

## Übungsblatt Regressionsrechnung

Aufgabe 1 ist als numerisches Miniaturbeispiel gedacht für Studenten und Studentinnen, die grundsätzliche Verständnisprobleme mit der Methode der kleinsten Quadrate haben. Studenten, die diese Verständnisprobleme nicht haben, sollten direkt Aufgabe 2 lösen.

**Aufgabe 1:** Machen Sie sich anhand der folgenden Daten das Vorgehen bei der linearen Einfachregression deutlich.

$y_v$	$x_v$
2	3
3	4
4	9

Berechnen Sie die Parameter eines einfachen linearen Regressionsmodells  $y_v = b_0 + b_1x_v + e_v$

Dies ist der kleinstmögliche Datensatz, den Sie sinnvoll mit der Methode der kleinsten Quadrate bearbeiten können.

a) Schreiben Sie die Kleinstquadrate-Zielfunktion  $Q = \sum_{v=1}^n (y_v - \hat{b}_0 - \hat{b}_1x_v)^2$  einmal mit Summenzeichen und einmal ausführlich unter Verwendung der Daten.

b) Schreiben Sie auch die Bedingungen erster Ordnung  $\frac{\partial Q}{\partial b_0} = 0$  und  $\frac{\partial Q}{\partial b_1} = 0$  für ein Minimum der Zielfunktion ausführlich und mit Hilfe des Summenzeichens.

c) Berechnen Sie die Kleinstquadrate-Schätzer  $\hat{b}_0$  und  $\hat{b}_1$ , indem Sie die Bedingungen erster Ordnung nach  $\hat{b}_0$  und  $\hat{b}_1$  auflösen.

d) Tragen Sie  $y_v$  und  $\hat{y}_v = \hat{b}_0 + \hat{b}_1x_v$  in einem Streudiagramm mit 45 Gradline ab. Zeichnen Sie  $\hat{e}_v = y_v - \hat{y}_v$  in Ihrem Schaubild ein.

**Aufgabe 2:** Eine Studentin der Wirtschaftswissenschaften absolviert ein Praktikum in der Marketingabteilung eines Unternehmens. In ihrem Projektteam wurde der folgende Zusammenhang von Marketingausgaben und Umsatz postuliert:

$$U = \alpha \cdot M^\beta \cdot u$$

wobei  $M$  die Marketingausgaben für ein Produkt bezeichnen und  $U$  dem Umsatz des Produktes (in der gleichen Periode).  $u$  ist eine unerklärte Restkomponente.  $\alpha$  und  $\beta$  sind unbekannte Modellparameter.

Die Studentin hat die Aufgabe, die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  zu schätzen und die Erklärungsgüte des Modells zu überprüfen.

a) Zunächst linearisiert die Praktikantin das Modell und überführt es in die Form  $Y = b_0 + b_1 X + e$ . Wie geht sie dabei vor? Welchen Variablen im Originalmodell entsprechen die abhängige Variable  $Y$  und die erklärende Variable  $X$  im linearisierten Modell?

Die Praktikantin erhebt dann Daten bezüglich Marketingausgaben und Umsatz für verschiedene Produkte des Unternehmens und berechnet die folgenden empirischen Momente: Das arithmetische Mittel der (transformierten) Beobachtungen der abhängigen Variablen ist  $\bar{y} = 40,2$ , das arithmetische Mittel der (transformierten) Beobachtungen erklärender Variablen ist  $\bar{x} = 3,2$ . Außerdem berechnet Sie  $s_{xy} = 0,004$  und  $s_x^2 = 8,2$ .

b) Berechnen und interpretieren Sie den Kleinstquadrateschätzer  $\hat{b}_1$ .

c) Das Bestimmtheitsmaß der Regression ist 0,03. Interpretieren Sie diesen Wert.