

## Einführung in die Ökonometrie

Prof. Dr. Joachim Grammig

Ersttermin WS 2003/2004

**Aufgabe 1:** Zur Erklärung der Rendite einer Finanzanlage wurde das folgende Regressionsmodell vorgeschlagen:

$$R_i = \beta_0 + \beta_1 R_i^m + \beta_2 TS_i + \varepsilon_i \quad (1)$$

$R_i$  bezeichnet die Rendite einer von Finanzanlage zum Zeitpunkt  $i$  und  $R_i^m$  die Rendite des "Marktportfolios", d.h. eines wertgewichteten Portfolios aus allen am Markt gehandelten Anlagen.  $TS_i$  bezeichnet die Differenz der Rendite von deutschen Staatsanleihen mit 10 Jahren bzw. 3 Monaten Restlaufzeit. Ziel ist die Schätzung der Modellparameter  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)'$  auf der Basis von  $n = 50$  Beobachtungen von abhängiger und erklärender Variablen

a) Schreiben Sie das Modell in der allgemeinen Vektornotation  $y_i = x_i' \beta + \varepsilon_i$  und in der allgemeinen Matrixnotation, d.h. in der Form  $y = X\beta + \varepsilon$  (bezeichnen Sie die Elemente von  $x_i$ ,  $y$ ,  $X$ ,  $\beta$  und  $\varepsilon$  genau) (5 Punkte)

b) Wie lautet die Zielfunktion zur Berechnung des OLS-Schätzers? (5 Punkte)

c) Welche Annahmen müssen erfüllt sein, daß der OLS Schätzer  $b = (b_0, b_1, b_2)'$  =  $(X'X)^{-1}X'y$  unverzerrt (unbiased) ist? (5 Punkte)

d) Welche Annahmen müssen erfüllt sein, daß der OLS Schätzer der beste unverzerrte lineare Schätzer (BLUE) ist? (5 Punkte)

e) Welche Annahmen müssen erfüllt sein, daß der OLS Schätzer für  $\beta$  ein konsistenter Schätzer ist? (5 Punkte)

f) Als OLS Schätzer der Modellparameter ergeben sich  $b_0 = 0,01$ ,  $b_1 = 1,2$  und  $b_2 = 0,02$ . Interpretieren Sie den Parameterschätzwert  $b_1$ . (3 Punkte)

g) Mit  $e_i = R_i - b_0 - b_1 R_i^m - b_2 TS_i$  und  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)'$  berechnen wir  $\frac{1}{n-3} e' e (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0016 & 0,001 & 0,002 \\ 0,001 & 0,0004 & 0,001 \\ 0,003 & 0,001 & 0,0009 \end{pmatrix}$ .

Testen Sie die Hypothesen, daß a)  $\beta_1 = 1$  und b)  $\beta_2 = 0$  mit Hilfe geeigneter

Teststatistiken und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. Wie sind die von Ihnen verwendeten Teststatistiken unter der Nullhypothese verteilt? (8 Punkte)

h) Der  $F$ -test der Nullhypothese  $H_0 : \beta_1 = 0$  und  $\beta_2 = 0$  liefert einen  $p$ -Wert (empirisches Signifikanzniveau) von 0,005. Interpretieren Sie dieses Ergebnis. (5 Punkte)

Welche Annahmen bezüglich der bedingten gemeinsamen Verteilung der Residuen  $\epsilon|X$  haben Sie treffen müssen, um die Tests wie geschildert durchführen können? (3 Punkte)

i) Gegeben die Annahme, daß  $\text{Var}(\epsilon|X) = \sigma^2 I_n$  (spherical disturbances) ist nicht erfüllt. Wie gehen Sie nun vor, wenn Sie die Hypothesen a)  $\beta_1 = 1$  und b)  $\beta_2 = 0$  testen wollen? (5 Punkte)

j) Die Berechnung des adjustierten Bestimmtheitsmaßes  $R_{adj}^2 = R^2 \frac{n-3}{n-1}$  mit  $R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$  liefert einen Wert von  $R_{adj}^2 = 0,53$ . Ein alternatives Modell zur Erklärung der Rendite der Finanzanlage, enthält  $K = 5$  erklärende Variable. Das Bestimmtheitsmaß ( $R^2$ ) dieses Modells beträgt 0,65. Basierend auf dieser Information: Welches Modell würden Sie auswählen? Begründen Sie. (5 Punkte)

**Aufgabe 2:** Nehmen Sie Stellung zu den folgenden Aussagen (Wahr, denn..., bzw. Falsch, vielmehr...)

a) Ein  $p$ -wert von 0,01 impliziert, daß die Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 0,05 abgelehnt werden kann. (3 Punkte)

b) Ist bei einem  $t$ -Test der Wert der  $t_k$  Statistik  $t_k = \frac{b_k - \bar{\beta}_k}{SE(b_k)}$  im Absolutbetrag größer als der kritische Wert  $t_{\alpha/2}(n - K - 1)$ , dann bedeutet dies, daß die Nullhypothese mit Wahrscheinlichkeit von  $\alpha$  falsch ist. (3 Punkte)

c) Das Verwerfen der Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha$  bedeutet, daß die Nullhypothese mit Wahrscheinlichkeit von  $\alpha$  falsch ist. (3 Punkte)

d) Zur konsistenten Schätzung von Projektionskoeffizienten ist die Annahme orthogonaler Regressoren (predetermined regressors) nicht notwendig. (3 Punkte)

e) Bei Verletzung der Annahme  $\text{Var}(\epsilon|X) = \sigma^2 I_n$  ist stets die Verwendung des GLS Schätzers angeraten. (5 Punkte)

f) Mit der Berechnung von standardisierten Residuen haben Sie eine Beobachtung identifiziert, die ihre OLS Parameterschätzer stark beeinflusst, d.h. die geschätzten Parameter ändern sich gravierend, in Abhängigkeit davon, ob die Beobachtung bei der Schätzung berücksichtigt wird oder nicht. Der Ausschluß einer solchen Beobachtung ist stets angeraten. (5 Punkte)

g) Im Falle endogener Regressoren behebt nur eine Erhöhung der Stichprobengröße die durch die Endogenität verursachten OLS Schätzprobleme. (5 Punkte)

### Aufgabe 3:

Sie spezifizieren ein lineares Regressionsmodell, das drei erklärende Variable und eine Konstante enthält:  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$

Die Ableitung des Modells aus der Theorie impliziert, daß zwei der drei erklärenden Variablen,  $x_{i2}$  und  $x_{i3}$ , endogen sind.

a) Was bedeutet Endogenität der Regressoren? Definieren Sie (5 Punkte). Ist OLS in dieser Situation eine geeignete Schätzmethode? Begründen Sie! (5 Punkte)

b) Beschreiben Sie eine Methode, mit der Sie die Modellparameter schätzen können. Welche zusätzlichen Daten benötigen Sie und welche Annahmen müssen erfüllt sein, daß die Parameter mit der von Ihnen vorgeschlagenen Methode konsistent geschätzt werden können? (10 Punkte)

c) Zeigen Sie, daß die Annahme der strengen Exogenität der Regressoren,  $E(\varepsilon_i | X) = 0$ , impliziert, daß  $E(\varepsilon_i \cdot x_{jk}) = 0$  für alle  $i, j, k$ . (5 Punkte)

d) Sie haben ein Regressionsmodell mit  $K$  erklärenden Variablen geschätzt. Bei einer Regression der  $k$ -ten erklärenden Variable auf die  $K - 1$  anderen erklärenden Variablen und die Konstante erhalten Sie ein  $R^2$  von 0,8.

Wo liegt das Problem und welches sind die Konsequenzen? (5 Punkte).

Zur Behebung des Problems schlägt Ihnen ein Kollege vor, die  $k$ -te erklärende Variable aus dem Modell zu eliminieren.

Begründen Sie, warum dieser Vorschlag sinnvoll oder problematisch ist (5 Punkte)