

Übungsblatt Regressionsrechnung

Aufgabe 1 ist als numerisches Miniaturbeispiel gedacht für Studenten und Studentinnen, die grundsätzliche Verständnisprobleme mit der Methode der kleinsten Quadrate haben. Studenten, die diese Verständnisprobleme nicht haben, sollten direkt Aufgabe 2 lösen.

Aufgabe 1: Machen Sie sich anhand der folgenden Daten das Vorgehen bei der linearen Einfachregression deutlich.

y_v	x_v
2	3
3	4
4	9

Berechnen Sie die Parameter eines einfachen linearen Regressionsmodells $y_v = b_0 + b_1x_v + e_v$

Dies ist der kleinstmögliche Datensatz, den Sie sinnvoll mit der Methode der kleinsten Quadrate bearbeiten können.

a) Schreiben Sie die Kleinstquadrate-Zielfunktion $Q = \sum_{v=1}^n (y_v - \hat{b}_0 - \hat{b}_1x_v)^2$ einmal mit Summenzeichen und einmal ausführlich unter Verwendung der Daten.

b) Schreiben Sie auch die Bedingungen erster Ordnung $\frac{\partial Q}{\partial b_0} = 0$ und $\frac{\partial Q}{\partial b_1} = 0$ für ein Minimum der Zielfunktion ausführlich und mit Hilfe des Summenzeichens.

c) Berechnen Sie die Kleinstquadrate-Schätzer \hat{b}_0 und \hat{b}_1 , indem Sie die Bedingungen erster Ordnung nach \hat{b}_0 und \hat{b}_1 auflösen.

d) Tragen Sie y_v und $\hat{y}_v = \hat{b}_0 + \hat{b}_1x_v$ in einem Streudiagramm mit 45 Gradline ab. Zeichnen Sie $\hat{e}_v = y_v - \hat{y}_v$ in Ihrem Schaubild ein.

Aufgabe 2: Eine Studentin der Wirtschaftswissenschaften absolviert ein Praktikum in der Marketingabteilung eines Unternehmens. In ihrem Projektteam wurde der folgende Zusammenhang von Marketingausgaben und Umsatz postuliert:

$$U = \alpha \cdot M^\beta \cdot u$$

wobei M die Marketingausgaben für ein Produkt bezeichnen und U dem Umsatz des Produktes (in der gleichen Periode). u ist eine unerklärte Restkomponente. α und β sind unbekannte Modellparameter.

Die Studentin hat die Aufgabe, die Parameter α und β zu schätzen und die Erklärungsgüte des Modells zu überprüfen.

a) Zunächst linearisiert die Praktikantin das Modell und überführt es in die Form $Y = b_0 + b_1 X + e$. Wie geht sie dabei vor? Welchen Variablen im Originalmodell entsprechen die abhängige Variable Y und die erklärende Variable X im linearisierten Modell?

Die Praktikantin erhebt dann Daten bezüglich Marketingausgaben und Umsatz für verschiedene Produkte des Unternehmens und berechnet die folgenden empirischen Momente: Das arithmetische Mittel der (transformierten) Beobachtungen der abhängigen Variablen ist $\bar{y} = 40,2$, das arithmetische Mittel der (transformierten) Beobachtungen erklärender Variablen ist $\bar{x} = 3,2$. Außerdem berechnet Sie $s_{xy} = 0,004$ und $s_x^2 = 8,2$.

b) Berechnen und interpretieren Sie den Kleinstquadrateschätzer \hat{b}_1 .

c) Das Bestimmtheitsmaß der Regression ist 0,03. Interpretieren Sie diesen Wert.