

Mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaft

Luis Huergo

*Lehrstuhl für Statistik, Ökonometrie und Empirische
Wirtschaftsforschung*

Vorkurs: Mathematische Grundlagen I

Der vorliegende Vorkurs zur Veranstaltung „Mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaft“ richtet sich im Besonderen an Studienanfänger in den wirtschaftswissenschaftlichen Studiengängen. Er stellt eine Wiederholung der mathematischen Grundlagen dar, welche nach Erreichen der Hochschulzugangsberechtigung von den Studenten erwartet werden können. Ziel des Vorkurses ist es, angehende Studenten mit unterschiedlichem Hintergrundwissen auf eine gemeinsame Basis zu stellen und somit den Einstieg ins Studium zu erleichtern. Da die Inhalte aus der Wiederholung des Abiturstoffes bestehen, ist der Besuch der Tutorien nicht verpflichtend. Das Verständnis der Vorlesung ist auch ohne den Vorkurs möglich. Als ergänzende Literatur zu den Folien wird das Buch „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter/Hammond empfohlen, an welchem sich auch die Vorlesung orientiert. Alternativ kann das Buch „Vorkurs Mathematik“ von Cramer/Nešlehova verwendet werden, welches eine große Menge von Übungsaufgaben und dazugehörigen Lösungen bietet.

SYDSÆTER, K., HAMMOND, P.: *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, 2006, Pearson.



CRAMER, E., NEŠLEHOVA, J.: *Vorkurs Mathematik*, 2005, Springer.



Folgende Themen werden behandelt:

- 1 Mengenlehre
- 2 Zahlenbereiche
- 3 Potenzen und Wurzeln
- 4 Ungleichungen
- 5 Intervalle und Absolutbeträge
- 6 Quadratische Gleichungen
- 7 Summen- und Produktnotation
- 8 Binomen, Fakultät und Binomialkoeffizient
- 9 Folgen und Reihen
- 10 Aussagenlogik

Mengenlehre



Ausgangspunkt der Betrachtung ist der Begriff einer **Menge** von Objekten.

Beispiele

Folgende Beschreibungen definieren Mengen von Objekten:

- Studierende aller Hochschulen in Deutschland,
- Fischarten in deutschen Gewässern,
- Anzahl an Autounfällen in einem gewissen Zeitraum in Tübingen.

Abstraktere Beispiele von Mengen sind die üblichen Zahlenbereiche wie reelle oder natürliche Zahlen.

Im Folgenden wird der Begriff einer Menge präzisiert.

DEFINITION: *Menge, Element*

*Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens. Die Objekte heißen **Elemente** der Menge.*

Mengen werden i.d.R. mit Großbuchstaben (z.B. A) und ihre Elemente mit Kleinbuchstaben (z.B. a_1, a_2, a_3) bezeichnet.

Um eine Menge beschreiben zu können, wird eine Vorschrift benötigt, welche ihre Elemente eindeutig festlegt. Die verschiedenen Möglichkeiten sind:

- Aufzählung der Elemente: Die Elemente der Menge werden aufgelistet und in geschweiften Klammern angegeben. Jedes Element wird **genau einmal** aufgeführt. $M = \{a, b, c, d\}$
- Angabe von Eigenschaften, die angeben, ob ein Element zur Menge gehört oder nicht: $M = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$

Alternative Notation: $M = \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$

- **Grundmenge Ω :** Alle Elemente für eine bestimmte Betrachtungsweise.
- **Leere Menge $\{\}$ (auch \emptyset)** enthält keine Elemente.
- **Gleichheit von Mengen:** Zwei Mengen sind einander gleich ($A = B$), wenn jedes Element aus A auch Element von B und zugleich jedes Element aus B auch Element von A ist.

Beachte: Die Reihenfolge der Elemente in einer Menge spielt keine Rolle!

$$\{a, b, c, d\} = \{c, a, d, b\}$$

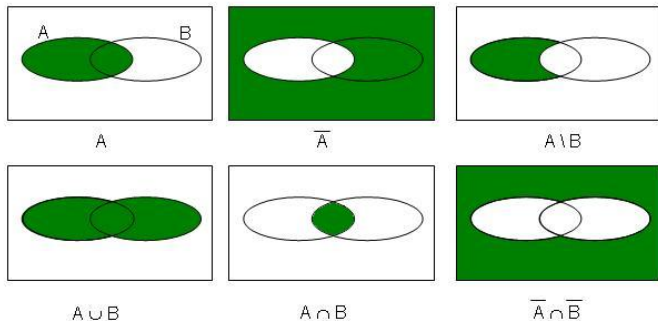
- **Teilmenge:** Ist jedes Element von A auch ein Element von B , so ist A *Teilmenge* von B ($A \subset B$).
Für alle Mengen gilt: $\{\} \subset A$, $A \subset A$.
- **Komplementärmenge:** $\overline{M} = \{x \mid x \notin M \wedge x \in \Omega\}$ ist Komplement zu $M \subset \Omega$. *Alternative Schreibweise:* M^c .
Es gilt: $\overline{\overline{M}} = M$, $\overline{\emptyset} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \emptyset$.

Im Folgenden wird eine Grundmenge Ω mit Teilmengen A , B und C betrachtet.

Mengenoperationen:

- **Durchschnitt** (Schnittmenge): $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.
Disjunkte Mengen: Ist der Durchschnitt zweier Mengen A und B leer ($A \cap B = \emptyset$), so heißen A und B disjunkt (elementfremd).
- **Vereinigung:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Menge aller Elemente, die in A oder in B oder in beiden enthalten sind.
- **Differenz von Mengen:** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Menge aller Elemente von A , die nicht in B enthalten sind.

Anschauliche grafische Darstellung der Mengen und Mengenoperationen mittels **Venn-Diagramme**:



- Identitätsgesetze:

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \Omega = A.$$

- Kommutativgesetze:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

- Assoziativgesetze:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Im Allgemeinen gilt jedoch nicht: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C!$

- Distributivgesetze:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- Gesetze von De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Zahlenbereiche



Natürliche Zahlen \mathbb{N} : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Zuweilen wird ihnen auch noch die Zahl 0 zugerechnet, manche Lehrbücher notieren diesen Zahlbereich dann als \mathbb{N}_0 . Addieren und Multiplizieren von Zahlen aus \mathbb{N} ergeben wieder Elemente von \mathbb{N} .

Ganze Zahlen \mathbb{Z} : Diese Zahlen erweitern die natürlichen Zahlen um negative ganze Zahlen, d.h. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Addieren, Multiplizieren und Subtrahieren von Zahlen aus \mathbb{Z} ergeben wieder Elemente aus \mathbb{Z} .

Rationale Zahlen \mathbb{Q} : Die *rationalen Zahlen* umfassen die Menge aller Quotienten zweier ganzer Zahlen, wobei die Einschränkung gilt, dass der Nenner nicht 0 sein darf. Rationale Zahlen sind periodische oder abbrechende Dezimalzahlen. Mit der Erweiterung auf die rationalen Zahlen sind alle vier Grundrechenarten ausführbar.

Irrationale Zahlen: Alle nichtperiodischen, nichtabbrechenden Dezimalzahlen bezeichnet man als *irrationale Zahlen*. Z.B. $\sqrt{2}$ (siehe Exkurs).

Reelle Zahlen \mathbb{R} : Die *rationalen* und *irrationalen* Zahlen zusammengenommen werden als *reelle Zahlen* bezeichnet.

Eine ununterbrochene und endlose Gerade mit einem Ursprung und einer positiven Längeneinheit ist ein geeignetes Modell für die Reellen Zahlen. Anders ausgedrückt: Es gibt eine *Eins-zu-Eins-Korrespondenz* zwischen den reellen Zahlen und der Zahlengeraden. Man spricht auch oft von der „reellen Geraden“.

Man sagt von der rationalen und irrationalen Zahlen, dass sie *dicht* auf der Zahlengeraden liegen. Dies bedeutet, dass man zwischen zwei reellen Zahlen, egal wie nah sie zueinander liegen, immer noch eine rationale und eine irrationale Zahl finden kann.

Wendet man die vier Grundrechenarten auf die reellen Zahlen an, so ist das Ergebnis wieder eine reelle Zahl (selbstverständlich darf nicht durch Null geteilt werden) (vgl. Sydsaeter *et.al.* S. 24).

Die Nachrichten über den Bund der Pythagoreer stammen aus jahrhundertlangem Abstand und sind entsprechend unsicher. Selbst die biographischen Angaben über den Begründer des Bundes, über Pythagoras von Samos (ca. 540-500), Sohn eines Gemmenschneiders, sind spärlich. Er sei vor der Tyranis des Polykrates auf Samos ausgewichen, habe Reisen nach Ägypten und Mesopotamien unternommen und sich um 525 v.Chr. in Kroton, in Unteritalien, niedergelassen und dort einen Geheimorden begründet, der einige Zeit beträchtlichen Einfluss ausgeübt hat.

Nach dem Sieg der demokratischen Partei über die Aristokratie wurde der Bund verfolgt und erlosch zunächst Anfang des 4. Jahrhunderts v. Chr. Doch gab es eine Neubelebung im 1. Jahrhundert v. Chr.: aus der Zeit der sog. Neupythagoreer stammen die meisten Informationen und Legenden über den ursprünglichen Bund der Pythagoreer.

Den Bund der Pythagoreer kennzeichnen typische Merkmale einer religiösen Sekte: Konspiration, strenge Vorschriften über Kost, Kleidung, Bestattungszeremonien, Probezeit für Neulinge und Lehre von der Seelenwanderung.



Was aber den Bund der Pythagoreer aus vielen ähnlichen Mysterienkulten, teilweise orientalischen Ursprungs, heraus hob und für die Geschichte der Wissenschaften und der Mathematik relevant macht, ist der Umstand, dass bei den Pythagoreern die Vereinigung mit dem Göttlichen über die Versenkung in die wunderbaren Gesetze der Zahlenwelt erreichbar sein sollte. Das Wesen der Welt bestand für sie in der Harmonie der Zahlen. Von hierher rührt die Hinwendung zur Mathematik, Astronomie und Musiklehre freilich sozusagen als rationales Nebenprodukt des eigentlichen, des religiösen Hauptinteresses.

Innerhalb der pythagoreischen Schule wurde jedoch die niederschmetternde Entdeckung gemacht, dass es auch Größen gibt, die sich nicht rational ausdrücken lassen. Diese Entdeckung wird im Allgemeinen in Verbindung gebracht mit dem Pythagoreer Hippasos von Metapont (um 450 v. Chr.): es gibt sich gegenseitig nicht messende (inkommensurable) Strecken. Strecken messen sich nicht, sind zueinander inkommensurabel, wenn die Länge der Strecken nicht ganzzahlige Vielfache der Länge einer als Einheitsstrecke aufgefassten dritten Strecke sind.

Modern ausgedrückt: es gibt Strecken, deren Verhältnis ihrer Längen eine irrationale Zahl ist.



Exkurs: Die Pythagoreer und die Irrationalität von $\sqrt{2}$.

Die Entdeckung von Hippasos zerstörte die Grundauffassung von der „arithmetica universalis“ (sog. Krise der griechischen Mathematik) und damit die Grundlagen der pythagoreischen Weltansicht.

Dazu passt die Legende, dass Hippasos diese katastrophale Entdeckung bekannt gemacht und damit die Geheimhaltungspflicht verletzt habe. Und als nun gar Hippasos bei einem Schiffbruch ums Leben kam, da war dies -wie es der Neupythagoreer Iamblichos empfand- eine notwendige und gerechte Strafe und hatte seine metaphysischen Gründe darin, ... „*dass alles Unausgesprochene und Unsichtbare sich zu verbergen liebt. Wenn aber eine Seele einer solchen Gestalt des Lebens begegnet und sie zugänglich und offenbar macht, so wird sie in das Meer des Werdens versetzt und von den unstäten Fluten umhergespült.*“ (Zitiert nach [Becker/Hofmann 1951, S. 57]).

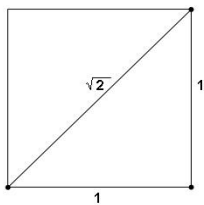


Abbildung: $\sqrt{2}$ als geometrische Länge.

Die Entdeckung der Inkommensurabilität dürfte, nach neueren Forschungsergebnissen, durch „Wechselwegnahme“ am Pentagramm (siehe Abb. (2)) gemacht worden sein und nicht am Quadrat, bei dem die Diagonale inkommensurabel zur Quadratseite ist.

Der Zusammenbruch der „arithmetica universalis“ hatte weittragende Konsequenzen für die Weiterentwicklung der griechischen- und somit für den Lauf der ganzen westlichen Mathematik: Die griechische Mathematik nahm eine spezifische Form an, die als „geometrische Algebra“ bezeichnet wird. Da beispielsweise $\sqrt{2}$ als Diagonale eines Quadrates geometrisch darstellbar (siehe Abbildung 1), aber nicht als Zahl nach damaligen Zahlbegriff (weder als ganze Zahl noch als Verhältnis ganzer Zahlen) darstellbar ist, wurde die Behandlung des Irrationalen und algebraischer Probleme ins Geometrische verlagert, d.h. algebraische Operationen wurden in Form geometrischer Konstruktionen durchgeführt, deren Existenz gesichert war. (Wußing, 6000 Jahre Mathematik, 2008).



Abbildung: Das Pentagramm (Quelle: Wikipedia).

Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$:

Die Aussage, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, bedeutet, dass es keine Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ gibt, mit der Eigenschaft, dass $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

Beweis durch Widerspruch: Es sei angenommen, dass

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}.$$

Ferner sei angenommen, dass p und q keine gemeinsamen Faktoren haben. Diese Annahme ist insofern nicht restriktiv, als man immer den gemeinsamen Faktor wegwürden und die daraus resultierenden Zahlen als p und q setzen kann. Dann gilt

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$
$$p^2 = 2q^2$$

p^2 ist also gerade, da teilbar durch 2. Ebenfalls ist p gerade, denn ansonsten wäre p^2 ungerade. Aus p gerade folgt die Möglichkeit der Darstellung als $p = 2r, r \in \mathbb{Z}$. Nun gilt

$$(2r)^2 = 2q^2$$

$$4r^2 = 2q^2$$

$$2r^2 = q^2.$$

Der Widerspruch ist offensichtlich. Aus den oben aufgeführten Überlegungen folgt, dass q gerade sein muss. Dies bedeutet jedoch, dass p und q einen gemeinsamen Faktor haben.

Potenz- und Wurzelgesetze



DEFINITION: *Ganzzahlige Potenzen*

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (**Basis**) und $n \in \mathbb{N}$ (**Exponent**) gilt: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}$.

- Weiterhin definieren wir: $a^0 \equiv 1$
- Nicht definiert ist dagegen der Ausdruck 0^0 .
- Für Potenzen mit negativen Exponenten definieren wir: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Rechenregeln für Potenzen:

$$(i) \quad a^r a^s = a^{r+s}$$

$$(ii) \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

$$(iii) \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(iv) \quad a^r b^r = (ab)^r$$

$$(v) \quad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

ANMERKUNGEN:

Die obigen Regeln können ohne weiteres auf Ausdrücke mit mehr als zwei Faktoren angewandt werden.

Beachte: Bei unterschiedlichen Basen und unterschiedlichen Exponenten ist keine Potenzregel anwendbar!

Für beliebige a, b, r und s gilt:

$$a^r \pm a^s \neq a^{r+s}$$

$$a^r \pm b^r \neq (a \pm b)^r$$

$$a^r b^s \neq (ab)^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{b^s} \neq \left(\frac{a}{b}\right)^{r+s}$$

Ist a eine reelle Zahl und n eine natürliche Zahl, dann wird a^n als n -te Potenz von a bezeichnet; hierbei ist a die Basis und n der Exponent.

Beispiel: Barwert und Zinseszinsen

Als Variablen definieren wir: Anlagekapital K und Zinsrate $p\%$ pro Zeiteinheit (z.B. ein Jahr).

Der Kontostand nach t Zeiteinheiten bei Zinseszinsen ist gegeben durch

$$K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t .$$

dabei wird $1 + \frac{p}{100}$ oft als **Aufzinsungs-** oder **Wachstumsfaktor** bezeichnet.

Den **Bar-** oder **Gegenwartswert** eines Anlagebetrags erhält man mittels

$$K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-t} .$$

DEFINITION: Gebrochene Potenzen/Wurzeln

$\sqrt[n]{a} := a^{1/n}$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. a heißt Radikant und n Wurzelexponent.

Der Spezialfall $n = 2$ bezeichnet die **Quadratwurzel** aus der positiven Zahl a .

Für $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt: $\sqrt[n]{a^m} := a^{\frac{m}{n}}$. Allgemein gelten für beliebige $a, b > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ folgende

Rechenregeln für gebrochene Potenzen:

$$\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^q} = a^{\frac{pm+qn}{mn}} = \sqrt[nm]{a^{pm+qn}} \quad \sqrt[n]{a^p} : \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[nm]{a^{pm-qn}}$$

$$\sqrt[n]{(\sqrt[n]{a^p})^q} = \sqrt[nm]{a^{pq}} \quad \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^p} = \sqrt[n]{(ab)^p}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[n]{b^p}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^p}$$

ANMERKUNGEN:

- Der häufigste Fehler beim Wurzelrechnen ist: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Das ist **falsch!**
- Da z.B. $(-2)^2 = 2^2 = 4$ gilt sind $x = 2$ und $x = -2$ Lösungen der **quadratischen Gleichung** $x^2 = 4$.
Dies wird oft geschrieben als: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.
- Letzteres ist zu unterscheiden von Symbol $\sqrt{4}$ das stets 2 bedeutet und nicht auch -2 !
- Für **ungerades** $n \in \mathbb{N}$ kann $a^{\frac{m}{n}}$ sogar für $a < 0$ sinnvoll definiert werden!
Z.B. gilt: $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Ungleichungen



- Begriff der *Anordnung der reellen Zahlen*: Für zwei reelle Zahlen a und b gilt stets: $a = b$ oder $a < b$ oder $a > b$.
- Grafische Veranschaulichung mittels der Zahlengeraden.
- Ist die Beziehung zwischen zwei Zahlen oder Termen über die Zeichen $>$ oder $<$ geregelt, so sprechen wir von einer **strikten** oder **strengen Ungleichung** (*inequality*).
- Bei \leq oder \geq sprechen wir von einer **schwachen Ungleichung**.

Wichtige Rechenregeln:

- Addition bzw. Subtraktion von $d \in \mathbb{R}$: $a > b \Leftrightarrow a \pm d > b \pm d$
- Multiplikation bzw. Division mit **positivem** d ($d \in \mathbb{R}^+$):
 $a > b \Leftrightarrow a \cdot d > b \cdot d$ bzw. $a/d > b/d$.
- Multiplikation bzw. Division mit **negativem** d ($d \in \mathbb{R}^-$):
 $a > b \Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot d$ bzw. $a/d < b/d$
(Umkehrung der Anordnung!)

- Die Rechenregeln gelten auch für den Fall schwacher Ungleichungen.
- Die Lösungen einer Ungleichung werden in einer **Lösungsmenge** \mathbb{L} zusammengefaßt.
- Zwei Ungleichungen, die gleichzeitig gelten sollen, werden als **Doppelungleichung** bezeichnet.

BEISPIEL: Wenn gleichzeitig gelten soll: $a \leq z$ und $z < b$, dann kann man kompakt schreiben: $a \leq z < b$.

- Oft ist bei der Lösung einer Ungleichung eine **Fallunterscheidung** durchzuführen.
- Eine strukturierte Hilfe dazu bietet das so genannte **Vorzeichen-Diagramm**. Siehe dazu Sydsæter und Hammond (2.A), Abschnitt 1.6.
- Anwendung von Ungleichungen insb. in der Kurvendiskussion und der Linearen Optimierung.

Intervalle und Absolutbeträge



DEFINITION: *Intervalle*

Die Menge der Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die einer Ungleichung $a \leq x \leq b$ genügen, nennt man Intervall.

- Intervalle lassen sich als lückenlose Teilstrecke der Zahlengerade darstellen.
- Wir unterscheiden verschiedene **Arten von Intervallen**:

Zweiseitig begrenzte Intervalle:

$$\begin{array}{ll} \{x|a \leq x \leq b\} & =: [a, b] \quad \text{abgeschlossenes Intervall} \\ \{x|a < x \leq b\} & =:]a, b] \quad \text{alt. } (a, b] \\ \{x|a \leq x < b\} & =: [a, b[\quad \text{alt. } [a, b) \\ \{x|a < x < b\} & =:]a, b[\quad \text{alt. } (a, b) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \text{halboffene Intervalle}$$

offenes Intervall

Einseitig begrenzte Intervalle:

$$\begin{array}{ll} \{x|a \leq x\} & =: [a, +\infty[\quad \text{alt. } [a, \infty) \\ \{x|x < b\} & =:]-\infty, b) \quad \text{alt. } (-\infty, b) \end{array}$$

DEFINITION: *Absolutbetrag*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Einige Rechenregeln für Beträge:

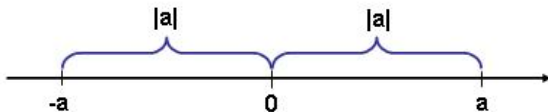
$$|-a| = |a|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{Dreiecksungleichung } \star)$$

Anschaulich ist der Betrag die Distanz zwischen a und 0 auf der Zahlengerade:



(★) Zur Dreiecksungleichung:

Diese harmlos aussehende Ungleichung ist von einer großen Relevanz. Dass es sich dabei tatsächlich um ein Dreieck handelt wird im Folgenden gezeigt.

Gegeben seien drei reelle Zahlen a, b und c .

$$\begin{aligned}|a - b| &= |a - b + 0| \\ &= |a - b + c - c| \\ &= |(a - c) + (c - b)| \\ &\leq |a - c| + |c - b| \text{ wegen der Dreiecksungleichung.}\end{aligned}$$

Es gilt also

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b| \tag{1}$$

wie oben erwähnt ist der Ausdruck $|a - b|$ gleich der Distanz zwischen den Punkten a und b auf der Zahlengeraden. Nun seien a, b und c Punkte auf der Ebene. Dann macht die Ungleichung (1) die plausible Aussage, dass die Distanz von a bis b kleiner gleich der Distanz von a bis c plus die Distanz von c bis b ist. Geometrisch betrachtet, handelt es sich dabei um ein Dreieck.

Quadratische Gleichungen



- Das Lösen von Gleichungen spielt in der Wirtschaftswissenschaft eine wichtige Rolle.
- Dabei gilt stets der Grundsatz der **äquivalenten Umformung**: Die Lösungsmenge einer Gleichung bleibt unverändert, wenn auf beiden Seiten die gleiche Rechenoperation (Addition oder Subtraktion) mit der gleichen Zahl durchgeführt wird. **Nicht zulässig** ist die Multiplikation mit Null und die grundsätzlich verbotene Division durch Null.
- Wir unterscheiden eine Vielzahl von Gleichungstypen.
- Hinweise zur Lösung von linearen Gleichungen mit einer Unbekannten finden Sie z.B. in Sydsæter und Hammond (2.A), Abschnitt 2.1.
- Von besonderer Bedeutung ist die korrekte Lösung **quadratischer Gleichungen**.

- Die Lösung für die **allgemeine Form** einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{ist} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Die Lösung für die **Normalform** einer quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{ist} \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

- Eine quadratische Gleichung besitzt *keine, eine oder zwei reelle Lösungen*, wenn der Ausdruck $b^2 - 4ac$ bzw. $p^2/4 - q$ (*Diskriminante*) *kleiner, gleich oder größer* als Null ist.
- Eine quadratische Gleichung besitzt keine reelle Lösung, wenn die Diskriminante negativ ist. Sie besitzt aber zwei (konjugiert) komplexe Lösungen im Bereich der komplexen Zahlen. *Siehe dazu den Exkurs weiter unten.*
- Die Lösungen einer (quadratischen) Gleichung werden oft auch als **Wurzeln** (**roots**) der Gleichung bezeichnet.

SATZ von VIETA:

Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, so gilt:

$$-a(x_1 + x_2) = b \quad \text{und} \quad ax_1x_2 = c .$$

Für quadratische Gleichungen in der Normalform $(x^2 + px + q = 0)$ gilt entsprechend:

$$-(x_1 + x_2) = p \quad \text{und} \quad x_1x_2 = q .$$

Damit lassen sich quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ auch in der Form $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ schreiben. Analog lassen sich quadratische Gleichungen in Normalform $(x^2 + px + q = 0)$ auch schreiben als $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Bisher haben wir Lösungen für $x^2 = a$ mit $a > 0$, die auf der reellen Zahlengerade liegen.

Für $x^2 = -1$ gibt es keine reelle Lösung. Deshalb wird definiert:

$$i^2 = -1 \quad \text{oder} \quad i = \sqrt{-1}.$$

DEFINITION: *Komplexe Zahlen*

$$\begin{aligned} Z &= a + bi & a, b &\in \mathbb{R} \\ a &= \operatorname{Re}(Z) & \text{Realteil von } Z \\ b &= \operatorname{Im}(Z) & \text{Imaginärteil von } Z. \end{aligned}$$

Zu $Z = a + bi$ heißt $\bar{Z} = a - bi$ konjugiert komplex.

Literatur: Chiang and Wainwright (2005), Sec. 16.2 oder Opitz, Abschnitt 1.6

- Regelmäßig gilt es in den Wirtschaftswissenschaften Gleichungssysteme nach den verschiedenen Unbekannten aufzulösen.
- Treten alle Unbekannte in linearer Form in den Gleichungen auf, so sprechen wir von einem **linearen Gleichungssystem**.
- In Kapitel 10 werden ausführlich effiziente Lösungsmethoden für solche Gleichungssysteme behandelt.
- Hier wollen wir nur kurz auf einfache Verfahren aus der Schulmathematik hinweisen:
 - Einsetzungsverfahren
 - Additions-/ Subtraktionsverfahren
→ Hinweis auf das Gaußsche Eliminationsverfahren!
 - Gleichsetzungsverfahren.

Summen- und Produktnotation



Definition: Summenzeichen

Das Summenzeichen \sum (*Sigma*) steht als Wiederholungszeichen für die fortgesetzte Addition: $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n := \sum_{i=m}^n a_i$,
mit $n \geq m$ und $n, m \in \mathbb{Z}$.

Dabei bedeuten:

- i = Summationsindex
- m = untere Summationsgrenze (Summationsanfang)
- n = obere Summationsgrenze (Summationsende)
- a_i = allgemeines Summenglied

HINWEIS: $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k$

Bei einer Summe mit unendlich vielen Summanden ist eine Summationsgrenze $\pm\infty$.

Bei Rechnungen mit Summen gelten folgende Rechenregeln:

- $\sum_{i=1}^n a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ - mal}} = n \cdot a$
- $\sum_{j=k}^n c \cdot a_j = ca_k + ca_{k+1} + \cdots + ca_n = c \cdot (a_k + \cdots + a_n) = c \cdot \sum_{j=k}^n a_j$
- $\sum_{j=k}^n (a_j + b_j) = \sum_{j=k}^n a_j + \sum_{j=k}^n b_j$ (Additivität)
- $\sum_{j=k}^n a_j = \sum_{j=k}^m a_j + \sum_{j=m+1}^n a_j \quad k \leq m < n.$
- $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1+k}^{n+k} a_{i-k}.$
- *Doppelsumme:* $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}$

Im allgemeinen gilt: $\sum_{j=1}^n a_j \cdot b_j \neq \sum_{j=1}^n a_j \cdot \sum_{j=1}^n b_j$

Der Summationsindex kann selbst als Summenglied vorkommen. Z.B.

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + \dots + 10 = 55$$

In obigem Zusammenhang sind oftmals folgende Regeln nützlich:

- $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2};$
- $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

Regelmäßig ist aus einer angegebenen Summe von Termen auf eine abkürzende Summenschreibweise zu schließen.

Definition: Produktzeichen

Das Produktzeichen \prod (Π) steht als Wiederholungszeichen für die fortgesetzte Multiplikation:

$$a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdots a_{n-1} \cdot a_n := \prod_{i=k}^n a_i, \quad n \geq k, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Dabei bedeuten:

- i = Multiplikationsindex
- k = untere und n obere Multiplikationsgrenze
- a_i = allgemeines Glied

Rechenregeln für das Multiplikationszeichen:

- $\prod_{i=1}^n ca_i = c^n \prod_{i=1}^n a_i$
- $\prod_{i=1}^n a_i b_i = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^n b_i \right)$
- Für $a_i = b_i$ gilt also $\prod_{i=1}^n a_i^2 = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^2$.
- $\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1+k}^{n+k} a_{i-k}$.
- *Doppelprodukt:* $\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m a_{ij} = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n a_{ij}$

Binomen, Fakultät und Binomialkoeffizient



Definition: Binomen

Zweigliedrige Ausdrücke der Form $x \pm y$ werden als Binomen bezeichnet.

Einige wichtige Formeln für Binomen:

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ und
- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

Als Vorbereitung für eine allgemeine Formel für Ausdrücke der Form $(x + y)^n$ betrachten wir die Fakultät:

Definition: Fakultät

Für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen schreibt man $n!$

Es gilt also: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n$.

Weiterhin definieren wir: $0! := 1$.

Definition: Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (gelesen: n über k) ist wie folgt definiert:

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} := \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \text{für } n \geq k \text{ und } n, k \in \mathbb{N}_0.$$

Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten:

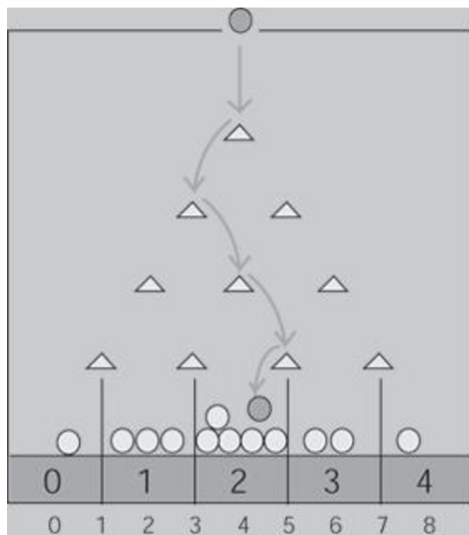
- $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{k} \equiv 0$ für $k > n$.

Pascalsches Dreieck:

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1

Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks:

- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Symmetrie)



Binomischer Satz

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Aus dem Pascalschen Dreieck:

$(x \pm y)^0 = 1$											1																										
$(x \pm y)^1 = x \pm y$												1								1																	
$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$													1							2			1														
$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$														1							3			3			1										
$(x \pm y)^4 = x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$															1							4				6			4								1

Folgen und Reihen



Eine Zahlenfolge (kurz Folge) ist eine Funktion f , deren Definitionsbereich die Menge oder eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist.

Die Elemente a_n des Wertebereichs heißen Folgenglieder, es gilt

$$a_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N} \text{ bzw. } \mathbb{N}_0, \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Endliche versus unendliche Folgen

- Eine Folge heißt endlich, wenn ihr Definitionsbereich I eine endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen ist, d.h. $I \subset \mathbb{N}$. Notation:
 $(a_n)_{n \in I} = (a_1, a_2, \dots)$
- Eine Folge heißt unendlich, wenn ihr Definitionsbereich ganz \mathbb{N} ist.
Notation: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots)$

Die runden Klammern dienen dem Zweck, Folgen von Mengen zu unterscheiden. Das wird durch folgendes Beispiel verdeutlicht:

Die Menge der natürlichen Zahlen, \mathbb{N} , besitzt abzählbar unendlich viele Elemente und wird i. Allg. in der aufzählenden Schreibweise $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ notiert. Da die Reihenfolge der Elemente in der aufzählenden Darstellung einer Menge ohne Bedeutung ist, beschreibt die Menge $\{3, 2, 1, 4, 5, \dots\}$ ebenfalls die natürlichen Zahlen. Die Interpretation der natürlichen Zahlen als Folge berücksichtigt jedoch die Reihenfolge der Aufzählung, d.h. in dieser Situation hat jeder Eintrag einen eindeutig definierten Nachfolger: auf 1 folgt 2 usw. Die Aufzählende Notation der Folge der natürlichen Zahlen ist somit $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$.

Weitere Beispiele

- (a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_n = 2n, n \in \mathbb{N}$, ist die Folge der geraden natürlichen Zahlen $(2, 4, 6, \dots)$.
- (b) Durch die Vorschrift $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ wird die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ definiert.
- (c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$.
- (d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definiert durch $a_n = x^n, n \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(1, x, x^2, x^3, x^4, \dots)$, wobei $x^0 = 1$ verwendet wurde.

Monotonie und Beschränktheit von Folgen:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge.

- (i) Die Folge heißt monoton wachsend, wenn die Folgenglieder monoton wachsend sind, d.h. jeder Nachfolger ist größer oder gleich seinem Vorgänger: $a_n \leq a_{n+1}$.
- (ii) Die Folge heißt monoton fallend, wenn die Folgenglieder monoton fallend sind, d.h. jeder Nachfolger ist kleiner oder gleich seinem Vorgänger: $a_n \geq a_{n+1}$.
- (iii) Haben alle Folgenglieder den gleichen Wert, so heißt die Folge konstant.
- (iv) Die Folge heißt beschränkt, wenn es eine positive Zahl B gibt, so dass alle Folgenglieder im Intervall $[-B, B]$ liegen, d.h.

$$-B \leq a_n \leq B \quad \forall n.$$

Folgen können wie Zahlen durch elementare Operationen verknüpft werden

Verknüpfung von Folgen

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen. Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sind definiert durch:

$$\textcircled{1} \quad (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots).$$

$$\textcircled{2} \quad (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \dots).$$

$$\textcircled{3} \quad (a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, \dots)$$

$$\textcircled{4} \quad \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots\right), \text{ falls } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Folgen von Funktionen: Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und h eine Funktion derart, dass jedes Folgenglied im Definitionsbereich der Funktion h liegt. Dann wird durch Einsetzen der Folgenglieder in die Funktion, d.h. durch $h(a_n)$, eine neue Folge definiert

$$(h(a_n))_{n \in \mathbb{N}} = (h(a_1), h(a_2), \dots).$$

Reihen: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Dann heißt

$$s_n := \sum_{i=1}^n a_i$$

n -te Partialsumme (von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Die Folge der Partialsummen

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}} := \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots)$$

heißt Reihe.

Da Reihen letztlich nur spezielle Folgen sind, können alle Begriffe, die zur Beschreibung und Analyse von Folgen benutzt werden, übertragen werden.

Aussagenlogik



Die Logik ist die Lehre vom folgerichtigen Denken, d.h. vom richtigen Schließen aufgrund gegebener Aussagen. Ihr Ziel ist die Entwicklung eines einfachen Formalismus um (umgangssprachliche) Aussagensätze in eine der Mathematik zugängliche Form zu transformieren.

Das Instrumentarium der Aussagenlogik wird (auch) zur mathematischen Beweisführung benötigt. In den folgenden Folien werden die Grundbegriffe der binären (*zweiwertigen*) Aussagenlogik ausgeführt.

Der zentrale Begriff der mathematischen Aussagenlogik ist die Aussage:

Definition: Aussage

Eine Aussage (A) ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

Es gilt also:

- Für eine Aussage sind also außer w und f keine weiteren Wahrheitswerte zugelassen: Prinzip des ausgeschlossenen Dritten.
- Eine Aussage erhält auch nicht gleichzeitig die Werte w und f : Prinzip des ausgeschlossenen Widerspruchs.

Alternative Bezeichnungen: Eine Aussage ist richtig / gilt / ist erfüllt.

Oder: eine Aussage ist nicht richtig / gilt nicht / ist nicht erfüllt.

Definition: Negation

\bar{A} (Negation der Aussage A) ist wahr, wenn A falsch ist, und \bar{A} ist falsch, wenn A wahr ist.

Alternative Notation: $\neg A$.

Neben der Betrachtung von elementaren Aussagen können auch verknüpfte Aussagen betrachtet werden. Dabei sind Konjunktion und Disjunktion von Aussagen von Bedeutung.

Definition: Konjunktion

Die Konjunktion $A \wedge B$ ist wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist. $A \wedge B$ ist falsch, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen falsch ist (logisches UND).

Definition: Disjunktion

Die Disjunktion $A \vee B$ ist wahr, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen wahr ist. $A \vee B$ ist falsch, wenn beide Aussagen falsch sind. (Dies entspricht dem umgangssprachlichen: entweder A oder B oder beides (Inklusiv-Oder).

In der mathematischen Logik spielen Schlussfolgerungen von dem Wahrheitswert einer Aussage auf den einer anderen Aussage eine besonders wichtige Rolle.

Definition: Implikation

Die Implikation oder Folgerung $A \Rightarrow B$ ist falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Sonst ist $A \Rightarrow B$ wahr.

Die Aussage A heißt **Voraussetzung** oder **Prämisse**.

Die Aussage B heißt **Schlussfolgerung** oder **Konklusion**.

A ist hinreichende Bedingung für B , B ist notwendige Bedingung für A .

Definition: Äquivalenz

Gilt $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$, so heißen A und B *äquivalent* ($A \Leftrightarrow B$).