Mathematische Logik I

— Foliensatz 1 —

Dr. Michael Arndt

Wintersemester 2014/15

Sprachebenen

In der Logik werden *formale Sprachen* behandelt. Gleichzeitig werden wir über diese Sprachen sprechen müssen.

Deshalb ist es notwendig, klar zwischen diesen verschiedenen Sprachen zu unterscheiden.

Als *Objektsprache* wird diejenige Sprache bezeichnet, die in der Logik formal eingeführt wird.

Die *Metasprache* ist hingegen diejenige Sprache, in der über die Objektsprache gesprochen wird.

Alphabet der Aussagenlogik

Definition 1 (Alphabet)

Das Alphabet der Sprache der Aussagenlogik besteht aus folgenden Zeichen:

1. *Hilfszeichen*: (,) (Klammer-Zeichen)
2. *Aussagesymbole* (Aussagevariable): $p_0, \ p_1, \ p_2, \ \ldots$

   AV $=_{\mathrm{def}} \{p_i : \ i \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge der Aussagevariablen.

Alphabet der Aussagenlogik

Definition 1 (Alphabet (Forts.))

3. *Junktoren* (Verknüpfungszeichen, Konnektive):

   0-stellig: $\bot$ (das Falsum, die Absurdität)

   1-stellig: $\neg$ (die Negation)

   2-stellig: $\wedge$ (die Konjunktion, das Und-Zeichen),

   $\vee$ (die Disjunktion, das Oder-Zeichen),

   $\rightarrow$ (das Konditional, der Implikations-Pfeil),

   $\leftrightarrow$ (das Bikonditional, der Äquivalenz-Pfeil)

Alphabet der Aussagenlogik

Bemerkungen:

- Die Klammern werden benötigt, da wir eine Infix-Notation für die Objektsprache verwenden werden.

  Ohne Verwendung strukturierender Symbole wäre eine solche Sprache nicht eindeutig, d.h. dieselbe Zeichenfolge könnte für unterschiedliche Formeln stehen.

- Als Metavariable (Variable in der Metasprache) verwenden wir häufig $\circ$ für zweistelligen Junktoren und p, q, r für Aussagevariablen.

Aussagen und Formeln

Definition 2 (AL-Aussagen)

Die Menge PROP der *AL-Aussagen* (oder AL-Formeln) ist induktiv definiert durch:

1. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $p_k \in$ PROP.
2. $\bot \in$ PROP.
3. Wenn $\phi \in$ PROP, dann $\neg\phi \in$ PROP.
4. Wenn $\phi \in$ PROP und $\psi \in$ PROP, dann $(\phi \circ \psi) \in$ PROP.

Die Aussagevariablen und das Falsum werden auch *atomare Formeln* oder *Atome* genannt.

ATM $=_{\mathrm{def}}$ AV $\cup \{\bot\}$ ist entspreched die *Menge der Atome*.

Aussagen und Formeln

Bemerkungen:

- ϕ und ψ werden auch in Zukunft als Metavariablen für Formeln aus PROP verwendet.
- In der Aussagenlogik unterscheiden wir nicht zwischen Aussagen und Formeln. Diese Unterscheidung wird erst in der Prädikatenlogik relevant.
- Die Klauseln (1)–(4) in der vorherigen Definition können auch als formale Regeln eines *Bildungskalküls* für AL-Formeln aufgefaßt werden. PROP ist dann die Menge der in diesem Kalkül ableitbaren Ausdrücke.

Konvention zur Klammerersparnis

Um Formeln lesbarer aufzuschreiben, wird folgende Konvention zur Klammerersparnis eingeführt:

1. Außenklammern dürfen weggelassen werden.
2. Die Negation $\neg$ bindet stärker als alle zweistelligen Junkoren.
3. Konjunktion $\wedge$ und Disjunktion $\vee$ binden stärker als Konditional $\rightarrow$ und Bikonditional $\leftrightarrow$.

Die Klammern werden lediglich im Aufschrieb weggelassen, müssen aber bei den Formeln weiterhin mitgedacht werden.

So ändert sich etwa die Anzahl der in einer Formel vorkommenden Zeichen durch die Klammerersparnis nicht.

Konvention zur Klammerersparnis

Notation:

Das Zeichen $\doteq$ bedeutet *„ist zeichenweise gleich"* und wird für die syntaktische Gleichheit von Formeln verwendet.

Bei der Verwendung von $\doteq$ ist insbesondere zu beachten, dass diese unabhängig von der Konvention zur Klammerersparnis ist.

- $(p_0 \wedge p_1) \doteq p_0 \wedge p_1$

  Links und rechts stehen die gleichen Zeichen; rechts wurden die Klammern nicht explizit hingeschrieben.

- $\neg p_0 \wedge p_1 \not\doteq \neg(p_0 \wedge p_1)$

  Links und rechts ist das erste Zeichen eine Negation, links folgt darauf die Aussagenvariable p_0, rechts eine Klammer, die, da sie keine Außenklammer ist, nicht weggelassen werden darf.

Das Induktionsprinzip

Jeder induktiven Definition (wie etwa der Definition der AL-Formeln) entspricht ein *Induktionsprinzip*.

Die induktive Definition beschreibt, wie ein Bereich (Gegenstands-Bereich, Zahlbereich) aufgebaut wird.

Das Induktions-Prinzip sagt, wie dann Beweise über diesen Bereich in entsprechenden Schritten geführt und damit Behauptungen, die für alle Objekte dieses Bereichs gelten, bewiesen werden.

Das Induktionsprinzip

Beispiel: (Natürliche Zahlen)

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist die kleinste Menge X, die folgendes erfüllt:

1. $0 \in X$.
2. Wenn $n \in X$, dann $n' \in X$.

(Hierbei ist n' der *Nachfolger* von n.)

Aussagen A über diesen Zahlbereich (d.h. Aussagen, die für jede natürliche Zahl gelten) werden mit der gewohnten vollständigen Induktion geführt.

Das Induktionsprinzip

Theorem

Sei A eine Aussage, so dass $A(0)$ gilt und weiterhin aus $A(n)$ bereits $A(n')$ folgt. Dann gilt die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Betrachte $X =_{\text{def}} \{n \in \mathbb{N} : \ A(n)\}$. Offenbar ist $X \subseteq \mathbb{N}$.

Ferner gilt nach Annahme über A: $0 \in X$, und mit $n \in X$ folgt schon $n' \in X$, d.h. (1) und (2) gelten.

Damit ist aber $\mathbb{N} \subseteq X$, da $\mathbb{N}$ die kleinste derartige Menge ist.

Also ist $\mathbb{N} = X$, und die Aussage ist bewiesen. $\square$

Das Induktionsprinzip für AL-Formeln

Theorem 3

Sei A eine Eigenschaft, so dass folgendes gilt:

1. *Für jedes $k \in \mathbb{N}$: $A(p_k)$.*
2. *$A(\perp)$.*
3. *Wenn $A(\phi)$, dann $A(\neg\phi)$.*
4. *Wenn $A(\phi)$ und $A(\psi)$, dann $A\big((\phi \circ \psi)\big)$.*

Dann gilt $A(\phi)$ für jede Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$.

Das Induktionsprinzip für AL-Formeln

Beweis:

Betrachte die Menge $X =_{\mathrm{def}} \{\phi \in \mathrm{PROP} : \; A(\phi)\}$. Offenbar ist $X \subseteq \mathrm{PROP}$.

Zunächst ist $\perp \in X$, und für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $p_k \in X$.

Ferner gilt: mit $\phi, \psi \in X$ ist $\neg\phi \in X$ und $(\phi \circ \psi) \in X$.

Somit gelten (1)–(4).

Da PROP die kleinste derartige Menge ist, gilt: $\mathrm{PROP} \subseteq X$.

Damit gilt $\mathrm{PROP} = X$, und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Das Induktionsprinzip für AL-Formeln

Bemerkung:

Das Theorem scheint auf den ersten Blick ein wenig technisch.

Es hat jedoch eine zentrale Bedeutung, da es die Begründung dafür darstellt, dass in der Logik Eigenschaften von Formelmengen durch Induktion über den Formelaufbau geführt werden können.

Das Induktionsprinzip für AL-Formeln

Behauptung:

Für jede Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ gilt, dass in ϕ eine gerade Anzahl von Klammern vorkommt.

Beweis:

I. Induktionsanfang:

Zeige, dass die Aussage für atomare Formeln gilt.

p_k: Bei jeder Aussagevariable p_k ($k \in \mathbb{N}$) kommen $0 = 2 \cdot 0$ Klammern vor.
Also ist die Aussage für alle Aussagevariablen richtig.

$\perp$: Beim Falsum ($\perp$) kommen $0 = 2 \cdot 0$ Klammern vor.
Also ist die Aussage für $\perp$ richtig.

Das Induktionsprinzip für AL-Formeln

II. Induktionsvoraussetzung:

Angenommen, die Aussage ist richtig für $\phi, \psi \in \text{PROP}$.

D.h. in ϕ kommen $2 \cdot n$ und in ψ kommen $2 \cdot m$ Klammern vor, für entsprechende $n, m \in \mathbb{N}$.

III. Induktionsschluß:

$\neg\phi$: Die Formel $\neg\phi$ hat ebenso viele Klammern wie die Formel ϕ. Damit ist die Anzahl der Klammern ebenso gerade und die Aussage ist richtig für $\neg\phi$.

$(\phi \circ \psi)$: Die Formel $(\phi \circ \psi)$ hat $2n + 2m + 2 = 2 \cdot (n + m + 1)$ viele Klammern. Damit ist die Anzahl der Klammern gerade und die Aussage ist richtig für $(\phi \circ \psi)$.

Damit gilt die Aussage für alle Formeln $\phi \in \text{PROP}$. $\square$

Bildungsfolgen

Definition 4 (Bildungsfolge)

Sei $\phi \in \mathrm{PROP}$ eine Formel. Eine *Bildungsfolge* von ϕ ist eine Folge von Formeln $\langle \phi_0,\ \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle$ mit $\phi_n \doteq \phi$, so dass für jedes i $(0 \leq i \leq n)$ einer der folgenden Fälle zutrifft:

1. $\phi_i \in AV$.
2. $\phi_i \doteq \bot$.
3. $\phi_i \doteq \neg \phi_k$ mit $0 \leq k < i$.
4. $\phi_i \doteq (\phi_k \circ \phi_l)$ mit $0 \leq k, l < i$.

Eine Bildungsfolge von ϕ ist also eine Ableitung in dem Kalkül, der durch die Bildungsregeln für AL-Formeln vorgegeben wird.

Bildungsfolgen

Beispiele:

- $\left\langle p_0, \neg p_0, p_1, \neg p_0 \vee p_1, p_1 \rightarrow (\neg p_0 \vee p_1) \right\rangle$
- $\left\langle p_3, p_2, p_1, p_2 \leftrightarrow p_3, \neg(p_2 \leftrightarrow p_3), \bot, \bot \vee \neg(p_2 \leftrightarrow p_3) \right\rangle$
- $\left\langle p_0, p_0 \rightarrow p_0, (p_0 \rightarrow p_0) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_0), \right.$
  $\left. ((p_0 \rightarrow p_0) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_0)) \rightarrow ((p_0 \rightarrow p_0) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_0)) \right\rangle$
- $\left\langle p_1, \neg p_1, \neg\neg p_1, p_0, \neg\neg p_1 \wedge \neg p_1, p_0 \vee (\neg\neg p_1 \wedge \neg p_1) \right\rangle$
- $\left\langle \bot, \bot, \bot, \bot, \bot, p_0, \bot, \bot \right\rangle$

Bildungsfolgen

Bemerkungen:

- In einer Bildungsfolge für ϕ können *irrelevante* Bestandteile vorkommen.

  (So können in einer bestehenden Bildungsfolge für ϕ vor jedem Folgenglied beliebige atomare Formeln eingefügt werden. Die Folge bleibt dabei eine Bildungsfolge für ϕ).
- Jedes (echte) Anfangsstück einer Bildungsfolge ist selbst eine Bildungsfolge (ggf. für eine andere Formel).
- Entsteht eine Folge aus dem Hintereinanderschreiben zweier Bildungsfolgen, so ist diese ebenfalls eine Bildungsfolge.

Bildungsfolgen

Theorem 5

PROP *ist die Menge aller Ausdrücke über dem Alphabet der Aussagenlogik, für die es eine Bildungsfolge gibt.*

Beweis:

Es sei $\mathcal{F}$ die Menge all derjenigen Ausdrücke, für die es eine Bildungsfolge gibt.

Zu zeigen ist: $\mathcal{F} = \text{PROP}$.

(Dazu ist sowohl $\text{PROP} \subseteq \mathcal{F}$ als auch $\mathcal{F} \subseteq \text{PROP}$ zu zeigen.)

Zeige zunächst $\text{PROP} \subseteq \mathcal{F}$ durch Induktion über den Formelaufbau.

Bildungsfolgen

I. Induktionsanfang:

p_k Für jedes p_k ($k \in \mathbb{N}$) ist $\langle p_k \rangle$ dessen Bildungsfolge.

$\perp$ $\langle \perp \rangle$ ist eine Bildungsfolge für $\perp$.

II. Induktionsvoraussetzung:

Seien $\phi_0, \ldots, \phi_m \doteq \phi$ und $\psi_0, \ldots, \psi_n \doteq \psi$ Bildungsfolgen für die Formeln $\phi, \psi \in$ PROP, wobei $m, n \in \mathbb{N}$.

III. Induktionsschluß:

$\neg\phi$: Die Folge $\langle \phi_0, \ldots, \phi_m, \neg\phi \rangle$ ist eine Bildungsfolge für $\neg\phi$.

$(\phi \circ \psi)$: Die Folge $\big\langle \phi_0, \ldots, \phi_m, \psi_0 \ldots, \psi_n, (\phi \circ \psi) \big\rangle$ ist eine Bildungsfolge für $(\phi \circ \psi)$.

Damit ist jedes $\phi \in$ PROP schon Element von $\mathcal{F}$ und PROP $\subseteq \mathcal{F}$.

Bildungsfolgen

Zeige nun $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{PROP}$.

Wir zeigen durch Induktion über die Länge von Bildungsfolgen, dass für alle Bildungsfolgen $\phi_0, \ldots, \phi_n$ der Länge $n+1$ und darin für alle Folgenglieder ϕ_i $(0 \leq i \leq n)$ gilt: $\phi_i \in \mathrm{PROP}$.

<u>I. Induktionsanfang:</u>

Eine Bildungsfolge $\langle \phi_0 \rangle$ der Länge 1 ist nach Definition von Bildungsfolgen eine atomare Formel. Daher $\phi_0 \in \mathrm{PROP}$.

Bildungsfolgen

II. Induktionsvoraussetzung:

Die Behauptung gelte für jede Bildungsfolge $\langle \phi_0, \dots, \phi_n \rangle$ der Länge $n + 1$.

Für jedes i mit $0 \leq i < n + 1$ gilt: ϕ_i ist auch in der Bildungsfolge $\langle \phi_0, \dots \phi_n \rangle$ enthalten. Daher ist mit der Induktionsvoraussetzung auch $\phi_i \in$ PROP für jedes i mit $0 \leq i < n + 1$ angenommen.

III. Induktionsschluß:

Sei $\langle \phi_0, \dots, \phi_n, \phi_{n+1} \rangle$ eine um ein Folgenelement längere Bildungsfolge.

Bildungsfolgen

Nach Definition von Bildungsfolgen gilt für ϕ_{n+1} eine der folgenden Fälle:

1. $\phi_{n+1} \doteq p_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann $\phi_{n+1} \in \text{PROP}$.
2. $\phi_{n+1} \doteq \bot$, dann $\phi_{n+1} \in \text{PROP}$.
3. $\phi_{n+1} \doteq \neg\phi_i$ mit $0 \leq i < n$.
   Dann ist ϕ_i Folgenglied der Bildungsfolge $\langle \phi_0, \ldots, \phi_n \rangle$, und nach Induktionsvoraussetzung gilt: $\phi_i \in \text{PROP}$.
   Damit ist auch $\neg\phi_i \in \text{PROP}$.
4. $\phi_{n+1} \doteq (\phi_i \circ \phi_j)$ mit $0 \leq i, j < n$.
   Dann sind ϕ_i, ϕ_j Folgenglieder der Bildungsfolge $\langle \phi_0, \ldots, \phi_n \rangle$, und nach Induktionsannahme gilt: $\phi_i \in \text{PROP}$, $\phi_j \in \text{PROP}$.
   Damit ist auch $(\phi_i \circ \phi_j) \in \text{PROP}$.

$\square$

Rekursionssatz

Theorem 6 (Rekursionssatz)

Seien für eine beliebige Menge $\mathcal{A} \neq \varnothing$ *die Funktionen*

$H_{\mathsf{ATM}} : \mathsf{ATM} \to \mathcal{A}$

$H_{\neg} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$H_{\circ} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

gegeben.

Dann gibt es genau eine Abbildung $F : \mathsf{PROP} \to \mathcal{A}$ *mit:*

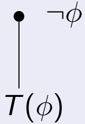
1. $F(\phi) = H_{\mathsf{ATM}}(\phi)$ *für jedes* $\phi \in \mathsf{ATM}$,
2. $F(\neg\phi) = H_{\neg}\big(F(\phi)\big)$,
3. $F\big((\phi \circ \psi)\big) = H_{\circ}\big(F(\phi), F(\psi)\big)$.

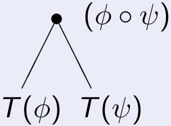
Strukturbaum

Definition 7 (Strukturbaum)

Für eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist deren *Strukturbaum* (Gliederungsbaum, *engl.: parsing tree*) $T(\phi)$ rekursiv definiert:

1. für $\phi \in \mathrm{ATM}$:
   $T(\phi) =_{\mathrm{def}} \quad \bullet \ \phi$

2. $T(\neg\phi) =_{\mathrm{def}}$
   

3. $T\big((\phi \circ \psi)\big) =_{\mathrm{def}}$
   

Rang

Definition 8 (Rang)

Für eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist deren *Rang* **r** wie folgt rekursiv definiert:

1. für $\phi \in \mathrm{ATM} : \mathbf{r}(\phi) =_{\mathrm{def}} 0$,
2. $\mathbf{r}(\neg\phi) =_{\mathrm{def}} \mathbf{r}(\phi) + 1$,
3. $\mathbf{r}\big((\phi \circ \psi)\big) =_{\mathrm{def}} \max\{\mathbf{r}(\phi), \mathbf{r}(\psi)\} + 1$.

Beispiele:

- $\mathbf{r}(\neg\neg\bot) = 2$
- $\mathbf{r}\big((p_0 \wedge p_1) \wedge p_2\big) = 2$
- $\mathbf{r}\big(p_0 \wedge p_1 \to \neg(p_1 \vee \neg p_2)\big) = 4$

Teilformel

Definition 9 (Teilformel)

Für eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist $\textbf{sub}(\phi)$, die *Menge aller Teilformeln von* ϕ, wie folgt rekursiv definiert:

1. für $\phi \in \mathrm{ATM}$: $\textbf{sub}(\phi) =_{\mathrm{def}} \{\phi\}$,
2. $\textbf{sub}\big((\phi \circ \psi)\big) =_{\mathrm{def}} \big\{(\phi \circ \psi)\big\} \cup \big(\textbf{sub}(\phi) \cup \textbf{sub}(\psi)\big)$,
3. $\textbf{sub}(\neg\phi) =_{\mathrm{def}} \{\neg\phi\} \cup \textbf{sub}(\phi)$.

Eine Formel ψ heißt *Teilformel* einer Formel ϕ, falls $\psi \in \textbf{sub}(\phi)$.

Eine Formel ψ heißt *echte Teilformel* einer Formel ϕ, falls $\psi \in \textbf{sub}(\phi)$ und $\psi \neq \phi$.

Statt $\psi \in \textbf{sub}(\phi)$ schreiben wir auch: $\psi \preceq \phi$.

Falls dabei $\psi \neq \phi$, schreiben wir $\psi \prec \phi$.

Ranginduktion

Definition 10 (Ranginduktion)

Sei A eine Eigenschaft, so dass folgendes für jede Formel $\psi \in \text{PROP}$ gilt:

Aus dem Gelten von $A(\phi)$ für alle Formeln ϕ mit $\mathbf{r}(\phi) < \mathbf{r}(\psi)$ folgt schon das Gelten von $A(\psi)$. $\quad (\dagger)$

Dann gilt $A(\phi)$ schon für jede Formel $\phi \in \text{PROP}$.

Beweis:

Es sei A eine Eigenschaft mit $(\dagger)$.

Ranginduktion

Zeige zunächst durch Induktion über dem Formelaufbau von ψ:

> Für alle $\psi \in$ PROP und alle $\phi \in$ PROP:
> wenn $\mathbf{r}(\phi) < \mathbf{r}(\psi)$, dann $A(\phi)$.

<u>I. Induktionsanfang:</u>

ψ ist atomar, d.h. $\mathbf{r}(\psi) = 0$.

Trivialerweise gilt für alle Formeln ϕ mit $\mathbf{r}(\phi) < \mathbf{r}(\psi)$ schon $A(\phi)$, denn es gibt keine solchen Formeln.

<u>II. Induktionsvoraussetzung:</u>

Die Behauptung (†) gelte für Formeln ϕ, χ.

Ranginduktion

III. Induktionsschluß:

$\psi \triangleq \neg\phi$:

Es ist $\mathbf{r}(\psi) = \mathbf{r}(\phi) + 1$. Angenommen, es gibt eine Formel σ mit $\mathbf{r}(\sigma) < \mathbf{r}(\neg\phi)$, so dass $A(\sigma)$ nicht gilt. Dann kann σ aufgrund der IV keinen kleineren Rang haben als ψ. Also gilt: $\mathbf{r}(\sigma) = \mathbf{r}(\psi)$. Insbesondere gilt damit für alle Formeln τ mit kleinerem Rang als σ schon $A(\tau)$.

Mit (†) folgt nun $A(\sigma)$. Widerspruch.

Also gilt doch für alle Formeln σ mit $\mathbf{r}(\sigma) < \mathbf{r}(\neg\phi)$: $A(\sigma)$.

Ranginduktion

$\psi \triangleq (\phi \circ \chi)$:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\mathbf{r}(\psi) = \mathbf{r}(\phi) + 1$. Angenommen, es gibt eine Formel σ mit $\mathbf{r}(\sigma) < \mathbf{r}\big((\phi \circ \chi)\big)$, so dass $A(\sigma)$ nicht gilt. Dann kann σ aufgrund der IV keinen kleineren Rang haben als ψ. Also gilt: $\mathbf{r}(\sigma) = \mathbf{r}(\psi)$. Insbesondere gilt damit für alle Formeln τ mit kleinerem Rang als σ schon $A(\tau)$.

Mit (†) folgt nun $A(\sigma)$. Widerspruch.

Also gilt doch für alle Formeln σ mit $\mathbf{r}(\sigma) < \mathbf{r}\big((\phi \circ \chi)\big)$: $A(\sigma)$.

Ranginduktion

Somit kann gezeigt werden:

Für alle $\psi \in \text{PROP}$ ist $A(\psi)$.

Sei $\psi \in \text{PROP}$ beliebig.

Für alle Formeln ϕ mit $\mathbf{r}(\phi) < \mathbf{r}(\psi)$ gilt mit obiger Induktion $A(\phi)$.

Damit gilt mit (†): $A(\psi)$. $\square$