# Übungen zur Vorlesung Mathematischen Logik **Blatt 3**

**Prof. Dr. P. Schroeder-Heister** **SS 2012**

**Aufgabe 10** (4 Punkte)

Für eine Belegung $v$, eine Aussagenvariable $p$ und einen Wert $w \in \{0,1\}$ sei die Belegung $v[p \mapsto w]$ wie folgt definiert:

$$v[p \mapsto w](p_i) = \begin{cases} w, & \text{falls } p_i = p \\ v(p_i), & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass für alle Formeln $\varphi$ und $\psi$, alle Aussagenvariablen $p$ und alle Belegungen $v$ folgendes gilt:

$$[\![\varphi]\!]_{v[p \mapsto [\![\psi]\!]_v]} = [\![\varphi[\psi/p]]\!]_v$$

**Aufgabe 11** (2+2 Punkte)

(i). Geben Sie eine exakte rekursive Definition der simultanen Substitution an. (Das heisst eine rekursive Definition der Formel $\varphi[\psi_1, \dots, \psi_n / p_{k_1}, \dots, p_{k_n}]$ wobei $0 \leq k_1 < \dots < k_n \in \mathbb{N}$ und $\varphi, \psi_i$ Formeln.)

(ii). Drücken Sie die simultane Substitution durch Hintereinander-Ausführung von einfachen Substitutionen (siehe Definition 3.1) aus.

**Aufgabe 12** (2 Punkte)

Geben Sie zu der Formel $(\neg p \vee \neg q) \to r$ eine äquivalente Formel an, in der als einziger Junktor der zweistellige Junktor $|$, der durch die Wahrheitsfunktion $f_|(x,y) = 1 - xy$ definiert ist, vorkommt.

**Aufgabe 13** (2 Punkte)

Konstruieren Sie nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren (siehe auch Skript S. 23) mit Hilfe der Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\neg$ und $\perp$ eine Formel, die den dreistelligen Junktor \$ ausdrückt, welcher durch folgende Wahrheitstafel gegeben ist:

| $\varphi_3$ | $\varphi_2$ | $\varphi_1$ | $\$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Abgabe bis Do. 17.05.2012 um 18:00 Uhr als PDF auf der Webseite der Veranstaltung.