Klausur Statistik II im Sommersemester 2004 Ersttermin

Prof. Dr. Joachim Grammig

- **Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.**
- **Schreiben Sie zu jeder Lösung den Verweis in eckigen Klammern**

  [X1], so daß die Zuordnung möglich ist. Fehlt die Zuordnung,

  können keine Punkte vergeben werden.
- **Machen Sie zu jeder Lösung den Lösungsweg deutlich, ansonsten können keine Punkte vergeben werden.**
- **Beachten Sie die Lösungshinweise.**

Aufgabe A: Die Internet Firma "Einszweidreiweg" bietet die Möglichkeit der Online-Partizipation an Auktionen. Die Anzahl der Kaufgebote in der letzten Minute bis zum Abschluss der Auktion (X) wird angenommen als eine Poisson-verteilte Zufallsvariable $X \sim PO(\lambda)$ mit $\lambda = 4$.

[**A1**] Berechnen Sie den Wert der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ an der Stelle $x = 1$ und interpretieren Sie das Ergebnis **(5 P)**

[**A2**] Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, in der letzten Minute mehr als 1 Gebot zu beobachten? **(5 P)**

Lösungshinweis: Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poissonverteilung ist gegeben mit

$$f_X(x) = P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

.

Aufgabe B: Die Zeit T (in Minuten) zwischen zwei Kundenbesuchen am Check-In-Counter der Lufthansa wird als exponentialverteilt angenommen, $T \sim EXP(\lambda)$ mit $\lambda = 0,05$.

[**B1**] Berechnen Sie das 0,1 Quantil der Verteilung und interpretieren Sie den berechneten Wert. **(5 P)**

Lösungshinweis: Die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung ist gegeben mit

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

.

[**B2**] Angenommen, Sie hätten keine Information über den tatsächlichen Wert des Parameters λ und Sie sollten im Rahmen eines Praktikums einen Schätzwert für diesen Parameter ermitteln. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen, diese Aufgabe zu lösen. Gehen Sie insbesondere darauf ein, i) welche Daten Sie für diese Aufgabe benötigen und wie Sie diese beschaffen würden **(5 P)** und ii) wie Sie auf Basis dieser Daten einen Schätzer mit wünschenswerten Eigenschaften berechnen können. Beschreiben Sie das von Ihnen gewählte Schätzverfahren und argumentieren Sie, warum Ihr Verfahren einen "guten" Schätzer liefert. **(5 P)**.

Aufgabe C: X und Y bezeichnen die Auszahlungen in der nächsten Periode von zwei risikobehafteten Finanzanlagen. Diese Auszahlungen werden als gemeinsam normalverteilt angenommen

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim BVN(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$$

mit $\mu_X = 4.000$, $\mu_Y = 3.000$, $\sigma_X^2 = 1.000.000$, $\sigma_Y^2 = 2.250.000$ und $\rho_{XY} = 0$.

[**C1**] Interpretieren Sie den Wert $F_{XY}(3000, 1500) = 0,025$ wobei F_{XY} die gemeinsame Verteilungsfunktion bezeichnet. **(5 P)**

Aus den beiden Finanzanlagen wird ein Portfolio gebildet, in dem jeweils ein Stück der jeweiligen Anlage enthalten sind. Die Auszahlung dieses Portfolios ist daher gegeben mit $Z = X + Y$. Berechnen Sie

[**C2**] die erwartete Auszahlung des Porfolios $E(Z)$. **(5 P)**

[**C3**] die Varianz der Auszahlung des Portfolios $Var(Z)$. **(5 P)**

[**C4**] das 0,05 Quantil der Auszahlung des Porfolios und interpretieren Sie den erhaltenen Wert. **(10 P)**

Lösungshinweise: Die Summe von zwei normalverteilten Zufallsvariablen folgt einer univariaten Normalverteilung. Wenn in der bivariaten Normalverteilung $\rho_{XY} = 0$ gilt, sind die beiden Zufallsvariablen X und Y unabhängig, was impliziert, daß die Kovarianz von X und Y, $Cov(X, Y)$, gleich Null ist. Es gilt:

$$Var(aX + bY) = a^2Var(X) + 2abCov(X, Y) + b^2Var(Y)$$

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

z	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263
$F_Z(z)$	0,90	0,95	0,975	0,99

Aufgabe D: Die Vermögensnutzenfunktion eines Investors sei gegeben mit $U(x) = \ln x$, wobei x den Wert des Vermögens bezeichnet. Das Vermögen des Investors in der nächsten Periode hängt ab von der Wertentwicklung der einzelnen Anlagen des Investors und wird daher als Zufallsvariable (X) aufgefasst. In einer stilisierten Ökonomie kann diese Zufallsvariable (in der nächsten Periode) drei mögliche Werte annehmen, $x_1 = 100$, $x_2 = 200$, $x_3 = 1000$. Es gilt die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

i	1	2	3
x_i	100	200	1000
$f_X(x_i)$	0,5	0,2	0,3

[**D1**] Berechnen Sie den erwarteten Vermögensnutzen $E(U(X))$. **(5 P)**

Aufgabe E: Zur Modellierung der folgenden ökonomischen (Zufalls-)Variablen soll eine geeignete diskrete oder stetige Verteilung ausgewählt werden. Schlagen Sie eine sinnvolle Verteilung vor und begründen Sie kurz ihre Wahl.

[**E1**] Zahlungsbereitschaft (in Euro) eines Geschäftskunden für einen Flug Frankfurt-Atlanta am Abflugtag. **(5 P)**

[**E2**] Anzahl der Business-Class Passagiere, die am letzten Tag vor Abflug des Fluges Frankfurt-Atlanta noch eine Buchung vornehmen wollen. **(5 P)**

[**E3**] Präferenzwert (0-100) eines zufällig ausgewählten Baden-Württembergers für das neue Produkt Ihrer Firma. **(5 P)**

[**E4**] Tägliche Wertveränderung des Deutschen Aktienindex (DAX). **(5 P)**

Aufgabe F: Wir betrachten zwei Zufallsvariablen, X und Y. Y bezeichnet die binäre Zufallsvariable "Nationalität einer zufällig ausgewählten Person", welche die Werte $Y = 1$ für "Ausländer(in)" und $Y = 0$ für "Deutsche(r)" annimmt. Die Zufallsvariable X gibt an, welchen Präferenzwert eine zufällig ausgewählte Person einem uns interessierenden Produkt zuordnet. Aus technischen Gründen gibt es nur drei mögliche Ausprägungen des Präferenzwertes: 10, 20 oder 30.

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$ ist in der folgenden Tabelle angegeben:

$f_{XY}(x,y)$	$Y=0$	$Y=1$
$X = 10$	0,60	0,05
$X = 20$	0,20	0,04
$X = 30$	0,10	0,01

[**F1**] Berechnen Sie den (unbedingten) Erwartungswert für den Präferenzwert $E(X)$ **(5 P)**

[**F2**] Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert des Präferenzwertes, $E(X|Y = 0)$ (d.h. bedingt auf das Ereignis, daß die ausgewählte Person Deutsche(r) ist). **(5 P)**

[**F3**] Sind die beiden Zufallsvariablen unabhängig? Argumentieren Sie! **(5 P)**

Aufgabe G: Wählen Sie Ihre Antworten zu den unten stehenden Fällen 1-4 (diese und nächste Seite) aus den folgenden Sätzen (ein Satz kann für mehrere Antworten verwendet werden, einige Sätze sind unsinnig):

1. Die Nullhypothese kann auf dem 5 % Signifikanzniveau nicht verworfen werden.
2. Die Nullhypothese ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % richtig und wird daher angenommen.
3. Die Nullhypothese kann auf dem 1 % Signifikanzniveau nicht verworfen werden.
4. Die Nullypothese ist wahr und wird daher angenommen.
5. Die Nullhypothese wird auf dem 5 % Signifikanzniveau verworfen.
6. Die Nullhypothese ist mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 5 % richtig und wird daher verworfen.
7. Die Nullhypothese ist falsch und wird daher verworfen.
8. Die Nullhypothese wird auf dem 1 % Signifikanzniveau verworfen.

Fall 1:
Unter der Nullhypothese ist eine Teststatistik standardnormalverteilt. Die Formulierung der Alternativhypothese impliziert einen zweiseitigen Test (d.h. Ablehnung der Nullhypothese für große und kleine Werte der Teststatistik), das Signifikanzniveau ist 0,05. Die Berechnung der Teststatistik liefert den Wert -1,2. (Hinweis: Beachten Sie die Symmetrieeigenschaft der Dichtefunktion der Normalverteilung beachten, d.h. $1 - F_X(x) = F_X(-x)$), wobei $F_X(x)$ die Verteilungsfunktion der Normalverteilung bezeichnet.
[G1] Entscheidung (ein Antwortsatz von oben) **(5 P)**

Fall 2:

Unter der Nullhypothese ist eine Teststatistik $\chi^2(1)$-verteilt (χ^2 mit einem Freiheitsgrad). Das Signifikanzniveau ist 0,01. Die Alternativhypothese impliziert einen einseitigen Test (d.h. Ablehnung von H_0 für große Werte der Teststatistik). Eine Berechnung der Teststatistik liefert den Wert 7,1.

[**G2**] Entscheidung (ein Antwortsatz von oben) **(5 P)**

Fall 3:

Testdesign wie in Fall 2: Die Berechnung der Teststatistik liefert ein empirisches Signifikanzniveau (p-Wert) von 0,015.

[**G3**] Entscheidung (ein Antwortsatz von oben) **(5 P)**

Fall 4:

Unter der Nullhypothese ist eine Teststatistik Student-t verteilt mit 4 Freiheitsgraden. Die Alternativhypothese impliziert einen einseitigen Test, das Signifikanzniveau ist 0,01. Die Berechnung der Teststatistik liefert einen Wert von 1,9.

[**G4**] Entscheidung (ein Antwortsatz von oben) **(5 P)**

Lösungshinweise:

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung:

$F(z)$	0,500	0,750	0,950	0,975	0,990	0,995
Z	0	0,6745	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758

Verteilungsfunktion der χ^2-Verteilung mit einem Freiheitsgrad:

$F(x)$	0,500	0,90	0,950	0,975	0,990	0,995
X	0,455	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879

Verteilungsfunktion der Student-t Verteilung mit 4 Freiheitsgraden:

$F(t)$	0,600	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
T	0,2672	1,5332	2,1318	2,7764	3,7470	4,6041