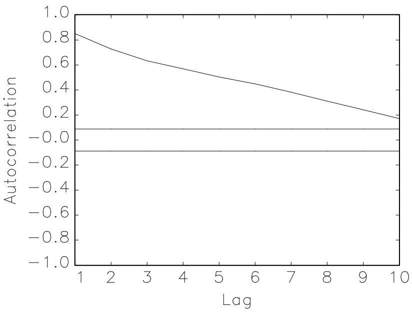
Lösung zur Zwischenklausur

Time Series Analysis

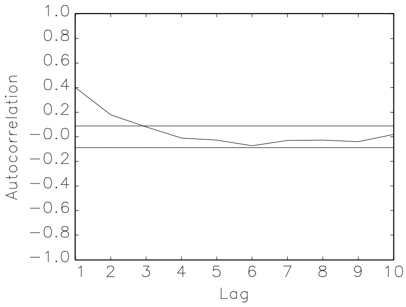
Date: 23/07/2004

A1: Ordnen Sie den abgebildeten fünf Sample ACF-Graphen die folgenden sechs stochastischen Prozesse zu.

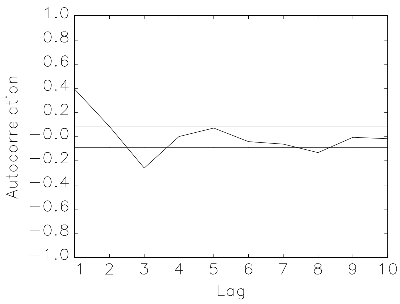
(1)



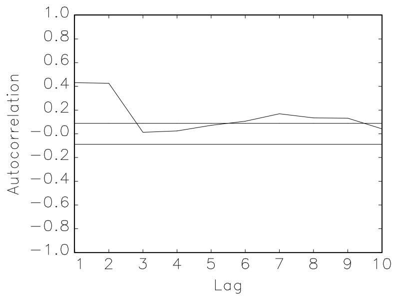
(2)



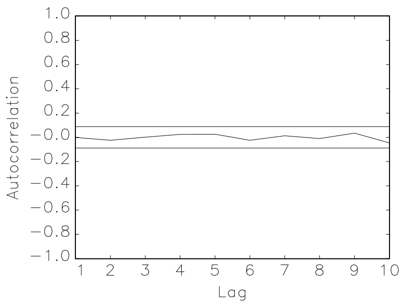
(3)



(4)



(5)



a) $Y_t = 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.7\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$ $\underline{(4)}$ b) $Y_t = 0.4Y_{t-1} + \varepsilon_t$ $\underline{(2)}$

c) $Y_t = 0.9Y_{t-1} + \varepsilon_t$ $\underline{(1)}$ d) $Y_t = \varepsilon_t$ $\underline{(5)}$

e) $Y_t = 0.7\varepsilon_{t-1} + 0.6\varepsilon_{t-2} - 0.3\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$ $\underline{(3)}$

A2: Sind die folgenden stochastischen Prozesse stationär? Begründen Sie Ihr Ergebnis. Es gilt: $\{\varepsilon_t\}$ i.i.d N($0,\sigma^2$)

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad (1-0.9L-0.1L^2)Y_t = \varepsilon_t \\
&(2) \quad (1-0.3L)Y_t = (1+0.3L)\varepsilon_t \\
&(3) \quad (1-0.4L-0.2L^2)Y_t = (1+0.1L+0.05L^2)\varepsilon_t \\
&(4) \quad (1-L)Y_t = \varepsilon_t \\
&(5) \quad Y_t = (1+0.3L+0.2L^2+0.1L^3)\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

(1): nicht stationär, da die Summe der Koeffizienten des AR-Prozesses gleich 1 ist.

(2): stationär, da der AR-Koeffizient kleiner als 1 ist.

(3): stationär, da die Summe der Koeffizienten des AR-Teils kleiner 1 ist.

(4): nicht stationär, da der AR-Koeffizient gleich 1 ist $\Rightarrow$ *Random Walk.*

(5): stationär, da MA-Prozess immer stationär ist.

Bestimmen Sie anhand der Eigenwerte der Matrix $\mathbf{F}$, ob die jeweiligen AR(p)-Prozesse stationär sind.

$$
(1)\ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)\ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.8 & -0.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)\ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

mit	mit	mit
$\lambda_1 = 0.30 + 0.56i$	$\lambda_1 = 0.92$	$\lambda_1 = 1.11$
$\lambda_2 = 0.30 - 0.56i$	$\lambda_2 = -0.89$	$\lambda_2 = 0.09$
	$\lambda_3 = 0.37$	

(1): stationär, da $R = \sqrt{0.3^2 + 0.56^2} < 1 \Rightarrow$ die Eigenwerte liegen innerhalb des Einheitskreises

(2): stationär, da alle Eigenwerte kleiner als 1 sind

(3): nicht stationär, da $\lambda_1 > 1$ ist

A3: Gesucht ist ein geeigneter ARMA(p,q)-Prozess. Bestimmen Sie anhand der Schätzergebnisse die Ordnung von p und q und begründen Sie Ihre Wahl.

	ARMA(0,0)	ARMA(1,0)	ARMA(0,1)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(1,2)	ARMA(2,2)
C	0.129	—	—	—	—	—	—
S.E.[a]	0.066	—	—	—	—	—	—
AR(1)	—	0.689	—	0.496	0.586	0.217	-0.193
S.E.[a]	—	0.032	—	0.052	0.136	0.111	0.120
AR(2)	—	—	—	—	-0.079	—	0.262
S.E.[a]	—	—	—	—	0.105	—	0.089
MA(1)	—	—	0.668	0.412	0.332	0.722	1.125
S.E.[a]	—	—	0.033	0.054	0.132	0.109	0.111
MA(2)	—	—	—	—	—	0.249	0.386
S.E.[a]	—	—	—	—	—	0.082	0.058
SBC[b]	3.614	2.979	3.036	2.895	2.906	2.900	2.906
logL	-900.291	-740.153	-755.981	-716.213	-714.298	-714.158	-711.227
p(Q)[c]	0.000	0.000	0.000	0.153	0.196	0.514	0.781

[a] S.E. ≙ standard error of parameter

[b] SBC ≙ Schwartz Bayes Criterion

[c] p-value of the Q-statistic was calculated with 10 degrees of freedom

Zuerst betrachten wir das SBC - Kriterium. Dieses ist minimal bei ARMA(1,1). Dann prüfen wir anhand des p-Werts für die Q-Statistik, ob die Residuen White Noise sind. Bei einem Signifikanzniveau von 5% impliziert ein p-Wert über 0.05, dass wir die Nullhypothese '*keine Autokorrelation*' nicht ablehnen können. ARMA(1,1) bleibt also auch jetzt noch die erste Wahl. Bei den Modellen höherer Ordnung ist dieses Kriterium zwar auch erfüllt, allerdings ist der SBC Wert etwas höher und einige Parameter sind nicht signifikant von Null verschieden (Bsp.: bei ARMA(2,2) ist der t-Wert des AR(1)-Parameters -1.6. Es gilt für Signifikanz: $|t| \geq 1.96$.).

$\Rightarrow$ ARMA(1,1)

A4: Berechnen Sie $E(Y_t)$, $Var(Y_t)$ sowie $Cov(Y_t, Y_{t-1})$ der folgenden Prozesse, wobei für die Residuensequenz gilt: $\{\varepsilon_t\}$ i.i.d N(0,1).

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad (1 - 0.9L)Y_t = \varepsilon_t \\
&(2) \quad (1 - 0.8L - 0.1L^2)Y_t = \varepsilon_t \\
&(3) \quad Y_t = (1 + 0.4L + 0.3L^2)\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

(1): $E(Y_t) = \frac{c}{1-\phi} = 0$, $Var(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = 5,26$, $Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{\phi}{1-\phi}\sigma^2 = 9$
(2): $E(Y_t) = \frac{c}{1-(\phi_1+\phi_2)} = 0$, $Var(Y_t) = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2]} = 4.81$, $Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{\phi_1 Var(Y_t)}{1-\phi_2} = 4.28$
(3): $E(Y_t) = c = 0$, $Var(Y_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2 = 1.25$, $Cov(Y_t) = (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2 = 0.52$

Berechnen Sie ausserdem den Erwartungswert $E(Y_t)$, sowie die Varianz $Var(Y_t)$ von:

$$
\begin{aligned}
&(4) \quad (1 - 0.9L)Y_t = (1 - 0.3L)\varepsilon_t \\
&(5) \quad (1 - L)Y_t = \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

(4): $E(Y_t) = \frac{c}{1-\phi} = 0$, $Var(Y_t) = \frac{(1+\theta^2+2\phi\theta)}{(1-\phi^2)}\sigma^2 = 8,58$
(5): Es existieren keine unbedingten Momente, da der Prozess nicht stationär ist

A5: Um welchen ARMA Prozess handelt es sich?

$$(1) \quad (1-\phi_1 L)(1-\phi_{12}L^{12})Y_t = (1+\theta_1 L)(1+\theta_4 L)\varepsilon_t$$

$$(2) \quad (1-\phi L)(1-L)Y_t = (1+\theta L)\varepsilon_t$$

$$(3) \quad Y_t = (1+0.4L+0.3L^2)\varepsilon_t$$

(1): $Y_t = \phi Y_{t-1} + \phi_{12}Y_{t-12} - \phi\phi_{12}Y_{t-13} + \theta\varepsilon_{t-1} + \theta_4\varepsilon_{t-4} + \theta\theta_4\varepsilon_{t-5} + \varepsilon_t$

(2): ARIMA(1,1,1)

(3): MA(2)

A6:

a) Falsch, jeder endliche MA-Prozess ist generell stationär.

b) Falsch, es kommt auf die Eigenwerte an, ob ein AR(p) Prozess stationär ist.

c) Falsch, ausschliesslich der AR Teil eines ARMA Prozesses bestimmt die Stationarität.

d) Falsch, nur für stationäre Prozesse kann das schwache Gesetz der grossen Zahl angewendet werden.

e) Richtig, da $\gamma_j = 0$ für alle $j > 0$.

f) Richtig, da $\gamma_j = 0$ für alle $j > q$.

A7:

(1) $\Delta Y_t = 0.9\Delta Y_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

(2) $Y_t = 0.3Y_{t-1} + 0.2Y_{t-12} - 0.06Y_{t-13} + 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-12} + 0.06\varepsilon_{t-13}$

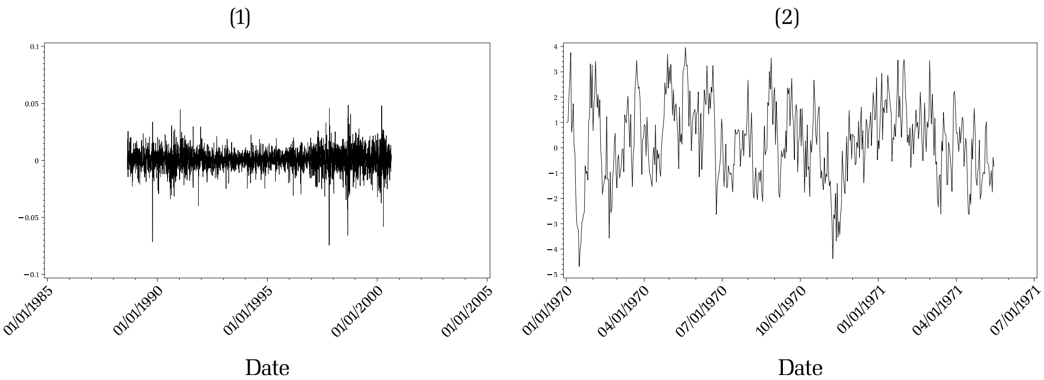
A8:

siehe Vorlesung

A9:

siehe Vorlesung

A10: Schlagen Sie nach Betrachtung der Grafiken (1)-(3) einen geeigneten stochastischen Prozess zur Modellierung dieser Daten vor.



(1): typischer White Noise Prozess, schwankt sehr eng um einen festen Mittelwert, z.B. $Y_t = \varepsilon_t$, mit $\{\varepsilon_t\} \sim N(0, \sigma^2)$.
(2): stationärer Prozess mit Autokorrelation, z.B. $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$, mit $\{\varepsilon_t\} \sim N(0, \sigma^2)$, generell ARMA(p,q) mit positivem $|p|$ oder $|q|$.