

Übungsblatt 6, Statistik II: Dichtetransformation und Momentenberechnung

Aufgabe 1: Es sei X eine normalverteilte Zufallsvariable, also $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Berechnen Sie mit Hilfe des Dichtetransformationstheorems

$$f_Y(Y) = f_X(h^{-1}(Y)) \left| \frac{dh^{-1}(Y)}{dY} \right|$$

die Verteilung der transformierten Zufallsvariable $Y = h(X)$:

1. $Y = \exp(X)$
2. $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$

Wie heissen die Verteilungen aus 1) und 2)?

Hinweis:
$$f_X(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Momente der folgenden Verteilungen mit Hilfe ihrer Momentenerzeugenden Funktion (MEF). Es gilt:

$$\left[\frac{d^r MEF(t)}{dt^r} \right]_{t=0} = E(X^r)$$

1. Poisson-Verteilung

MEF: $M_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$ für $t \in \mathbb{R}$

2. Exponentialverteilung

MEF: $M_X(t) = (1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$ für $t < \lambda$

3. Normalverteilung

MEF: $M_X(t) = \exp(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2})$ für $t \in \mathbb{R}$