Übungsblatt 8, Statitik II: Kovarianz und Erwartungswerte im multivariaten Kontext

Aufgabe 1: Zwei Zufallsvariablen (X,Y) sind unabhängig und normalverteilt:

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X) \qquad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$$

Berechnen Sie die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen:

$$Cov(X, Y) = \sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass für zwei unabhängige und stetige Zufallsvariablen X und Y folgendes gilt:

$$E[g(X) \cdot h(Y)] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

wobei $g(X)$ und $h(Y)$ zwei (messbare) Funktionen der Zufallsvariable X bzw. der Zufallsvariable Y sind.

Aufgabe 3: Die Auszahlungen zweier Finanzanlagen X und Y seien gemeinsam normalverteilt mit $\mu_X = 8$, $\sigma_X = 10$, $\mu_Y = 12$, $\sigma_Y = 15$ und $\rho = -0,5$. Aus diesen beiden Finanzanlagen wird ein Portfolio gebildet. Das Portfolio enthält 7 Stück der Finanzanlage mit Auszahlung X und 4 Stück der Finanzanlage mit Auszahlung Y. Die Auszahlung Z des Portfolios ist demnach:

$$Z = 7X + 4Y$$

Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Auszahlung Z.

Aufgabe 4: Nun betrachten wir die Auszahlungen dreier Finanzanlagen X, Y und Z, die wir in dem Auszahlungsvektor $\underline{\mathbf{X}}$ zusammenfassen:

$$\underline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Die Varianz-Kovarianz-Matrix der drei Finanzanlagen ist:

$$Cov(\underline{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) & Cov(X,Z) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) & Cov(Y,Z) \\ Cov(X,Z) & Cov(Y,Z) & Var(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -4 & 2 \\ -4 & 16 & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Der Erwartungswert-Vektor $\underline{\mathbf{X}}$ ist wie folgt definiert

$$E(\underline{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \\ E(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie (evtl. mit Hilfe von EXCEL) den Erwartungswert und die Varianz der Auszahlung W:

$$W = \underline{\mathbf{q}}'\underline{\mathbf{X}} \quad \text{mit} \quad \underline{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$