

Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister

Blatt 2

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Führen Sie die folgenden Substitutionen aus:

a) $(p_1 \wedge p_0 \rightarrow (p_0 \rightarrow p_3))[\neg p_0 \rightarrow p_3/p_0]$

b) $((p_3 \leftrightarrow p_0) \vee (p_2 \rightarrow \neg p_0))[p_1 \leftrightarrow p_2/p_0]$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ermitteln Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, welche der folgenden Formeln Tautologien sind.

a) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q \wedge \neg q)$

b) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r))$

c) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

d) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

e) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

f) $\neg(p \rightarrow \neg p)$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ermitteln Sie durch algebraische Umformungen, welche der folgenden Ausdrücke äquivalent sind.

a) $(p \wedge \neg q)$

b) $(p \rightarrow q)$

c) $((\neg p \wedge q) \vee p)$

d) $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$

e) $(\neg q \rightarrow \neg p)$

f) $(\neg p \rightarrow \neg q)$

g) $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow \neg p))$

h) $((r \wedge (p \vee \neg q)) \vee (\neg r \wedge (q \rightarrow p)))$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Beweisen Sie: Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \rho$, dann $\varphi \models \rho$.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Beweisen Sie: $\llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket_v = 1$ genau dann, wenn $\llbracket \varphi \rrbracket_v \leq \llbracket \psi \rrbracket_v$.

Aufgabe 6 (2+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass weder $\{\neg\}$ noch $\{\rightarrow, \vee\}$ funktional vollständige Mengen von Konnektiven sind.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Konstruieren Sie nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren mit Hilfe der Junktoren \wedge, \vee und \neg eine Formel, die den ternären Junktor $\$$ ausdrückt, welcher durch folgende Wahrheitstafel gegeben ist:

φ_1	φ_2	φ_3	$\$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Aufgabe 8 (4 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie, dass die Menge der Bewertungsfunktionen überabzählbar ist.