Klausur Statistik I WS 05/06 Nachtermin

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Schreiben Sie zu jeder Lösung den Verweis in eckigen Klammern [**X1**], so daß die Zuordnung möglich ist. Fehlt die Zuordnung, können keine Punkte vergeben werden.
- Machen Sie zu jeder Lösung den Lösungsweg deutlich, ansonsten können keine Punkte vergeben werden.

Aufgabe 1: Eine Finanzanalystin möchte den Kursverlauf einer Aktie modellieren. Dazu verwendet sie einen sogenannten Binomialbaum. Der Initialkurs der Aktie ist 100. In aufeinanderfolgenden Schritten kann der Kurs entweder um 2 Euro steigen oder sinken. Die aufeinanderfolgenden Kurssprünge sind unabhängige Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit für einen Kursanstieg ist 0,6 und die Wahrscheinlichkeit für ein Sinken des Kurses ist 0,4.

[**A1**] Zeichen Sie den Binomialbaum nach drei Kursschritten. Beschriften Sie jeden Knotenpunkt und die Endpunkte mit dem Aktienkurs und der dazugehörigen Wahrscheinlichkeit. (10 Punkte)

[**A2**] Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeits- und die Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable "Kurs nach drei Kursschritten ". (10 Punkte)

Lösungshinweis: Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung:

$$f_{Bi}(x; p, n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

Aufgabe 2:
[**L1**] Welche Probleme treten bei der Deflationierung von nominalen Grössen wie dem Bruttoinlandsprodukt auf. Welche pragmatischen Lösungsvorschläge gibt es hierfür in der amtlichen Statistik? (8 Punkte)

[**L2**] Welche Vorteile und welche Nachteile weist der Paasche Preisindex gegenüber dem Laspeyeres Index für die Berechnung von Inflationsraten auf? Nennen Sie jeweils 2. (5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sie beobachten den Verlauf einer Zeitreihe für das Bruttoinlandsprodukt (BIP) der Republik Sabia, der in Abbildung 1 dargestellt ist. Ihre Aufgabe ist es, mit Hilfe einer Trendfunktion zukünftige Werte des BIP zu prognostizieren. Eine mögliche Spezifikation ist:

$$y_t = b_0 + b_1 \cdot t^2 + u_t \quad .$$

[**J1**] Bestimmen Sie die Parameter des Trendmodells mit der Kleinstquadrate-Methode. Dafür stehen Ihnen folgende Angaben zur Verfügung: $\frac{1}{100}\sum_{t=1}^{100} t^2 = 3.383$, $\frac{1}{100}\sum_{t=1}^{100} t^4 = 20.503.333$, $\frac{1}{100}\sum_{t=1}^{100} y_t = 3.695$, $\frac{1}{100}\sum_{t=1}^{100} t^2 \cdot y_t = 21.784.175$. Berechnen Sie die Bruttoinlandsproduktprognose für $t = 110$ unter Verwendung der geschätzten Parameter. Das Bestimmtheitsmaß der Regression beträgt 0,95. Interpretieren Sie dieses Ergebnis. (10 Punkte)

[**J2**] Schlagen Sie eine weitere geeignete Trendfunktion vor, mit der Sie den in der Abbildung 1 dargestellten Verlauf der Zeitreihe des BIP alternativ beschreiben und prognostizieren können. Beschreiben Sie, wie Sie die Parameter ihres Modells schätzen. (5 Punkte)

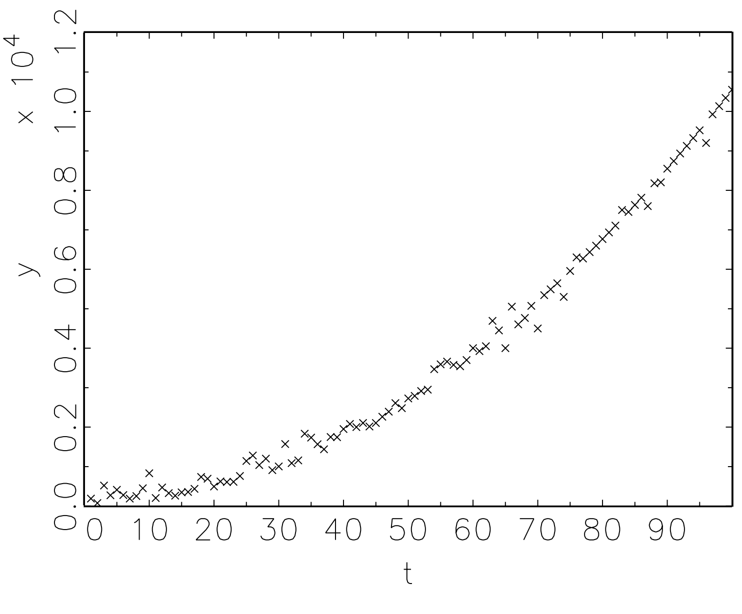

Abbildung 1: BIP Republik Sabia

Aufgabe 4: Ein Finanzanalyst beobachtet die folgende Renditereihe einer Anlage. Die statistische Variable X bezeichnet die tägliche Rendite der Anlage. An 11 Tagen wurden die folgenden Renditen beobachtet (aufsteigend geordnet): -0,030 -0,011 -0,011 -0,008 -0,001 0,003 0,008 0,011 0,022 0,038 0,043

[**K1**] Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung der statistischen Variable X = "Rendite der Anlage" in einer geeigneten Grafik dar (Achsenbeschriftungen nicht vergessen!). Dokumentieren Sie Ihre Vorgehensweise. (10 Punkte) Charakterisieren Sie die statistische Variable X nach Merkmalstyp und Skalierung. (2 Punkte) Welches Konzept würden Sie wählen, um die Lage der empirischen (Rendite-)Verteilung zu bestimmen? Nennen Sie mindestens zwei sinnvolle Lageparameter und benennen Sie kurz einen Nachteil und einen Vorteil derselben. (5 Punkte)

[**K2**] Skizzieren Sie die empirische Verteilungsfunktion der statistischen Variablen X und zeichnen Sie das 0,25 Quantil ein. (10 Punkte)

[**K4**] Eine Analystin schlägt vor, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X ="Rendite der Anlage" mit einer Normalverteilung zu modellieren. Konkret schlägt sie die Verwendung der folgenden Dichtefunktion vor: $f_N(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ mit $\mu = 0$ und $\sigma = 0{,}02$. Was halten Sie von diesem Vorschlag? Argumentieren Sie! (5 Punkte)

[**K5**] Approximieren Sie zunächst mit Hilfe der vorgeschlagenen Dichtefunktion die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass die Rendite zwischen 0,008 und 0,016 liegt (unter Verwendung der unten stehenden Tabelle). Berechnen Sie dann die exakte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass die Rendite zwischen 0,008 und 0,016 liegt (unter Verwendung der unten stehenden Tabelle). Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Rendite größer als 0,004 ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Rendite genau 0,004 ist? (10 Punkte)

x	$f_N(x;0,0{,}02)$	$F_N(x;0,0{,}02)$
0,000	19,9	0,500
0,004	19,5	0,579
0,008	18,4	0,655
0,012	16,6	0,726
0,016	14,4	0,788
0,020	12,0	0,841
0,024	9,7	0,885

Hinweise zur Normalverteilung:

$$f_N(x;0,0{,}02) = \frac{1}{0{,}02\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{0{,}02})^2}$$

$$F_N(x;0,0{,}02) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{0{,}02\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{u}{0{,}02})^2}du$$

Aufgabe 5:
Der Leiter der Abteilung "Produktdesign" beurteilt die Erfolgschancen neuer Produkte anhand des Erfolgs der Produkte in einem Testmarkt. Aus vergangenen Produkteinführungen hat er eine (subjektive) Wahrscheinlichkeit dafür ermittelt, dass später im Gesamtmarkt erfolgreiche Produke auch im Testmarkt erfolgreich sind. Diese (bedingte) Wahrscheinlichkeit beträgt 0,9. Produkte, die im Gesamtmarkt nicht erfolgreich sind, sind mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 auch im Testmarkt kein Erfolg. (Die Kriterien, ob ein Produkt ein Erfolg wird oder nicht, sind exogen festgelegt).
Einem neu einzuführenden Produkt "X-change" ordnet besagter Abteilungsleiter eine a-priori Erfolgswahrscheinlichkeit (im Gesamtmarkt) von 0,8 zu. Das Produkt wird auf einem Testmarkt eingeführt und dort wird es **kein** Erfolg.

[**I1**] Unser Abteilungsleiter ist Anhänger der Bayesianischen Statistik und glaubt an das Prinzip des bayesianischen Lernens. Berechnen Sie die a-posteriori Wahrscheinlichkeit (nach dem Misserfolg im Testmarkt), die der bayesianische Abteilungsleiter dem Ereignis, daß "X-change" ein Erfolg im Gesamtmarkt wird, zuordnet. (10 Punkte)
Lösungshinweis: $P(H_i|B) = \frac{P(B|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|H_j)P(H_j)}$ (Satz von Bayes)

[**I2**] Nach dem Misserfolg im Testmarkt wird das Produkt nochmals in einem Testmarkt eingeführt. Wiederum wird das Produkt dort kein Erfolg. Berechnen Sie die a-posteriori Wahrscheinlichkeit für einen Produkterfolg im Gesamtmarkt nach den zweimaligen Misserfolgen in den Testmärkten. (10 Punkte)

[**I3**] Beschreiben Sie drei Unterschiede oder Gemeinsamkeiten der bayesianischen und frequentistischen Statistik. (5 Punkte)