Übungsblatt Bivariate Normalverteilung

Aufgabe 1: Es seien X und Y bivariat normalverteilt mit

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left(-\frac{Q}{2(1-\rho_{XY}^2)}\right)$$

wobei

$$Q = \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2$$

Zeigen Sie, dass die Randverteilung von X durch eine Normalverteilung mit $N(\mu_X;\sigma_X^2)$ gegeben ist.

Hinweis: Es gilt

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy.$$

Substituieren Sie zuerst $u = \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)$ und $v = \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$.

Aufgabe 2: Es seien X und Y bivariat normalverteilt wie in Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die bedingte Verteilung $f_{Y|X}(y|x)$ auch normalverteilt ist. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der bedingten Verteilung.

Hinweis: Es gilt:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

Aufgabe 3: Die Renditen r_A und r_B zweier Aktien A und B seien gemeinsam normalverteilt mit $\mu_A = 0,10$, $\mu_B = 0,08$, $\sigma_A = 0,15$, $\sigma_B = 0,10$ und $\rho_{AB} = 0$. Berechnen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeit dafür, dass $r_A \leq -0,05$ und $r_B \leq -0,03$, also $P(r_A \leq -0,05, r_B \leq -0,03)$

Aufgabe 4:

Angenommen, Konsum (C) und Einkommen (Y) sind bivariat normalverteilt mit $\mu_C = 500$, $\mu_Y = 1500$, $\sigma_C = 160$ $\sigma_Y = 250$ und $\rho_{CY} = 0,7$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für $C \leq 400$, gegeben $Y = 1200$, also $P(C \leq 400|Y = 1200)$. Benutzen Sie dafür Ihre Ergebnisse für den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz aus Aufgabe 2. Vergleichen Sie den bedingten Erwartungswert mit dem unbedingten Erwartungswert.