

**Übungsblatt 5, Statistik II: Dichtetransformation und Momentenberechnung usw.**

**Aufgabe 1:**  $X$  ist eine normalverteilte Zufallsvariable,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Berechnen Sie mit Hilfe des Dichtetransformationstheorems

$$f_Y(Y) = f_X(h^{-1}(Y)) \left| \frac{dh^{-1}(Y)}{dY} \right|$$

die Dichtefunktion der transformierten Zufallsvariable  $Y = h(X)$  mit

1.  $Y = \exp(X)$
2.  $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$

Wie nennt man die Verteilungen aus 1. und 2.?

Hinweis: 
$$f_X(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

**Aufgabe 2:** Berechnen Sie  $E(X)$  für die folgenden Verteilungen mit Hilfe ihrer momentenerzeugenden Funktion (MEF). Es gilt:

$$\left[ \frac{d^r MEF_X(t)}{dt^r} \right]_{t=0} = E(X^r)$$

1. Poisson-Verteilung

$$MEF_{Po}(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)) \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

2. Exponentialverteilung

$$MEF_{Ex}(t) = (1 - \frac{t}{\lambda})^{-1} \text{ für } t < \lambda$$

3. Normalverteilung

$$MEF_N(t) = \exp(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}) \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

**Aufgabe 3:** (*Schira Aufgabe 11.6*) Die momenterzeugende Funktion der Poissonverteilung lautet

$$MEF_{Po}(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}.$$

- a) Berechne daraus den Erwartungswert und die Varianz einer poissonverteilten Zufallsvariablen  $X$ .
- b) Wie groß ist die Schiefe  $\gamma$  der Poissonverteilung?

Kurzlösung siehe Schira (2004).

Es folgen weitere (Fleiss-)Aufgaben: Kurzlösungen siehe Schira (2004).

**Aufgabe 4:** (*Schira Aufgabe 11.4*) Geben Sie mit Hilfe der Tschebyschev'schen Ungleichung

- a) eine Abschätzung dafür an, wie groß höchstens die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei zehn Münzwürfen weniger als zwei- oder mehr als achtmal Kopf fällt und
- b) vergleiche diese Abschätzung mit dem tatsächlichen Wert der fraglichen Wahrscheinlichkeit.

**Aufgabe 5:** (*vgl. Schira Aufgabe 11.14*) Ein Produzent von Kakaopulver nimmt an, dass das Füllgewicht seiner 125g Packung einer Normalverteilung mit  $\mu = 125g$  und einer Standardabweichung von  $\sigma = 5g$  unterliegt.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung genau 125,0 g wiegt?

- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung zwischen 120g und 130g wiegt?
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung weniger als 110g wiegt?
- d) Welches Gewicht unterschreitet eine Packung mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05?

**Aufgabe 6:** (*Schira Aufgabe 11.16*) Zwei-Sigma-Intervall. Wieviel Prozent der Wahrscheinlichkeitsmasse liegt innerhalb eines Zwei-Sigma-Intervalls  $\mu \pm 2\sigma$  um den Erwartungswert, wenn die Zufallsvariable  $X$

- a) normalverteilt ist mit  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$
- b) normalverteilt ist mit  $\mu = 13$  und  $\sigma = 4$
- c) normalverteilt ist mit  $n = 8$  und  $\rho = 0.2$
- d) normalverteilt ist mit  $n = 16$  und  $\rho = 0.5$ ?

**Aufgabe 7:** (*Schira Aufgabe 11.17*) Eine normalverteilte Zufallsvariable  $X$  hat den Erwartungswert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$ .

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  in ein beidseitiges Zwei-Sigma-Intervall um  $\mu$  fällt, also wie groß ist  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$ ?
- b) Wie groß ist  $P(X \leq \mu + 2\sigma)$ ?
- c) Wie groß ist  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$ ?