Mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaft

Luis Huergo

Lehrstuhl für Statistik, Ökonometrie und Empirische Wirtschaftsforschung

Vorkurs: Mathematische Grundlagen II

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Universität Tübingen

1. Grundlegende Definitionen
2. Darstellungsformen für Funktionen
3. Lineare Funktionen
4. Quadratische Funktionen
5. Polynome
6. Exponentialfunktionen
7. Logarithmusfunktionen
8. Verkettete, Inverse und Implizite Funktionen

Motivation

2. Funktionen einer Variable

Funktionen reeller Veränderlicher gehören zu den wichtigsten Untersuchungs- und Darstellungsmitteln für die Beschreibung und die Veranschaulichung ökonomischer Sachverhalte und Zusammenhänge.

Eine der zentralen Aufgaben der Wirtschaftswissenschaften besteht darin, Beziehungen zwischen ökonomischen Variablen zu analysieren. Z.B. wird untersucht in welcher Weise:

- der Konsum vom (Volks-)Einkommen abhängt $\Longrightarrow$ *Konsumfunktion*;
- die Nachfrage vom Preis eines Gutes abhängt $\Longrightarrow$ *Nachfragefunktion*;
- die produzierte Menge eines Gutes von den eingesetzten Faktoren abhängt $\Longrightarrow$ *Produktionsfunktion*;
- der „Nutzen" eines Haushalts von der Menge der konsumierten Güter abhängt $\Longrightarrow$ *Nutzenfunktion*.

Grundlegende Definitionen

Definition: Abbildung oder Funktion

Seien X, Y Mengen. Eine Vorschrift f, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet, heißt Abbildung oder Funktion von der Menge X in die Menge Y. Wir schreiben:

$$f : X \to Y \qquad \text{oder elementweise} \qquad x \in X \mapsto f(x) = y \in Y$$

Definition: Definitions- und Wertebereich

Die Menge aller Werte, die für x zugelassen werden, heißt **Definitionsbereich** $D(f)$ der Funktion. Die Menge der Werte, die $y = f(x)$ annimmt, heißt **Wertebereich** $W(f)$ der Funktion.

The domain and the range of a function.

Definition: Monotonie

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f(x)$:

- streng monoton steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- monoton steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

A (strictly) increasing or a (strictly) decreasing function.

Darstellungsformen für Funktionen

Funktionen (einer Variable) können auf drei verschiedene Arten dargestellt werden:

Funktions- oder Wertetabelle:

zu ausgewählten Punkten des Definitionsbereichs werden die entsprechenden Funktionswerte in Form einer Tabelle angegeben. $\Longrightarrow$ *siehe Beispiel zur Einkommenssteuer auf der nächsten Seite...*

Funktionsgleichung:

Gleichung der Form $y = f(x)$; dabei heißt y abhängige Variable, x unabhängige Variable oder Argument von f. $\Longrightarrow$ *siehe Beispiel...*

Grafische Darstellung:

Der Graf der Funktion wird in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt. $\Longrightarrow$ *siehe Beispiel...*

Die tarifliche Einkommenssteuer 2002 bemisst sich gem. §32 a (1) EStG 2002 nach dem zu versteuernden Einkommen e und wird wie folgt ermittelt: Das zu versteuernde Einkommen e ist auf den nächsten durch 36 ohne Rest teilbaren vollen EURO-Betrag abzurunden, wenn es nicht bereits durch 36 ohne Rest teilbar ist, und um 18 zu erhöhen. Danach ergibt sich $x = \lceil e/36 \rceil \cdot 36 + 18$. Bezeichnet man mit s die Steuerschuld, so ergibt sich folgende Einkommenssteuertabelle (Auszug):

e	x	s	e	x	s
7992 - 8027	8010	166	29988 - 30023	30006	6418
9972 - 10007	9990	611	34992 - 35027	35010	8218
11988 - 12023	12006	1095	39996 - 40031	40014	10158
14976 - 15011	14994	1853	45000 - 45035	45018	12238
18000 - 18035	18018	2672	49968 - 50003	49986	14440

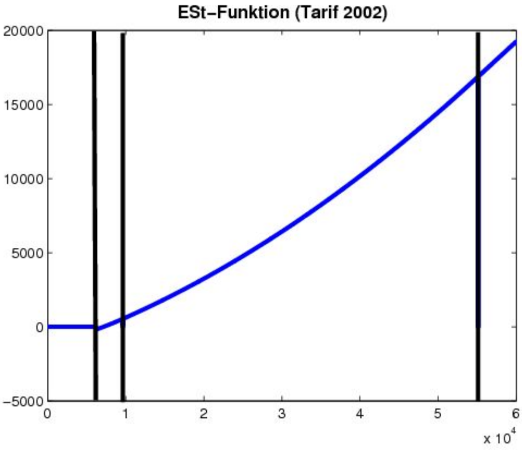
Funktionsgleichung der Einkommenssteuerfunktion 2002:

(1) $s = 0$ *für* $x \leq 7235$ *EUR* — *Freibetrag*

(2) $s = (768,85 \cdot y + 1990) \cdot y$ *mit* $y = \frac{x-7200}{10000}$
für 7236 *EUR* $\leq x \leq 9521$ *EUR* — *Progressionszone 1*

(3) $s = (278,65 \cdot z + 2300) \cdot z + 432$ *mit* $z = \frac{x-9216}{10000}$
für 9522 *EUR* $\leq x \leq 55007$ *EUR* — *Progressionszone 2*

(4) $s = 0,485 \cdot x - 9872$ *für* $x \geq 55008$ — *Lineare Zone*


ESt−Funktion (Tarif 2002)
20000
15000
10000
5000
0
−5000
0
1
2
3
4
5
6
x 10^4

- Tabellarische Zusammenfassungen eines funktionalen Zusammenhangs finden sich regelmäßig bei empirisch erhobenen Daten (Beispiel: Nachfragefunktion).
  Mittels ökonometrischer Methoden wird dann aus den Datenpunkten ein funktionaler Zusammenhang geschätzt.
- In ökonomischen Anwendungen findet sich oft die Notation $y = y(x)$, d.h. das Symbol für den funktionalen Zusammenhang ist identisch mit dem Symbol für die abhängige Variable.
- Der Graf einer Funktion stellt sich in Mengenschreibweise wie folgt dar:
  $$G_f = \{x, f(x) : x \in D(f) \wedge f(x) \in W(f)\}$$

Funktionen lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifizieren. Wir betrachten hier nur einige Funktionstypen, die für die wirtschaftswissenschaftliche Anwendung wichtig sind.

Lineare Funktionen

Lineare Funktionen stellen den am häufigsten verwendeten Typ von Funktionen in den Wirtschaftswissenschaften.

Die allgemeine Form einer linearen Funktion ist $y = ax + b$ wobei a der Parameter ist, der die Steigung der Funktion angibt und b der so genannten Achsenabschnitt.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

Um die Steigung einer Geraden in der Ebene zu bestimmen werden zwei Punkte auf der Geraden ausgewählt und die Differenz der jeweiligen Ordinatenwerte zur Differenz der entsprechenden Abszissenwerte miteinander in Beziehung gesetzt. Die Steigung a der Geraden, welche durch die Punkte $X = (x_1, x_2)$ und $Y = (y_1, y_2)$ geht beträgt folglich $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Wir betrachten ein sogenanntes lineares Gleichungssystem, welches aus zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten besteht, $ax+by=c$ und $dx+ey=f$, wobei a,b,c,d,e und f gegeben sind. Die Lösung dieses Gleichungssystems kann grafisch veranschaulicht werden, indem man die Lösungsmenge der beiden Gleichungen jeweils in einer Geraden darstellt. Die Lösungsmenge hängt von dem Verhältnis der Geraden ab:

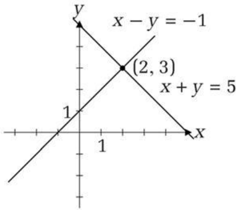
- schneiden sich die beiden Geraden, so stellt der Schnittpunkt die Lösung des Gleichungssystems dar;
- verlaufen die Geraden parallel, so existiert keine Lösung des Systems;
- sind die beiden Geraden deckungsgleich, so existieren unendlich viele Lösungen.

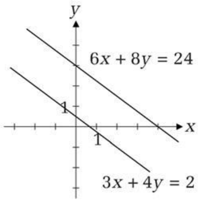
1. Fall: Eindeutige Lösung **2. Fall:** Keine Lösung **3. Fall:** ∞-viele Lösungen

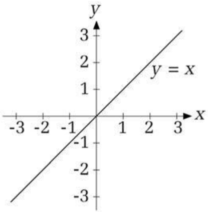
$$x + y = 5$$
$$x - y = -1$$

$$3x + 4y = 2$$
$$6x + 8y = 24$$

$$x - y = 0$$
$$2x - 2y = 0$$

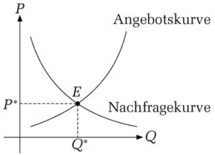






Ökonomische Beispiele für lineare Zusammenhänge:

- **Lineare gesamtwirtschaftliche Konsumfunktion:** $C = a + bY$, mit $C =$ gesamtwirt. Konsum; $Y =$ Volkseinkommen. Der Parameter $b \in [0;1]$ wir als Grenzneigung zum Konsum (marginal propensity to consume) bezeichnet. Er gibt an, um wieviele Einheiten der Konsum in der betrachteten Wirtschaft steigt, wenn das Einkommen um eine Einheit zunimmt.
- **Markt für ein Gut:** Modellannahmen: Lineare Nachfragefunktion (demand) $D = a - bP$ und lineare Angebotsfunktion (supply) $S = \alpha + \beta P$. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ergibt den Gleichgewichtspreis P^* und die Gleichgewichtsmenge Q^*.



Quadratische Funktionen

Ist es sinnvoll, dass in ökonomischen Modellen eine Variable bis auf einen Minimum fällt und dann wieder ansteigt oder auf einen Maximalwert ansteigt, um dann zu fallen, so bietet sich die Verwendung von quadratischen Funktionen an.

Die allgemeine Form einer quadratischen Funktion: $y = ax^2 + bx + c$ wobei a, b und c die Parameter der Funktion sind und $a = 0$ angenommen wird.

Der Graph einer quadratischen Funktion ist entweder eine nach oben ($a > 0$) oder nach unten ($a < 0$) geöffnete Parabel.

Interessante Punkte einer Parabel sind:

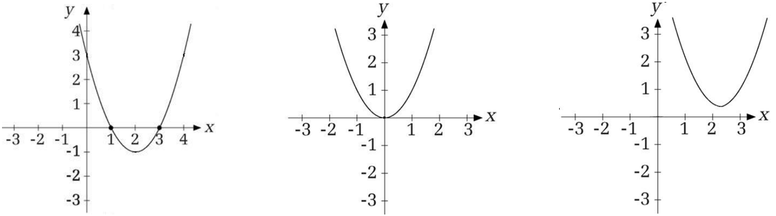
a) die Schnittpunkte mit der Abszisse, die man durch die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ ermitteln kann und

b) die Lage des Scheitelpunktes, die man oft durch die Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$ mithilfe der ersten Ableitung der Funktion ermittelt.

Einige ökonomische Modelle führen zu quadratischen Funktionen, für die dann die Lage des Extrempunktes bestimmt werden soll.

Beispielsweise ist das für die Gewinnfunktion im Monopol der Fall (Gewinn ist dabei definiert als Umsatz minus Kosten). Wir betrachten solche Beispiele in einem Kapitel in der Vorlesung mit den Methoden der Differentialrechnung.

Eine quadratische Funktion kann zwei, einen oder keinen Schnittpunkt mit der Abszisse aufweisen:



Polynome

Lineare und quadratische Funktionen sind Spezialfälle einer allgemeinen Polynomfunktion des Typs

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 \ ,$$

dabei sind die $a_i, i = 1, \ldots, n$ Konstante oder Parameter des Polynoms.

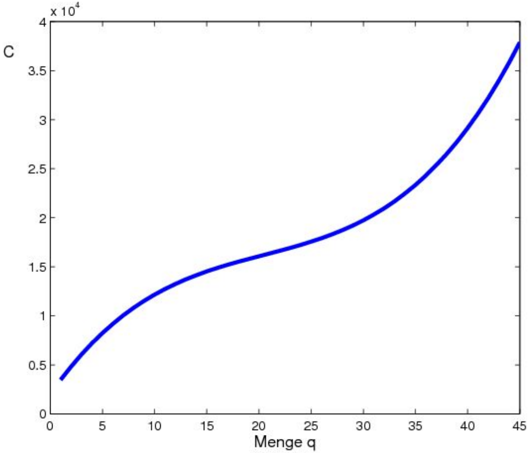
Der **Grad des Polynoms** wird durch die höchste vorkommende Potenz $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Ist $n = 3$, so spricht man von einer kubischen Funktion:
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Der Graph einer kubischen Funktion kann je nach Wahl von a, b, c und d stark variieren.

Typischer Verlauf einer kubischen Kostenfunktion mit:

$$C = q^3 - 61\,q^2 + 1500\,q + 2000$$



Die kubische Kostenfunktion stellt eine typische Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften dar. Für Polynome mit Grad n gilt, dass sie höchstens n Nullstellen im Bereich der reellen Zahlen bzw. genau n Nullstellen im Bereich der komplexen Zahlen besitzen. Bezeichnet man die Lösungen mit $x_i, i = 1, \ldots, n$, dann gilt:

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

Diese Darstellung des Polynoms bezeichnet man als **Faktorzerlegung**.

Beachte: ein und dieselbe Lösung kann mehrfach auftreten; falls nur reelle Koeffizienten dargestellt werden sollen, so gilt eine modifizierte Darstellung (*siehe dazu das Beispiel in Sydsæter/Hammond (2.A.), S. 145*).

Die Ermittlung der Nullstellen/Lösungen/Wurzeln/roots eines Polynoms ist in der Regel keine einfache Aufgabe. Sie gelingt nur für kleine n analytisch und dann auch nicht immer in geschlossener Form. Regelmäßig müssen numerische Verfahren zur Nullstellenbestimmung verwendet werden!

Die Darstellung des Polynoms durch die Faktorzerlegung kann auch dazu benutzt werden, um den Grad des Polynoms um eins zu reduzieren. Kann beispielsweise eine Lösung x_1 „erraten" werden, so gilt:
$P(x)/(x-x_1) = (x-x_2)\cdots(x-x_n)$.

Beispielsweise kann man das Polynom $x^3-6x^2+11x-6$ vom Grad 3 durch Faktorisierung als Produkt dreier Polynome von Grad 1 darstellen:

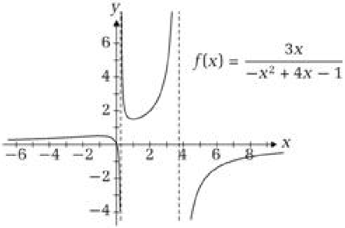
$$x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Die bisher betrachteten Polynomfunktionen werden auch als ganze rationale Funktionen bezeichnet. Setzt man zwei Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ zueinander ins Verhältnis, so erhält man **gebrochen rationale Funktionen** der Form

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \, .$$

Charakteristisch für den Grafen einer gebrochen rationalen Funktion ist das Auftreten von Polstellen und/oder Asymptoten.

Als Beispiel wird hier die Funktion $f(x) = \frac{3x}{-x^2+4x-1}$ dargestellt

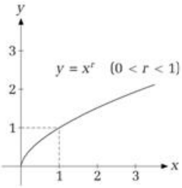


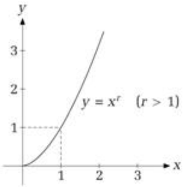
Potenzfunktionen

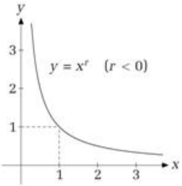
Potenzfunktionen treten in verschiedenen Formen in wirtschaftswissenschaftlichen Zusammenhängen auf. Die allgemeine Form einer Potenzfunktion lautet dabei: $f(x) = Ax^r$ wobei $x \geq 0$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit gesetzt wird und A und r beliebige Konstante sind.

Die Form des Grafen einer Potenzfunktion hängt entscheidend von r ab:

Wurzelfunktion	*Parabel*	*Hyperbel*
$0 < r < 1$	$r > 1$	$r < 0$







Exponentialfunktionen

Wachstums- bzw. Schrumpfungsprozesse spielen in der Ökonomie eine wichtige Rolle. Zur Modellierung oder Beschreibung solcher Phänomene verwendet man regelmäßig Exponentialfunktionen.

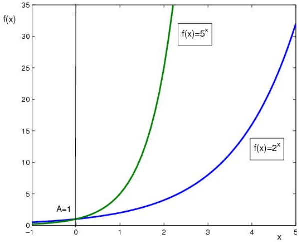
Die allgemeine Form einer Exponentialfunktion lautet $f(x) = A\,a^x$ wobei A und $a > 0$ die Parameter der Funktion sind.

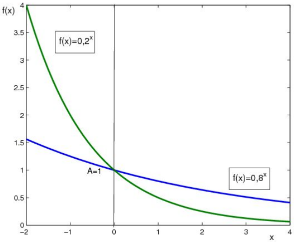
ANMERKUNGEN:

- Besonders anschaulich wird die Interpretation von Wachstumsprozessen, wenn als unabhängige Variable die Zeit mit dem Symbol t verwendet wird.
- Beachten Sie den Unterschied zwischen der Potenzfunktion $f(x) = x^a$ einerseits und der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ andererseits!
- Bei der Exponentialfunktion steckt die unabhängige Variable im Exponenten.

Verläufe der Exponentialfunktion bei variierender Basis a:

$a > 1$ $\qquad\qquad$ $0 < a < 1$





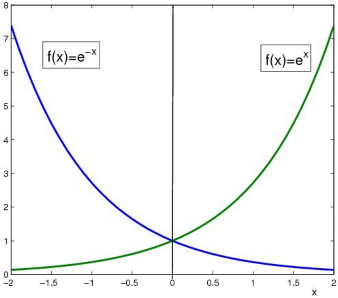
Machen Sie sich klar, wie die obigen Grafen sich mit variierendem a verändern.

BEISPIEL: Wachstum einer Bakterienkultur.

Einen wichtigen Spezialfall stellt die **natürliche Exponentialfunktion** mit der Basis $e = 2,718...$, der Euler'schen Zahl, dar.

Als Schreibweise für diese Funktion findet man entweder $f(x) = e^x$ oder $f(x) = \exp(x)$.

Die natürliche Exponentialfunktion verläuft entweder monoton steigend oder monoton fallend:

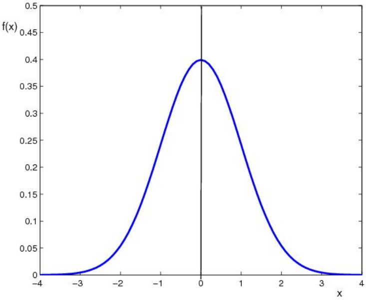


In der Statistik spielt die natürliche Exponentialfunktion eine zentrale Rolle als Dichtefunktion der Normalverteilung.

Die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ergibt sich zu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) .$$

Der Graf der Dichte der Standardnormalverteilung ist die bekannte Gaußsche Glockenkurve:



Logarithmusfunktionen

Das Logarithmieren stellt neben dem Wurzelziehen eine zweite Umkehrung des Potenzierens dar. Während beim Wurzelziehen die Basis der Potenz ermittelt wird, wird beim Logarithmieren der Exponent der Potenz ermittelt

Logarithmus

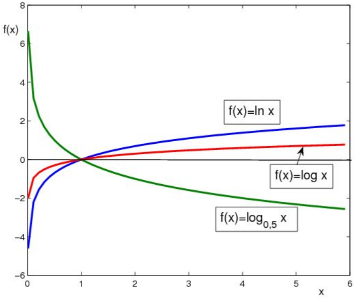
Die Zahl x mit $b^x = a$ heißt Logarithmus von a zur Basis b und wird mit $log_b(a)$ bezeichnet.

Die allgemeine Form einer Logarithmusfunktion lautet $f(x) = \log_a x$ wobei $a > 0$ und $a \neq 1$ die Basis der Funktion ist.
Besondere Bedeutung als Basen haben die Werte

- $a = 10$ (dekadischer Logarithmus; (*common logarithm*)*; Schreibweise* $\log x$*) und*
- $a = e$ *(natürlicher Logarithmus; (*natural logarithm); Schreibweise $\ln x$)

erlangt.

Die Logarithmusfunktion verläuft entweder monoton steigend (für Basen $a > 1$) oder monoton fallend (für Basen $0 < a < 1$):



Weiterhin gilt: je größer die Basis, umso flacher verläuft die Logarithmusfunktion.

Was bedeutet eigentlich (nochmal) Logarithmus?

$\rightarrow$ Das Wort Logarithmus bedeutet dasselbe wie Exponent oder Hochzahl.

Ausgangspunkt für das Verständnis des Logarithmus ist die Äquivalenz der Exponentialgleichung $x = a^y$ mit $y = \log_a x$, dem Logarithmus von x zur Basis a.

D.h., y ist der Exponent, mit dem die Basis a potenziert werden muss, um x zu erhalten. Für jede beliebige Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und die stets positiven Potenzwerte x und y gelten die Logarithmusgesetze.

Logarithmusgesetze

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad (r \in \mathbb{R})$

Aus den Rechenregeln ergeben sich unmittelbar zwei wichtige Sonderfälle:

- $\log_a(1/x) = \log_a(x^{-1}) = -\log_a x$
- $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \log_a(x^{1/n}) = \frac{1}{n}\log_a x$

Beachte: Es gibt keine Umformungen für $\log(x+y)$ bzw. $\log(x-y)$.

Allgemein gilt: $\log_a a^x = x$ und $a^{\log_a x} = x$.

Speziell für den dekadischen bzw. den natürlichen Logarithmus gilt entsprechend:

- $\log 10^x = x$ und $10^{\log x} = x$
- $\ln e^x = x$ und $e^{\ln x} = x$.

Es gilt: $\ln 1 = 0$ und $\log 1 = 0$.

In Taschenrechnern und auch in Mathematik-Softwarepaketen sind ausschließlich der dekadische und der natürliche Logarithmus enthalten.

Ausgangspunkt für die so genannte Basisumrechnung ist wieder die Exponentialgleichung $a^y = x$.
Bilden wir auf beiden Seiten $\log_b$ und formen wir äquivalent um, so erhalten wir:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x \,,$$

d.h. der Logarithmus von x zur Basis a ist proportional zum Logarithmus von x zur Basis b! Sinnvollerweise wählen wir als Basis b entweder 10 oder e und erhalten

Formeln zur Basisumrechnung

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a} \,.$$

Das Verdoppelungsproblem:

Der Logarithmus erweist sich als sehr nützlich zur Beantwortung von Fragen der Art „*Wie lange dauert es, bis sich ein Bestand, der mit der mit einer konstanten Rate wächst, verdoppelt, verdreifacht,... hat?*".

Das soll hier anhand eines Beispiels aus der Finanzmathematik dargestellt werden.

Betrachtet wird ein (Spar-)Konto mit dem Anlagebetrag K_0; vereinbart sind Zinseszinsen in Höhe von $p\%$. Wie lange dauert es, bis sich das Geld auf dem Konto alleine durch die Zinszahlungen verdoppelt hat?

Ausgangspunkt: $K_t = K_0 \cdot q^t$; daraus ergibt sich durch geeignete Umformung unter Ausnutzung der Information, dass $K_t = 2 \cdot K_0$:

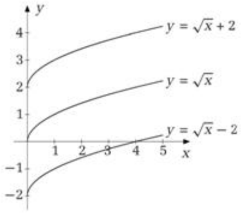
$$t = \frac{\ln 2}{\ln q} .$$

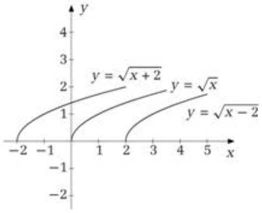
Verkettete, Inverse und Implizite Funktionen

Die „Verschiebung" von Grafen einer Funktion und die Analyse deren Auswirkungen gehören zum Standardinstrumentarium vieler ökonomischer Untersuchungen. Es ist deshalb wichtig, dass Sie wissen, wie beispielsweise eine „Rechtsverschiebung" zustandekommen kann.

Wir betrachten die folgenden beiden wichtigen Fälle (für $c > 0$):

- $y = f(x) + c$ - Verschiebung entlang der Ordinate;
- $y = f(x + c)$ - Verschiebung entlang der Abszisse;





Bei reellen Funktionen können die Rechenoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Funktionen durchgeführt werden. Beispiele hierzu finden sich z.B. in Sydæter / Hammond (2.A.) S. 175 ff.

Von besonderer Bedeutung ist in diesem Zusammenhang die Operation der **Verkettung** von Funktionen, die wir hier näher betrachten wollen.

Hat man eine so genannte **äußere Funktion** $z = f(y)$ und eine so genannte **innere Funktion** $y = g(x)$ so erhält man daraus eine **zusammengesetzte / mittelbare / verkettete Funktion** (composite function) wie folgt:

$$z = f(g(x)) = f \circ g(x) \qquad \text{wobei} \quad x \in D(g)\ .$$

Voraussetzung für die Zusammensetzung: Der Wertebereich der inneren Funktion g muß eine Teilmenge des Definitionsbereichs der äußeren Funktion f sein, d.h. es muss gelten: $W(g) \subset D(f)$.

Eine wichtige Anwendung des Konzepts der mittelbaren Funktionen stellen die monotonen Transformationen von Funktionen dar.

Definition: monotone Transformation

Sei $I \subset \mathbb{R}$; g eine reellwertige Funktion und $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion. Dann stellt die zusammengesetzte Funktion

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

eine (positive) monotone Transformation von $g(x)$ dar.

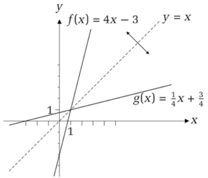
Beispiele für monotone Transformationen:

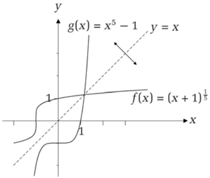
- Addition einer beliebigen Konstante;
- Multiplikation mit einer <u>positiven</u> Zahl;
- Potenzieren mit einer <u>ungeraden</u> Zahl;
- Logarithmieren;
- Exponentialfunktion bilden.

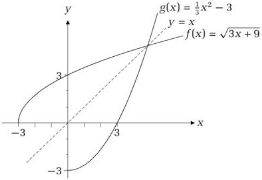
Definition: Umkehrfunktionen

Eine Funktion $y = f(x)$ mit $x \in D(f); y \in W(f)$ heißt eineindeutig, wenn es zu jedem y genau einen Wert x gibt. Zur eineindeutigen Funktion $y = f(x)$ existiert eine **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** $x = g(y) = f^{-1}(y)$. Es gilt $D(f^{-1}) = W(f)$ und $W(f^{-1}) = D(f)$.

Die Grafen einer Funktion und ihrer Inversen sind symmetrisch zur Geraden $x = y$.







Satz: Sei f eine streng monotone Funktion in $D(f)$. Dann existiert zu f die Umkehrfunktion f^{-1} mit $D(f^{-1}) = W(f)$. Die Umkehrung gilt nicht.

Bisher haben wir ausschließlich Funktionen betrachtet, in der die abhängige Variable y explizit als Funktion der unabhängigen Variablen x in der Form $y = f(x)$ dargestellt war. In ökonomischen Anwendungen treten aber regelmäßig Situationen auf, in denen eine Funktion durch eine Gleichung der Form

$$F(x,y) = c$$

definiert ist. Solch eine Funktionen nennt man **implizit definierte Funktion** (implicit function).

Beachte: Explizit definierte Funktionen können stets in eine implizite Form gebracht werden, umgekehrt ist dies nicht immer möglich. Wichtige Beispiele für implizit definierte Funktionen (Grafen von Gleichungen) sind Kreis- und Ellipsengleichungen. Bei einem Mittelpunkt (x_0, y_0) gilt für diese:

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{(x-x_0)^2}{a} + \frac{(y-y_0)^2}{b} = 1$$