

RiskMetrics[®]:
Exponentially Weighted Moving Average
(EWMA)

Oliver Wuensche

- RiskMetrics® benutzen zur Schätzung von Volatilitäten einen sogenannten EWMA-Schätzer.
- EWMA (exponentially weighted moving average) ist zurückzuführen auf die Methode der **Exponentiellen Glättung**.
- Dabei nimmt das Gewicht von vergangenen Beobachtungen exponentiell ab.
- Gegensatz: Methode der gleitenden Durchschnitte (Gleichgewichtung der Beobachtungen)

Ein n-Perioden EWMA ist definiert als:

$$\frac{x_{t-1} + \lambda x_{t-2} + \lambda^2 x_{t-3} + \dots + \lambda^{n-1} x_{t-n}}{1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1}}$$

Der Nenner kann auch geschrieben werden als: $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i$

Aus der Summenformel der geometrischen Reihe wissen wir:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i = \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}$$

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert dieser Ausdruck gegen $\frac{1}{1-\lambda}$

⇒ EWMA kann auch ausgedrückt werden durch:

$$(1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} x_{t-i}$$

Für die Volatilitätsschätzung entspricht x_i nun gerade den quadrierten Renditen r_i^2 , so dass:

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} r_{t-i}^2$$

Aus diesem Ausdruck kann nun eine einfache Rekursionsformel zur Berechnung der $\hat{\sigma}_t^2$ abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_t^2 &= (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} r_{t-i}^2 \\
 &= (1 - \lambda) [r_{t-1}^2 + \lambda r_{t-2}^2 + \lambda^2 r_{t-3}^2 + \dots] \\
 &= (1 - \lambda) r_{t-1}^2 + \lambda \left\{ (1 - \lambda) [r_{t-2}^2 + \lambda r_{t-3}^2 + \lambda^2 r_{t-4}^2 + \dots] \right\} \\
 &= (1 - \lambda) r_{t-1}^2 + \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2
 \end{aligned}$$

Dasselbe gilt für die Kovarianz, die durch eine äquivalente Rekursionsformel ermittelt werden kann:

$$Cov(r_{1,t}, r_{2,t}) = \hat{\sigma}_{12,t} = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} r_{1,t-i} r_{2,t-i}$$



$$Cov(r_{1,t}, r_{2,t}) = \hat{\sigma}_{12,t} = (1 - \lambda) r_{1,t-1} r_{2,t-1} + \lambda \hat{\sigma}_{12,t-1}$$

Wie können wir λ interpretieren?

Auf der rechten Seite der Rekursionsformel haben wir zwei Terme:

1. $(1 - \lambda)r_{t-1}^2$: **Reaktion der Volatilität auf Marktereignisse**

⇒ je kleiner λ , desto stärker reagiert die Volatilität auf Marktinformation

2. $\lambda\hat{\sigma}_{t-1}^2$: **Persistenz der Volatilität**

⇒ ist die Volatilität gestern hoch, so wird sie auch heute hoch sein, egal was am Markt passiert