

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zeigen Sie für Formeln $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ und beliebige \mathcal{L} -Strukturen \mathfrak{A} , dass gilt:

$$\text{Wenn } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ oder } \mathfrak{A} \models \psi, \text{ dann } \mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten die Behauptung

$$(\mathfrak{A} \models \varphi \implies \mathfrak{A} \models \psi) \implies \mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi \tag{*}$$

für $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ und eine \mathcal{L} -Struktur \mathfrak{A} .

- (a) Zeigen Sie, dass (*) nicht für beliebige Formeln $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ gilt, indem Sie ein Gegenbeispiel angeben, für das Sie nachweisen, dass es eins ist. (3 Punkte)
- (b) Zeigen Sie, dass (*) gilt, falls φ und ψ Aussagen sind. (2 Punkte)

Aufgabe 3 (3 Punkte)

- (a) Geben Sie eine Aussage φ an, die nur in Strukturen mit einelementigem Gegenstandsbereich gültig ist. (1 Punkt)
- (b) Geben Sie eine Aussage ψ an, die nur in Strukturen mit zweielementigem Gegenstandsbereich gültig ist. (2 Punkte)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

- (a) Es sei $\varphi \in \mathcal{L}$ eine Formel mit $FV(\varphi) \neq \emptyset$ und \mathfrak{A} eine \mathcal{L} -Struktur. Zeigen Sie, dass die Behauptung

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ oder } \mathfrak{A} \models \neg\varphi$$

nicht allgemein gilt. (2 Punkte)

- (b) Nun sei φ eine Aussage. Zeigen Sie, dass auch die Behauptung

$$\models \varphi \text{ oder } \models \neg\varphi$$

nicht allgemein gilt. (2 Punkte)

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Überprüfen Sie, ob für eine beliebige Formel φ die Formel $\exists x(\varphi \rightarrow \forall x\varphi)$ allgemeingültig ist. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis.