Logiken für Programme und Prozesse — Übungsblatt 10

Michael Arndt, WSI für Informatik — **WS 2006/07**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei ϕ eine Σ-Formel mit $\not\models \phi$, X eine abzählbare Menge von Konstantensymbolen und Γ_ϕ definiert wie in der Vorlesung. Zeigen Sie, daß für jeden Σ_X-Term t und Zustand $u \in Z_\phi$ des Gegenmodells $\mathfrak{M}_\phi$ gilt:

$$a_u^\phi(t) = [\mathbf{c}] \text{ genau dann, wenn } (t \doteq \mathbf{c}) \in \Gamma_\phi$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $\Sigma = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, +, \times, -, \doteq, \geq, >\}$, interpretiert über dem Berechnungsbereich der natürlichen Zahlen. Gegeben sei weiterhin das folgende Programm α über Σ:

$$
\begin{array}{l}
x_1 := \mathbf{0};\\
x_2 := \mathbf{0};\\
\textbf{while } \neg(x_2 \doteq x_0) \textbf{ do } (\\
\quad x_1 := x_1 + \mathbf{2} \times x_2 + \mathbf{1};\\
\quad x_2 := x_2 + \mathbf{1}\\
)
\end{array}
$$

(a) Zeigen Sie (informell) mithilfe des Hoare-Kalküls: $\{x_0 \geq \mathbf{0}\}\ \alpha\ \{x_1 \doteq x_0 \times x_0\}$

(b) Gilt auch $\{\}\ \alpha\ \{x_1 \doteq x_0 \times x_0\}$? Begründen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 3 (10 Zusatzpunkte)

Es sei Σ wie oben, wieder interpretiert über dem Berechnungsbereich der natürlichen Zahlen. Gegeben sei nun das folgende Programm β:

$$
\begin{array}{l}
x_2 := x_0;\\
x_3 := \mathbf{0};\\
\textbf{while } (x_2 \geq x_1) \textbf{ do } (\\
\quad x_2 := x_2 - x_1;\\
\quad x_3 := x_3 + \mathbf{1}\\
)
\end{array}
$$

Zeigen Sie die Gültigkeit der Zusicherung $\{\}\ \beta\ \{x_0 \doteq x_3 \times x_1 + x_2 \wedge x_2 \geq \mathbf{0} \wedge x_1 > x_2\}$