Übungen zur Vorlesung λ-Kalkül und kombinatorische Logik

Aufgabe 1

a) Geben Sie eine β-Reduktionsfolge für den folgenden Term an:

$$(\lambda x.(\lambda x.yxx)(\lambda y.yxx))(\lambda y.xy).$$

b) Sei $N \equiv \lambda uxy.x(uxy)$, $\underline{1} \equiv \lambda xy.xy$ und $\underline{2} \equiv \lambda xy.x(xy)$. Zeigen Sie:

$$N\underline{1} \rhd_\beta \underline{2}.$$

c) Sei $\underline{0} \equiv \lambda xy.y$ und $D \equiv \lambda xyz.z(Ky)x$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} Dxy\underline{0} &\rhd_\beta x, \\ Dxy\underline{1} &\rhd_\beta y. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie unter der Voraussetzung $x \notin FV(PQ)$:

$$Px =_{\beta\eta} Qx \quad \Longrightarrow \quad P =_{\beta\eta} Q.$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie:

$$M \rhd_\beta N \quad \text{genau dann, wenn} \quad \lambda\beta_\rhd \vdash M = N.$$

(Hinweis: Für die Richtung von links nach rechts verwende man Induktion über die Länge von β-Reduktionsfolgen, für die von rechts nach links Induktion über Herleitunglänge.)