Logiken für Programme und Prozesse — Übungsblatt 2

Michael Arndt, WSI für Informatik — **WS 2004/05**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß folgende aussagenlogische Formeln für alle ϕ, ψ Tautologien sind:

(a) $\neg\neg\phi \to \phi$

(b) $\phi \to (\psi \to \phi)$

(c) $\phi \vee \phi \leftrightarrow \phi$

(d) $\phi \to \psi \leftrightarrow \neg\psi \to \neg\phi$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Wahrheitstafel über $p_1, \ldots, p_n$ ist eine Funktion $T : S_n \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Jede aussagenlogische Formel ϕ erklärt eine Wahrheitstafel T_ϕ durch

$$T_\phi(u) \stackrel{\text{def}}{=} u(\phi).$$

Zeigen Sie, daß es umgekehrt zu jeder Wahrheitstafel T eine aussagenlogischen Formel ϕ gibt mit $T = T_\phi$. Überlegen Sie sich dazu ein Format für eine *Normalform*, durch welches jede beliebige Wahrheitstafel T auf (syntaktisch) möglichst einfache Weise repräsentiert werden kann.

Aufgabe 3 (4 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Eine *Boolsche Algebra* ist eine Struktur $\mathfrak{B} = \langle B, \cdot, +, ^-, 0, 1\rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
(x \cdot y) \cdot z & = & (x \cdot y) \cdot z & (x + y) + z & = & (x + y) + z \\
x \cdot y & = & y \cdot x & x + y & = & y + x \\
x \cdot (y + z) & = & (x \cdot y) + (x \cdot z) & x + (y \cdot z) & = & (x + y) \cdot (x + z) \\
x \cdot 1 & = & x & x + 0 & = & x \\
x \cdot 0 & = & 0 & x + 1 & = & 1 \\
x \cdot \bar{x} & = & 0 & x + \bar{x} & = & 1 \\
x \cdot x & = & x & x + x & = & x
\end{array}$$

(a) Sei $V = \{p, q, r\}$ eine Menge von Aussagenvariablen und Ψ die Menge der Formeln über $V \cup \{\wedge, \vee, \neg\}$. Die Relation $\equiv$ auf Ψ sei definiert durch $\phi \equiv \psi$, falls $\phi \leftrightarrow \psi$ eine Tautologie ist. Zeigen Sie, daß $\Psi/\equiv$ eine Boolsche Algebra ist.

(b) Es werde zusätzlich die Relation $\leq$ auf $\mathfrak{B}$ definiert durch $a \leq b$, falls $a \cdot b = a$. Zeigen Sie, daß $\leq$ eine Halbordnung mit minimalem Element 0 und maximalem Element 1 ist.

(c) Ein *Filter* F von $\mathfrak{B}$ ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{B}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Falls $a \in F$ und $b \in F$, dann ist $a \cdot b \in F$.
- Falls $a \in F$ und $a \leq b$, dann ist $b \in F$.

Ein Filter ist *konsistent*, falls $0 \notin F$. Ein *Ultrafilter* ist ein maximal konsistenter Filter, d.h. ein Filter, der nicht echt in einem anderen konsistenten Filter enthalten ist. Geben Sie zwei verschiedene Ultrafilter von $\Psi/\equiv$ an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

$$\text{HK} \vdash (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \rho) \to (\phi \to \rho))$$