Zwölftes Übungsblatt: Stetige Zufallsvariablen und stetige Verteilungen

1. Zeigen Sie, daß für eine stetig gleichförmig verteilte Zufallsvariable X~R(a,b) mit

Dichtefunktion $f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & x > b \end{cases}$

gilt, daß $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$ (Rechteckverteilung).

Zeichnen Sie für a=10 und b=20 die Dichte- und Verteilungsfunktion einer stetig gleichförmig verteilten Zufallsvariablen X~R(10,20). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß diese Zufallsvariable X einen Wert größer 15 und kleiner 18 annimmt.

2. Die Dichtefunktion der Exponentialverteilung hat den Wert $\lambda e^{-\lambda x}$ für $x \ge 0$ und ist 0 sonst.

2.1. Zeigen Sie, daß $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$.

2.2 Zeigen Sie, daß die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung gegeben ist mit

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x) & x \ge 0 \end{cases}.$$

3. Die Dauer (in Minuten) zwischen zwei Kauf- oder Verkaufstransaktionen auf dem Devisenmarkt wird als exponentialverteilt mit Parameter λ=1/20 angenommen.

3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, daß die Dauer zwischen 2 Transaktionen länger als 20 Minuten beträgt.

3.2 Berechnen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, daß die Dauer zwischen einer Stunde und einer Stunden fünf Minuten beträgt, einmal exakt (unter Verwendung der Verteilungsfunktion) und einmal approximativ unter Verwendung der Dichtefunktion.

4. Bestimmen Sie die Quantilsfunktion $F^{-1}(p) = x_p$ der Exponentialverteilung. Berechnen Sie das 0,1 Quantil der Exponentialverteilung mit λ=0,05 und interpretieren Sie das Ergebnis.

5. Wir nehmen an, die Nettorendite einer Finanzanlage von Periode t auf t+1, bezeichnet mit R_{t+1}, sei normalverteilt, $R_{t+1} \sim N(0{,}01; 0{,}04^2)$.

5.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(R_{t+1} > 0{,}02)$. Hinweise: Für $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ gilt: $F_X(x) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ mit $Z \sim N(0,1)$. Das heißt: Sie können die Verteilungsfunktion für eine normalverteilte Zufallsvariable bei Kenntnis der Verteilungsparameter μ und σ^2 mit Hilfe der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung berechnen. Diese ist zum einen tabuliert (z.B. in Lehrbuch von Schira) oder Sie können die EXCEL-Funktion STANDNORMVERT(z) verwenden. Diese Funktion liefert Ihnen den Wert der Verteilungsfunktion einer der Standardnormalverteilung an der Stelle x.

5.2 Berechnen Sie aus den entsprechenden Tabellen im Lehrbuch bzw. unter Verwendung der o.g. EXCEL-Funktion den Wert des 0,05-Quantils der Renditeverteilung. Hinweis: Wegen der Symmetrie der Dichtefunktion der Normalverteilung gilt $F_Z(-z) = 1 - F_Z(z)$. Haben Sie dies geschafft, so können Sie von sich behaupten den Value-at-Risk (VaR) auf dem 5 % Konfidenzniveau berechnet zu haben, denn dieser ist eben nichts anderes als das 0,05-Quantil!