

Einführung in die Ökonometrie
 Prof. Dr. Joachim Grammig
 Zweittermin WS 2003/2004

Aufgabe 1: Regressionsmodell Mit Hilfe eines Fragebogens und einer Umfrage wurde die Präferenz für ein Produkt Ihrer Firma erhoben. Jeder der $n = 100$ Befragten konnte einen Präferenzwert von 0 bis 100 für das Produkt angeben. P_i bezeichnet den von Individuum i angegebenen Präferenzwert. Weiterhin wurden individuen-spezifische Charakteristika erhoben, z.B. das Alter des Konsumenten, A_i , das Geschlecht, S_i ($S_i = 1$ wenn Befragte eine Frau, $S_i = 0$ sonst), sowie das Einkommen des Konsumenten, I_i . Zur Erklärung der Produktpräferenz wurde das folgende Regressionsmodell vorgeschlagen:

$$P_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 S_i + \beta_2 A_i + \beta_3 I_i) u_i \quad (1)$$

u_i bezeichnet eine unerklärte Restkomponente.

- a) Beschreiben Sie ein geeignetes Vorgehen zur Schätzung der unbekannt Parameter. Gehen Sie dabei zunächst ein auf die notwendigen Umformungen der obigen Gleichung: Überführen Sie das Modell in die Vektorschreibweise des CLRM, d.h. $y_i = x_i' \beta + \varepsilon_i$, bzw. Matrixschreibweise, d.h. $y = X\beta + \varepsilon$ (konkret: geben an, wie $y_i, x_i, \varepsilon_i, \beta, X, y$ und ε in dieser Anwendung zu notieren sind). (10 Punkte)
- b) Beschreiben Sie außerdem die von Ihnen getroffenen Annahmen zum Daten generierenden Prozess, die Ihnen wünschenswerte Eigenschaften (welche?) der Kleinstquadrat-Schätzer sichern. (8 Punkte)
- c) Gegeben Ihre obigen Umformungen in Vektor- und Matrixschreibweise unter a): Zeigen Sie, wie man von der Minimierung der Zielfunktion $\sum_{i=1}^n (y_i - x_i' \beta)^2$ die Gleichung zur Berechnungen den Kleinst-Quadrat-Schätzer $b = (b_0, b_1, \dots, b_3)'$ = $(X'X)^{-1} X'y$ ableiten kann. (8 Punkte)
- d) Die Schätzung der Modellparameter auf der Basis von $N = 100$ Beobachtungen (Individuen) mit der Kleinstquadrat-Methode, $b = (b_0, b_1, \dots, b_3)'$ = $(X'X)^{-1} X'y$ liefert das folgende Ergebnis: $b_1 = -0,05$ $b_2 = -0,045$ $b_3 = 0,0001$.

Wir errechnen ausserdem:

$$\frac{1}{n-4} \sum_{i=1}^n e_i^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0004 & 0,001 & 0,002 & 0,001 \\ 0,001 & 0,0004 & 0,001 & 0,002 \\ 0,003 & 0,001 & 0,0009 & 0,001 \\ 0,002 & 0,001 & 0,001 & 0,16 \end{pmatrix}$$

wobei $e_i = y_i - x_i'b$. Gegeben diese Schätzergebnisse: Wie würden Sie einen Konsumenten charakterisieren, der eine besonders hohe Präferenz für das Produkt hat? Begründen Sie anhand der geschätzten Parameter und deren statistischer Signifikanz. (10 Punkte)

e) Ein F -test der Nullhypothese $H_0 : \beta_2 = 0$ und $\beta_3 = 0$ liefert einen p -Wert (empirisches Signifikanzniveau) von 0,03. Welche Schlußfolgerung ziehen Sie aus diesem Ergebnis, wenn das Signifikanzniveau auf a) 1 % und b) 5% festgelegt ist. (5 Punkte)

f) Welche Annahmen bezüglich der bedingten gemeinsamen Verteilung der Residuen $\varepsilon|X$ haben Sie treffen müssen, um die Tests wie geschildert durchführen können? (5 Punkte)

g) Gegeben, daß weder die Annahme $E(\varepsilon|X) = 0$ noch $\text{Var}(\varepsilon|X) = \sigma^2 I_n$ (spherical disturbances) erfüllt sind. Wie gehen Sie nun vor, wenn Sie etwa die Hypothese $\beta_2 = 0$ testen wollen? Welche zusätzlichen Annahmen sind zu treffen? (8 Punkte)

h) In einer Präsentation der Schätzergebnisse weist Sie ein Kollge darauf hin, daß das Alter des Konsumenten und dessen Einkommen stark miteinander korreliert wären. Sie hätten daher das Problem der Multikollinearität, das Ihre Ergebnisse verfälschen und unbrauchbar machen würde. Ihr Kollege schlägt vor, daß Sie die Altersvariable aus der Schätzgleichung entfernen, um das Problem zu vermeiden. Nehmen Sie Stellung zu dieser Kritik und dem vorgeschlagenen Vorgehen. Erläutern Sie Ihrem Kollegen dabei die Konsequenzen der Multikollinearität und die Konsequenzen des Weglassens einer erklärenden Variable (8 Punkte)

i) Mit einem von Hausmann vorgeschlagenen Test ist es möglich, auf Endogenität der Regressoren zu testen. Als Nullhypothese nimmt der Hausman-Test die Nicht-

Endogenität der Regressoren an, die Alternativhypothese ist Endogenität der Regressoren. Für das obige Beispiel berechnet sich der p -Wert des Hausman Tests mit 0.001. Interpretieren Sie dieses Ergebnis. Welche Schlußfolgerungen ziehen Sie für die Validität Ihrer Schätzergebnisse? (8 Punkte)

j) Sie erhalten starke empirische Evidenz dafür, daß die Einkommensvariable I_i mit der Restkomponente ε_i korreliert ist. Welche Konsequenz hat dies für die Ergebnisse der o.g. Kleinst-Quadrateschätzung? (4 Punkte). Welches alternative Schätzverfahren schlagen Sie in dieser Situation vor? Beschreiben Sie das Vorgehen im vorgeschlagenen Verfahren. (8 Punkte)

Aufgabe 2: Vermischtes

a) Nehmen Sie Stellung zur folgenden Aussage: Ein p -Wert von 0,09 impliziert, daß die Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 0,05 abgelehnt werden kann. (3 Punkte)

b) Nehmen Sie Stellung zur folgenden Aussage: Das Nicht-Verwerfen der Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von α bedeutet, daß die Nullhypothese mit Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$ wahr ist. (3 Punkte)

c) Zur konsistenten Parameterschätzung mit der Kleinstquadrat-Methode ist die Annahme strenger Exogenität unbedingt notwendig. Nur zu fordern, daß $E(x_i\varepsilon_i) = 0$ reicht nicht aus. (5 Punkte)

d) Die Grenzen eines 95 % Konfidenzintervall für einen unbekanntem Parameter in einem Regressionsmodell betragen -0,2 und 0,8. Welche Schlüsse können Sie hieraus ziehen? (5 Punkte)

e) Nehmen Sie Stellung zur folgenden Aussage: Die Schätzung mit Hilfe des GLS (Generalized Least Squares) Verfahrens ist in jedem Fall der Kleinstquadratmethode vorzuziehen, da mit GLS mehr Informationen verarbeitet werden können und die Schätzung effizienter wird. Geben Sie bei Ihrer Antwort auch eine Erklärung dafür, was in diesem Kontext der Begriff "effizient" bedeutet. (8 Punkte)

f) In den von Ihnen für eine Regression verwendeten Daten liegt Multikollinearität vor. Welche Möglichkeiten haben Sie, die Konsequenzen dieses Problems auf die

Qualität ihrer Analyse abzumildern und eine präzisere Schätzung zu ermöglichen.

Diskutieren Sie! (8 Punkte)

g) Erläutern Sie die Unterschiede (Annahmen, Problemstellung) der Kleinstquadrateschätzung im CLRM und der Schätzung von Projektionskoeffizienten. (10 Punkte)