Übungsaufgaben diskrete Zufallsvariable

1. Erklären Sie formal, in Worten und graphisch (letzteres am Beispiel einer stetigen und diskreten Zufallsvariable), was die Verteilungsfunktion, $F_X(x)$, und die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_X(x)$ einer Zufallsvariable X aussagt.

2. X ist eine diskrete Zufallsvariable mit P(X=0) = 0,25, P(X=1) = 0,125, P(X= 2) = 0,125 und P(X= 3) = 0,5. Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion und die Wahrscheinlichkeitsfunktion.

3. Die folgende Tabelle zeigt die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable mit den möglichen Ausprägungen x_i =1,2,3,4,5. Schreiben Sie daneben die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_X(x_i)$ und stellen Sie Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion graphisch dar.

x_i	$F_X(x_i)$	$f_X(x_i)$
1	0,1	
2	0,3	
3	0,7	
4	0,8	
5	1	

4. Für eine stetige Zufallsvariable gilt $P(X = x) = 0$ für $x \in R$. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

5. Ein Zufallsexperiment liefert das Resultat „Erfolg“ mit Wahrscheinlichkeit 0,4 oder „kein Erfolg“ mit Wahrscheinlichkeit 0,6 . Das Zufallsexperiment wird 8 mal wiederholt. Die interessierende Zufallsvariable X ist die Anzahl der Erfolge. Zeichnen Sie Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion. Wie bezeichnet man die Zufallsvariable X?

6. In der Finanzmarkttheorie modelliert man manchmal den Kursverlauf einer Aktie in einem Binomialbaum. Nehmen Sie an, der initiale Kurs einer Aktie sei 100 Euro. In n = 5 aufeinander folgenden Schritten kann der Kurs entweder um +1 Euro nach oben springen oder – 1 Euro nach unten. Beides ist gleich wahrscheinlich (p=0,5). Die fünf aufeinander folgenden Ereignisse (Kurssprünge) sind unabhängig.

   12.1 Zeichnen Sie den Binomialbaum mit dem Kurs an jedem Knotenpunkt und an den Endpunkten.

   12.3 Schreiben Sie an den Enden des Binomialbaums den jeweiligen Kurs und die dazugehörige Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Kurs erreicht wird. Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable X=„Kurs nach 5 Schritten“. Interpretieren sie die Werte $F_X(100)$ und $F_X(96)$

7. Zeigen Sie an einem selbst gewählten numerischen Beispiel, daß für $p \to 0$ und $n \to \infty$ sowie $n \cdot p = \lambda$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung mit

$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 0,1,2,...$ angenähert werden kann. Wie nennt man die resultierende Verteilung?

8. In modernen Handelssystemen wie dem Xetra System der Deutschen Börse finden im Laufe des kontinuierlichen Wertpapierhandels (von 9.00-17.30) Transaktionen (Käufe und Verkäufe von Wertpapieren) statt. Zur Analyse der Marktaktivität auf dem Xetra-System wird die Zufallsvariable X= „Zahl der Handelsereignisse während der ersten Stunde des Handelsprozesses" mit einer Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = 20$ modelliert.

   8.1. Begründen Sie, weshalb eine solche Approximation sinnvoll ist (bzw. warum nicht).

   8.2. Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ für $-1 < x < 12$.

   8.3. Interpretieren Sie den Wert $F_X(10)$. Interpretieren Sie den Ausdruck $1 - F_X(10)$. Interpretieren Sie den Wert $f_X(10)$.