

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)

Es seien $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ beliebige Formeln, und x eine Variable mit $x \notin \text{FV}(\psi)$. Zeigen Sie, dass die folgenden logischen Äquivalenzen bestehen:

a) $\exists x(\psi \rightarrow \phi) \models (\psi \rightarrow \exists x\phi)$

b) $\forall x(\psi \rightarrow \phi) \models (\psi \rightarrow \forall x\phi)$

c) $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \models (\exists x\phi \rightarrow \psi)$

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

Es sei $\phi \in \mathcal{L}$ eine beliebige Formel, und x eine beliebige Variable. Zeigen Sie, dass die folgenden logischen Äquivalenzen bestehen:

a) $\exists x\phi \models \neg\forall x\neg\phi$

b) $\forall x\phi \models \neg\exists x\neg\phi$

c) $\forall x\forall y\phi \models \forall y\forall x\phi$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es sei $\phi \in \mathcal{L}$ eine beliebige Formel. Überprüfen Sie, ob die Formel $\exists x(\phi \rightarrow \forall x\phi)$ allgemeingültig ist. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis.