

Übungsblatt 6, Statistik II: Zufallsvektoren (mehrdimensionale Zufallsvariablen)

1. Die Zufallsvariable X bezeichnet die Auszahlung (in Euro) einer risikobehafteten Finanzanlage in Periode $t+1$. Diese Auszahlung ist eine Zufallsvariable, für die gilt $X \sim N(50, 10000)$. Eine Finanzinstitution bietet nun eine derivative Finanzanlage an, die die folgende Auszahlung Y bietet: $Y = (X - 10)^3$. Berechnen Sie die erwartete Auszahlung $E(Y)$ der derivativen Finanzanlage.
2. Die Zufallsvariable X bezeichnet die Rendite von Finanzanlage A und die Zufallsvariable Y die Rendite von Finanzanlage B.
 - a) Beschreiben Sie in Ihren eigenen Worten was der Ausdruck $F_{XY}(-0,05, -0,01) = 0,05$ bedeutet.
 - b) Weiterhin gilt $F_X(-0,05) = 0,2$ und $F_Y(-0,01) = 0,2$. Interpretieren Sie die beiden Werte. Sind die beiden Zufallsvariablen X und Y unabhängig? Argumentieren Sie warum, bzw. warum nicht.
3. X bezeichnet eine binäre Zufallsvariable, die das Ergebnis des „Zufallsexperiments“ „Veränderung des Aktienindex Dax von t auf $t+1$ “ in die Menge der reellen Zahlen abbildet: Konkret nimmt die Zufallsvariable X den Wert 1 an, wenn der DAX steigt und den Wert 0, wenn der DAX nicht steigt. Die Zufallsvariable Y ist ähnlich definiert für die Veränderung des Dow Jones Aktienindex von t auf $t+1$: $Y=1$ wenn der Dow Jones steigt und $Y=0$, wenn der Dow Jones nicht steigt.
 - a) Interpretieren Sie die folgenden Ausdrücke: $f_{XY}(1,1) = 0,3$; $f_{XY}(0,0) = 0,3$; $f_{XY}(1,0) = f_{XY}(0,1) = 0,2$.
 - b) Weiterhin gilt $f_X(1) = f_X(0) = 0,5$ und $f_Y(1) = f_Y(0) = 0,5$. Sind die beiden Zufallsvariablen unabhängig? Argumentieren Sie warum (bzw. warum nicht).
4. Die Zufallsvariable X bezeichnet den Gewinn/Verlust von Firma A im nächsten Quartal. Dabei gilt $X \sim N(400, 40000)$. Die Zufallsvariable Y bezeichnet den Gewinn/Verlust von Firma B im nächsten Quartal. Dabei gilt $Y \sim N(50, 10000)$. Die beiden Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig. Berechnen Sie $F_{XY}(-200, -150)$ und interpretieren Sie den berechneten Wert.
5. Wir betrachten zwei Zufallsvariablen X und Y . Y ist eine binäre Zufallsvariable „Geschlecht einer zufällig ausgewählten Person“, welche die Werte $Y=0$ für „männlich“ und $Y=1$ für „weiblich“ annimmt. Die Zufallsvariable X gibt an, wie häufig von dieser zufällig ausgewählten Person ein bestimmtes, uns interessierendes Produkt gekauft wird (es können maximal drei Kaufakte beobachtet werden).

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X und Y ist in der folgenden Tabelle gegeben:

| $f_{XY}(x, y)$ | Y=0 | Y=1 |
|----------------|------|------|
| X=1 | 0,4 | 0,2 |
| X=2 | 0,1 | 0,2 |
| X=3 | 0,05 | 0,05 |

- a) Berechnen Sie die marginalen Wahrscheinlichkeitsfunktionen $f_Y(y)$ und $f_X(x)$ (die Randverteilungen der Zufallsvariablen X und Y).
- b) Sind die beiden Zufallsvariablen X und Y unabhängig? (Argumentieren Sie)