# Klausur Statistik II SS 06 Haupttermin

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Bogen.
- Schreiben Sie zu jeder Lösung den Verweis in eckigen Klammern [**X1**], so dass die Zuordnung möglich ist. Fehlt die Zuordnung, können keine Punkte vergeben werden.
- Machen Sie zu jeder Lösung den Lösungsweg deutlich, ansonsten können keine Punkte vergeben werden.

**Aufgabenblock A:**
Eine Investorin hält in ihrem Portfolio zwei risikobehaftete Anlagen. $X$ bezeichnet dabei die Auszahlung der ersten Anlage (in Euro) und $Y$ die Auszahlung der zweiten Anlage (in Euro). Die beiden diskreten Zufallsvariablen $X$ und $Y$ haben eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion: $f_{XY}(x, y)$, deren Werte in der folgenden Tabelle aufgeführt sind:

| $f_{XY}(x,y)$ | | $y$ | |
|---|---|---|---|
| | | 0 | 100 |
| $x$ | 10 | 0,4 | 0,1 |
| | 0 | 0,4 | 0,1 |

[**A1**] Interpretieren Sie einen beliebigen Wert aus der Tabelle. Sind die beiden Zufallsvariablen $X$ und $Y$ unabhängig? Prüfen und begründen Sie! (5 Punkte)

[**A2**] Ermitteln Sie $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$ und die Korrelation $\rho_{XY}$ der Zufallsvariablen $X$ und $Y$. Interpretieren Sie den Wert des ermittelten Korrelationskoeffizienten. (12 Punkte)
Hinweis:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2 \\
Cov(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y) \\
\rho_{XY} &= \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}
\end{aligned}
$$

[**A3**] Ein Kollege schlägt vor, eine neue "derivative" Finanzanlage $Z$ zu bilden, deren risikobehaftete Auszahlung sich aus den Auszahlungen der beiden Finanzanlagen folgendermaßen ableitet:

$$Z = X^2 \cdot \sqrt{Y}$$

Geben Sie in einer Tabelle die vollständige Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable $Z$, $f_Z(z)$, an. Interpretieren Sie einen beliebigen Wert der Wahrscheinlichkeitsfunktion. Berechnen Sie $E(Z)$ und $Var(Z)$. (10 Punkte)

[**A4**] Unsere Investorin bewertet risikobehaftete Auszahlungen mit Hilfe der folgenden Nutzenfunktion:

$$U(W) = \ln(W + 1),$$

wobei $W$ die Auszahlung einer risikobehafteten Finanzanlage bezeichnet. Sie wählt diejenige Anlagenalternative, die ihr den größten Erwartungsnutzen $E(U(W))$ stiftet. Welche risikobehaftete Auszahlung würde eine Investorin mit dieser Nutzenfunktion präferieren: $X$, $Y$ oder $Z = X^2 \cdot \sqrt{Y}$? (10 Punkte)

Hinweis:

$$E(g(X)) = \sum_{alle\, i} g(x_i) f_X(x_i)$$

[**A5**] Die momentenerzeugende Funktion der Gamma-Verteilung lautet:

$$MEF_\Gamma(t) = \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-p}$$

Berechnen Sie daraus den Erwartungswert und die Varianz einer gammaverteilten Zufallvariable $X$. (8 Punkte)

Hinweis:

$$\left[\frac{d^r MEF_X(t)}{dt^r}\right]_{t=0} = E(X^r)$$

**Aufgabenblock B:**

[**B1**] Mit Hilfe des sogenannten KK-Tests kann man die Nullhypothese testen, dass die Kovarianz zweier Zufallsvariablen gleich Null ist. Die Alternativhypothese lautet, dass die Kovarianz ungleich Null ist. Der Test ist zweiseitig. Unter der Nullhypothese ist die Teststatistik $t$-verteilt mit 4 Freiheitsgraden. In einer konkreten Anwendung berechnet sich der Wert der Teststatistik mit 5,3. Ermitteln Sie die kritischen Werte bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$. Interpretieren Sie das Testergebnis. (8 Punkte)

Hinweis: Wie die Standardnormalverteilung ist die t-Verteilung symmetrisch um die Null, d.h.

$$\begin{aligned} f_T(-t) &= f_T(t) \\ F_T(-t) &= 1 - F_T(t). \end{aligned}$$

Verteilungsfunktion der $t$ Verteilung mit vier Freiheitsgraden:

| $F(t)$ | 0,600 | 0,900 | 0,950 | 0,975 | 0,990 | 0,995 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 0,2672 | 1,5332 | 2,1318 | 2,7764 | 3,7470 | 4,6041 |

[**B2**] Eine weitere Anwendung (andere Stichprobe) des Tests aus [**B1**] liefert einen p-Wert von 0,0013. Interpretieren Sie dieses Testergebnis. (3 Punkte)

[**B3**] Eine weitere Anwendung des Tests aus [**B1**] auf der Basis einer anderen Zufallsstichprobe liefert einen p-Wert von 0,27. Interpretieren Sie dieses Testergebnis. (3 Punkte)

[**B4**] Mit Hilfe eines "Likelihood-Ratio-Tests können alternative Verteilungsannahmen gegeneinander getestet werden. Dabei wird eine Verteilungsannahme als restriktive Version einer anderen formuliert. So ist z.B. $X \sim N(0, \sigma^2)$ eine restriktive Version von $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Die Nullhypothese des "Likelihood-Ratio-"Tests lautet, dass die restriktive Verteilungsannahme richtig ist (im Bsp., dass $\mu = 0$). Die Alternativhypothese lautet, dass diese Restriktionen falsch sind (im Bsp., dass $\mu \neq 0$). Unter der Nullhypothese ist dann die Prüfgrösse, die "Likelihood-Ratio Statistik", $\chi^2$ verteilt mit der Anzahl Freiheitsgraden gleich der Anzahl der Restriktionen (im Beispiel also 1). Der Likelihood-Ratio-Test ist einseitig, d.h. man verwirft die Nullhypothese für große Werte der Teststatistik. In einer konkreten Anwendung mit einer Parameter-Restriktion errechnet sich ein Wert der Likelihood-Ratio Teststatistik von 2,051. Berechnen Sie den p-Wert. Was sagt der p-Wert aus? Erläutern Sie. Interpretieren Sie das Testergebnis unter Annahme eines von Ihnen gewählten Signifikanzniveaus. (8 Punkte)

Lösungshinweis: Verteilungsfunktion der $\chi^2$ Verteilung mit einem Freiheitsgrad:

| $F(x)$ | 0,500 | 0,850 | 0,950 | 0,975 | 0,990 | 0,995 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0,455 | 2,051 | 3,841 | 5,024 | 6,635 | 7,879 |

[**B5**] Ein Wissenschaftler führt zwei (zweiseitige) t-Tests auf Signifikanz eines geschätzten Parameters $\hat{\theta}$ durch. Der Parameter wurde mit der ML Methode geschätzt. Die zu testende Nullhypothese ist dabei einmal, dass der Grundgesamtheits-Parameter ($\theta$) gleich null ist, bzw. einmal, dass $\theta = 1$. Der Stichprobenumfang ist gross, $n > 1000$. Für den ersten Test ($H_0 : \theta = 0$) ergibt sich ein Wert der t-Statistik von 12,3. Für den zweiten Test ($H_0 : \theta = 1$) ergibt sich ein Wert der t-Statistik von -0,45. Interpretieren Sie das Testergebnis unter Anwendung der $|t| > 2$ Faustregel. (5 Punkte)

**Aufgabenblock C:**
Ein Kapazitätsplaner nimmt an, dass die Zeitdauer $X$ (in Minuten) zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kundenbesuchen exponentialverteilt ist, $X \sim Exp(\lambda)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \\ F_X(x) &= 1 - e^{-\lambda x} \\ E(X) &= \frac{1}{\lambda} \\ Var(X) &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Der Planer interessiert sich für eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass zwischen zwei Kundenbesuchen mehr als eine Minute und weniger als fünf Minuten vergeht. Für diese Untersuchung stehen ihm Daten einer Zufallsstichprobe mit Stichprobenumfang $n = 100$ zur Verfügung. Die Stichprobenvariablen $X_1, X_2, ..., X_n$ sind unabhängig identisch verteilt.
Aus einer konkreten Stichprobe berechnen sich:

$$\frac{1}{100}\sum_{v=1}^{100} x_v = 9{,}5 \quad , \qquad\qquad \frac{1}{100}\sum_{v=1}^{100} x_v^2 = 191{,}3 \quad .$$

[**C1**] Schlagen Sie zwei Momentenschätzer für den unbekannten Parameter $\lambda$ vor. Berechnen Sie diese Momentenschätzer und begründen Sie allgemein, welchen der beiden Schätzer Sie vorziehen würden. (kurze Aussage !) (10 Punkte)

[**C2**] Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen zwei Kundenbesuchen mehr als eine Minute und weniger als fünf Minuten vergeht. (5 Punkte)

[**C3**] Alternativ kann man die Maximum-Likelihood Methode verwenden, um den Verteilungsparameter $\lambda$ zu schätzen. Schreiben Sie möglichst detailliert die Likelihood-Funktion [$\mathscr{L}(\lambda)$] und die Log-Likelihood-Funktion [$\ln \mathscr{L}(\lambda)$] auf. Geben Sie außerdem die Bedingung erster Ordnung für das Maximum der Log-Likelihood-Funktion [$\ln \mathscr{L}(\lambda)$] an. Vereinfachen Sie soweit wie möglich und geben Sie den Maximum-Likelihood Schätzer (Formel und konkreter Wert) an. (12 Punkte)

[**C4**] Warum maximiert man in [**C3**] nicht die Likelihood-Funktion sondern die logarithmierte Likelihood-Funktion, die Log-Likelihood-Funktion? (3 Punkte)