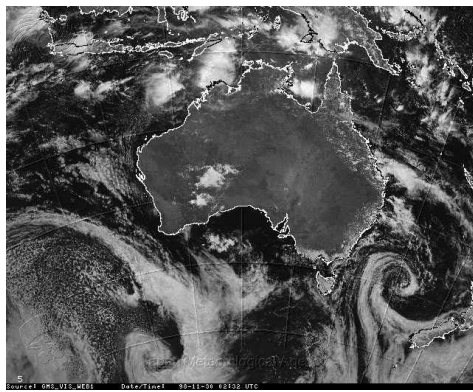


"Hudah", Madagaskar, 2. 4. 2000



"Sam", Australien, 8.12. 2000

"Nicole", 3. 11. 1998, Australien/Neuseeland



"Dani", Südpazifik, 16. 1. 1999

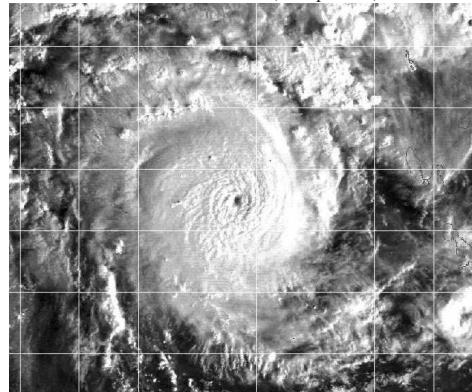


Abbildung 4.18: Wirbelstürme und Hurricanes auf der Südhalbkugel. Quelle: <http://www-imbk.physik.uni-karlsruhe.de/~muehr/Sat/satsp.htm>

System ist ein in eine feste Richtung beschleunigendes Objekt (z. B. Auto, Rakete, Aufzug, ...).

Im Fall des beschleunigenden Aufzugs wirkt auf jedes Objekt im Aufzug, sowie auf den Aufzug selbst, die Erdbeschleunigung $-g\vec{e}_z$. Der Aufzug werde mit der Beschleunigung a nach oben beschleunigt. Auf eine Masse m im Aufzug wirkt dann die Kraft $m(-a-g) \cdot \vec{e}_z$ nach unten. Zur Erdbeschleunigung g wird also die Scheinkraft a addiert. Hierbei müssen a und g nicht notwendig entgegengesetzt gerichtet sein. Im Spezialfall des freien Falls ist $|a| = g$ und in Richtung $-z$ gerichtet. Die Gesamtkraft auf die Masse m im Aufzug ist null.

Es sei schließlich angemerkt, dass für einen Beobachter im konstant beschleunigten Aufzug Erdbeschleunigung und Scheinkraft völlig äquivalent sind. Dies ist einer der Ansatzpunkte, mit der Einstein seine Allgemeine Relativitätstheorie aufgebaut hat.